ISSN 2524-0080
Ғылыми журнал

Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің

ХАБАРЛАРЫ

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА,
ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesinin

HABERLERİ

MATEMATİK, FİZİK, BİLİŞİM SERİSİ

ИЗВЕСТИЯ

Международного казахско-турецкого университета имени Х.А. Ясави

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА,
ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

NEWS

Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University

MATHEMATICS, PHYSICS,
COMPUTER SCIENCE SERIES

www.ayu.edu.kz №1 (32), 2025

ISSN 2524-0080
Ғылыми журнал

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің

ХАБАРЛАРЫ

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesinin

HABERLERİ

MATEMATİK, FİZİK, BİLİŞİM SERİSİ

ИЗВЕСТИЯ

Международного казахско-турецкого университета имени Ходжа Ахмеда Ясави

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

NEWS

Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University

MATHEMATICS, PHYSICS, COMPUTER SCIENCE SERIES

Қазақстан Республикасы Инвестициялар және даму министрлігінің Байланыс, ақпараттандыру және ақпарат комитетінде 04.12.2015 ж. тіркелді, куәлік №15721-Ж.

Қазақстан Республикасы Ақпарат және коммуникациялар министрлігінің Байланыс, ақпараттандыру және бұқаралық ақпарат құралдары саласындағы мемлекеттік бақылау комитетінде 10.03.2017 ж. қайта тіркелген, куәлік №16387-Ж. Жылына 4 рет шығарылады.

Ғылыми басылым

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары (математика, физика, информатика сериясы) ***№1 (32) 2025 ж.***

Журнал 2016 жылдың мамыр айының 30 жұлдызынан бастап Париж қаласындағы ISSN орталығында тіркелген.

Редакцияның мекен-жайы:

Редакцияның мекен-жайы: 161200, Қазақстан Республикасы, Түркістан қаласы,
Б. Саттарханов даңғылы, 29В, ректорат, 404 бөлме.
Байланыс телефоны: 8(725-33)6-38-26(19-60)
e-mail:ayu-habarlari@ayu.edu.kz

РЕДАКЦИЯЛЫҚ АЛҚА МҮШЕЛЕРІ

МАТЕМАТИКА

Баканов Г.Б.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Турметов Б.Х.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Бөріханов М.	- PhD /Қазақстан/
Сәрсенби Ә.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Нұрсұлтанов Е.Д.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Ескендіроғлу Г.	- PhD /Түркия/
Мораес В.	- PhD /Бразилия/

ФИЗИКА

Турмамбеков Т.А.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Сейтов Б.Ж.	- PhD / Қазақстан /
Рахадилов Б.К.	- PhD, қауым.проф. / Қазақстан /
Сағдолдина Ж.Б.	- PhD, қауым.проф. / Қазақстан /
Чорух А.	- проф., доктор /Түркия/
Демиркоз М.Б.	- проф., доктор /Түркия/
Курбанов У.Т.	- ф.-м.ғ.д. /Өзбекістан/

ИНФОРМАТИКА

Мамырбек Ө.Ж.	- PhD, проф. /Қазақстан/
Бидайбеков Е.Ы.	- п.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Беркимбаев К.М.	- п.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Казбекова Г.Н.	- тех.ғ.к., доц. /Қазақстан/
Жумадиллаева А.К.	- тех.ғ.к., доц. /Қазақстан/
Акчайол М.А.	- проф., доктор /Түркия/
Караджан Х.	- проф., доктор /Түркия/

DANIŞMA KURULU

MATEMETIK

Bakanov G.B. - Fiz.-Mat. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Turmetov B.Kh. - Fiz.-Mat. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Borikhanov M. - PhD /Kazakistan/
Sarsenbi A. - Fiz.-Mat. Bil. Dr. /Kazakistan/
Nursultanov E.D. - Fiz.-Mat. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Yeskendiroglu G. - PhD /Türkiye/
Moraes W. - PhD /Brazil/

FIZIK

Turmambekov T.A. - Fiz.-Mat. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Seyitov B.Zh. - PhD /Kazakistan/
Rakhadilov B.K. - PhD, Doç. Dr. /Kazakistan/
Sagdoldina Zh.B. - PhD., Doç. Dr. /Kazakistan/
Çoruh A. - Prof. Dr. /Türkiye/
Melehat B.D. - Prof. Dr. /Türkiye/
Kurbanov U.T. - Fiz.-Mat. Bil. Dr. /Uzbekistan/

BİLİŞİM SERİSİ

Mamyrbek O.Zh. - PhD, Prof. /Kazakistan/
Bidaibekov E. - Ped. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Berkimbayev K. - Ped. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Kazbekova G.N. - Ped. Bil. Dr., Doç. Dr. /Kazakistan/
Kanadilova A.Zh. - Ped. Bil. Dr., Doç. Dr. /Kazakistan/
Akchayol M.A - Prof. Dr. /Türkiye/
Karajan H. - Prof. Dr. /Türkiye/

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

МАТЕМАТИКА

Баканов Г.Б. - д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Турметов Б.Х. - д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Бориханов М. - PhD /Казахстан/
Сарсенби А. - д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Нурсултанов Е.Д. - д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Ескендироглу Г. - PhD /Турция/
Мораес В. - PhD, проф. /Бразилия/

ФИЗИКА

Турмамбеков Т.А. - д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Сейтов Б.Ж. - PhD /Казахстан/
Рахадилов Б.К. - PhD, ассоц., проф. /Казахстан/
Сагдолдина Ж. Б. - PhD, ассоц., проф. /Казахстан/
Чорух А. - проф., доктор /Турция/
Мелехат Б.Д - проф., доктор /Турция/
Курбанов У.Т. - д.ф.-м.н. /Узбекистан/

ИФОРМАТИКА

Мамырбек О.Ж - PhD, проф. /Казахстан/
Бидайбеков Е.Ы. - д.п.н., проф./Казахстан/
Беркимбаев К.М. - д.п.н., проф. /Казахстан/
Казбекова Г.Н. - д.п.н., доц. /Казахстан/
Жумадиллаева А.К. - д.п.н., доц. /Казахстан/
Акчайол М.А. - проф., доктор /Турция/
Караджан Х. - проф., доктор /Турция/

EDITORIAL BOARD

MATHEMATICS

Bakanov G.B.	- D.Sc. Phys.-Math., Prof. /Kazakistan/
Turmetov B.Kh.	- D.Sc. Phys.-Math., Prof. /Kazakistan/
Borikhanov M.	- PhD, /Kazakistan/
Sarsenbi A.	- D.Sc. Phys.-Math. /Kazakistan/
Nursultanov E.D.	- D.Sc. Phys.-Math., Prof. /Kazakistan/
Yeskendiroglu G.	- PhD /Turkey/
Moraes W.	- PhD /Brazil/

PHYSICS

Turmambekov T.A.	- D.Sc. Phys.-Math., Prof./Kazakistan/
Seyitov B.Zh.	- PhD /Kazakistan/
Rakhadilov B.K.	- PhD., Assoc. Prof. /Kazakistan/
Sagdoldina Zh.B.	- PhD., Assoc. Prof. /Kazakistan/
Coruh A.	- Prof. Dr. /Turkey/
Melehat B.D.	- Prof. Dr. /Turkey/
Kurbanov U.T.	- D.Sc. Phys.-Math. /Uzbekistan/

COMPUTER SCIENCE

Mamyrbek O.Zh.	- PhD., Prof. /Kazakistan/
Bidaibekov E.	- Dr. Ped. Sc., Prof. /Kazakistan/
Berkimbayev K.	- Dr. Ped. Sc., Prof. /Kazakistan/
Kazbekova G.N.	- Dr. Ped. Sc., Assoc. Prof. /Kazakistan/
Kanadilova A.Zh.	- Dr. Ped. Sc., Assoc. Prof. /Kazakistan/
Akchayol M.A.	- Prof. Dr. /Turkey/
Karajan H.	- Prof. Dr. /Turkey/

МАТЕМАТИКА

ӘОЖ 517.988.
МҒТАР 27.29.25
https://doi.org/10.47526/2025-1/2524-0080.18

Усманов К.И.[1] , Мамидова М.Т.[2]
[1]*доцент, физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті*
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz
[2]*магистр, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті*
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: malikamamidova@gmail.com

ПАНТОГРАФ ТИПТЕГІ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІН ҚОЛДАНУ
APPLICATION OF THE PARAMETRIZATION METHOD TO INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE PANTOGRAPH TYPE
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ К ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ТИПА ПАНТОГРАФА

Аңдатпа. *Пантограф типтегі алғашқы теңдеулер 1940 жылы Mahler жұмыстарында қарастырылған. Ол сығушы аргументтері бар функционалдық-дифференциалдық теңдеулерді сандар теориясында қолданған болатын. 1971 жылы J. Ockendon аргументтері түрленген* $y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$ *түріндегі функционалдық-дифференциалдық теңдеулерді электровоздың тоқ қабылдағышының қозғалысын сипаттау үшін қолданған болатын. Кейінгі кезде пантограф тектес теңдеулер кең қолданыс табуда. Мысалы баптаратын (пантограф) телефон құрылғысын ұстағыш, ұзартылатын (пантограф) микрофон құрылғысы және т.б.*

Бұл мақалада $[0,1]$ *кесіндісінде пантограф тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есеп қарастырлады. Берілген есепті шешу үшін профессор Д.Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісі қолданылады. Ол үшін қарастырылып отырған аралықты* m *бөліктерге бөлеміз. Ізделінді функция әрбір бөліктің бастапқы нүктесіндегі мәнін* $\lambda_i = x_i(t_{i-1}),\ i = \overline{1,m}$ *параметрі арқылы белгілеп аламыз және* $[t_{i-1}, t_i)$ *аралығында* $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ *алмастыруын жасаймыз. Сонда қарастырылып отырған есеп формальді түрде екіге бөлінеді, яғни пантограф тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі мен енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне. Сонымен есеп, пантограф тектес интегралдық–дифференциальдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешімі мен сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін анықтайтын тұйықталған жүйеге келтіріледі. Соның негізінде, бастапқы есептің шешімін анықтау алгоритмі ұсынылады.*

Негізгі сөздер: *пантограф, шеттік есеп, Коши есебі, сызықтық теңдеулер жүйесі, алгоритм, интегралдық–дифференциалдық теңдеу, параметр, жуықтау.*

Abstract. *The first equations of the 1940 pantograph were considered in the works of Mahler. He used functional differential equations with compression arguments in number theory. He used functional differential equations* $y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$ *with compression arguments in number theory. In 1971, J. Ockendon used functional differential equations with transformed arguments of the form to describe the motion of an electric locomotive pantograph. Recently, pantograph type equations have been widely used. For example, a configurable (pantograph) phone device holder, a retractable (pantograph) microphone device, etc.*

In this article, on the segment $[0,1]$ *discusses a two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations of the pantograph type. To solve this problem, the parameterization method proposed by Professor D. Dzhumabaev is used. To do this, we divide the segment in question into* m *parts. Let's denote the value of the desired function at the starting point of each segment through the parameters* $\lambda_i = x_i(t_{i-1}),\ i = \overline{1,m}$ *and replace it* $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ *in the intervals* $[t_{i-1}, t_i)$*. Then the problem under consideration is formally divided into two parts, i.e., a system of linear algebraic equations with respect to the introduced parameters and to the Cauchy problem for a system of integro-differential equations of the pantograph type. Thus, the problem is reduced to a closed system for determining the solution of a special Cauchy problem for systems of integro–differential equations of the pantograph*

type and a system of linear equations. Based on this, an algorithm for determining the solution of the initial problem is proposed.

***Keywords**: pantograph, boundary value problem, Cauchy problem, system of linear equations, algorithm, integro-differential equation, parameter, approximation.*

***Аннотация.** Первые уравнения пантографа 1940 года были рассмотрены в работах Mahlera. Он использовал функционально-дифференциальные уравнения с аргументами сжатия в теории чисел. В 1971 году J. Ockendon использоваль функционально-дифференциальные уравнения с преобразованными аргументами вида $y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$ для описания движения токоприемника электровоза. В последнее время уравнения типа пантограф находят широкое применение. Например, настраиваемый (пантограф) держатель телефонного устройства, выдвижное (пантограф) микрофонное устройство и т. д.*

В данной статье на отрезке $[0,1]$ рассмотрена двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнении типа пантографа. Для решения данной задачи используется метод параметризации, предложенный профессором Д. Джумабаевым. Для этого рассматриваемый отрезок разбиваем рассматриваемый интервал на m части. Обозначим значение искомой функции начальной точке каждой отрезка через параметры $\lambda_i = x_i(t_{i-1}),\ i = \overline{1,m}$ и произведем замену $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ в интервалах $[t_{i-1}, t_i)$. Тогда рассматриваемая задача формально делится на две части, т. е. система линейных алгебраических уравнении, относительно введенных параметров и к задаче Коши для системы интегро-дифференциальных уравнении типа пантографа. Таким образом задача сводится в замкнутую систему для определения решения специальной задачи Коши для систем интегро–дифференциальных уравнении типа пантографа и систему линейных уравнении. На основе этого предлагается алгоритм определения решения исходной задачи.

***Ключевые слова:** пантограф, краевая задача, задача Коши, система линейных уравнении, алгоритм, интегро-дифференциальное уравнение, параметр, приближение.*

Кіріспе

Пантограф типтегі теңдеулер алғашқы рет 1940 жылы Mahler-дің [1] жұмысында кездеседі. Ол сығушы аргументтері бар, функционалдық–дифференциалдық теңдеулерді сандар теориясында қолданады.

1971 жылы J. Ockendon [2] турленген аргументті

$$y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$$

функционалдық-дифференциалдық теңдеулерді электровоздың тоқ қабылдағышының қозғалысын сипаттау үшін қолданған болатын.



Сурет 1. Троллейбус пантографы

1972 ж. жұмысында G R Morris, A Feldstein және E W Bowen [3]

$$y'(x) = -ay(\varepsilon x), \quad y(0) = 1$$

теңдеуінің шексіз көп нөлдері бар болатындығын және бұл нүктелерде бастапқы есептің шешімі жалғыз еместігін, немесе мүлдем болмайтындығын көрсеткен болатын.

Быковтың [4] жұмыстарында екінші ретті пантограф тектес теңдеулер зерттеліп, келесі жалпыланған экспоненталық, жалпыланған косинус және жалпыланған синус функциялар енгізілген болатын:

$$e_\varepsilon^t = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t^k}{k!}, \qquad \cos_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k-1)} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k+1)} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Быковтың жұмыстарында жалпыланған косинус және жалпыланған синус функциялары

$$y''(t) = \varepsilon y(\varepsilon^2 t)$$

теңдеуінің шешімі болатындығы көрсетілген.

A.Iserles және Yunkang Liu [5] жалпыланған гипергеометриялық функцияларды

$$y'(t) = ay(t) + \int_0^1 y(\varepsilon s)\,ds + \int_0^1 y'(\varepsilon s)\,ds, \quad t > 0,$$

$$y(t) + \int_0^1 y(\varepsilon s)\,ds + \int_0^1 y'(\varepsilon s)\,ds = 0, \quad t > 0,$$

түріндегі интегралдық–дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін анықтау үшін қолданған.

[6] Родионовтың жұмысында алгебралық структуралар мен арнайы көбейту амалын қолдану арқылы

$$f(x) * g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} f_i g_j \varepsilon^{ij} \frac{x^k}{k!},$$

пантограф типтес дифференциалдық және функционалды-дифференциалдық теңдеулердің шешімін анықтау жолдары келтірілген. Сонымен қатар, енгізілген амалға қатысты жалпыланған косинус және жалпыланған синус функцияларының қаситеттері көрсетілген. Мысалы,

$$\sin_\varepsilon(x) * \sin_\varepsilon(x) + \cos_\varepsilon(x) * \cos_\varepsilon(x) = 1.$$

Кейінгі кезде пантограф типіндегі теңдеулер кең қолданыс табуда. Мысалы бапталатын (пантограф) телефон құрылғысын ұстағыш, ұзартылатын (пантограф) микрофон құрылғысы және т.б.



Сурет 2. Бапталатын (пантограф) телефон құрылғысын ұстағыш, ұзартылатын (пантограф) микрофон құрылғысы

Нәтижелер мен талқылау

$[0,1]$ кесіндісінде пантограф типтегі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есеп қарастырамыз,

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 K(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad \varepsilon = \frac{1}{m} < 1, \qquad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d, \qquad (2)$$

(1) теңдеуде $A(t)$ матрицасы мен $f(t)$ вектор-функциясы $[0,1]$ аралығында үзіліссіз, ал $K(t,s)$ өзегі сәйкесінше $[0,1]\times[0,1]$ аралығында үзіліссіз болсын. B, C - n өлшемді квадратты матрица, ал d - n өлшемді вектор.

Қарастырылып отырған есепті шешу үшін профессор Д.Джумабаевтың енгізген параметрлеу әдісі қолданылады [7]. Бастапқыда параметрлеу әдісі қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есептердің шешімін анықтау үшін қолданылған болатын. Кейін параметрлеу әдісі дифференциалдық және интегралдық–дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін әртүрлі шеттік есептерді шешуде қолданылған болатын [8-11].

Берілген есепті шешу үшін параметрлеу әдісін қолданайық, ол үшін қарастырылып отырған $[0,1]$ кесіндісін m аралықтарға бөлейік: $[0,1) = \bigcup_{i=1}^{m} [t_{i-1}, t_i),\ t_0 = 0,\ t_{i+1} = t_i + \frac{1}{m},\ i = \overline{1,m}.$ Осылай бөлуді жүзеге асырғанда $0 \le t < 1$ аралығында жатса, онда $0 \le \varepsilon t < \varepsilon$ аралығында жатады және $h = \frac{1}{m}$.

$x_i(t)$ - $x(t)$ функциясының әрбір $[t_{i-1}, t_i),\ i = \overline{1,m}$ аралығына сығылуы болсын. Онда (1), (2) есебін келесі эквивалент есеппен ауыстыруымызға болады.

$$\frac{dx_i}{dt} = A(t)x_1(\varepsilon t) + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)x_j(s)ds + f(t),\ [t_{i-1}, t_i),\ i = \overline{1,m}, \qquad (3)$$

$$Bx_1(0) + C\lim_{t\to 1} x_m(t) = d, \qquad (4)$$

$$\lim_{t\to t_p-0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p),\ \ p=\overline{1,m-1}. \qquad (5)$$

λ_i арқылы $x_i(t)$ функциясының $t=t_{i-1}, i=\overline{1,m}$ нүктесіндегі мәнін белгілеп алайық, яғни $\lambda_i = x_i(t_{i-1}),\ i=\overline{1,m}$ және $\left[t_{i-1},t_i\right)$ аралығында $u_i(t)=x_i(t)-\lambda_i$ алмастыруын жасайық. Сонда,

$$\frac{du_i}{dt} = A(t)\left[u_1(\varepsilon t)+\lambda_1\right]+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\left[u_j(t)+\lambda_j\right]+f(t),\ i=\overline{1,m}, \qquad (6)$$

$$u_i\left[t_{i-1}\right]=0,\ \ i=\overline{1,m}, \qquad (7)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_m + C\lim_{t\to 1} u_m(t) = d, \qquad (8)$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to t_p-0} u_p(t) = \lambda_{p+1},\ \ p=\overline{1,m-1}. \qquad (9)$$

Сонда (3)–(5) есебін формальді түрде екі есепке бөлеміз, яғни $u_i(t)$ функциясын анықтау үшін (6), (7) панораф типтес интегралдық–дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі мен енгізілген λ_i параметрлерді анықтау үшін (8), (9) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

λ_i параметрінің мәндері белгілі деп есептесек, (6), (7) пантограф типтес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі шешімі келесі интегралдық теңдеулер жүйесімен анықталады:

$$u_i(t) = \int_{t_{i-1}}^{t} A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t} A(\tau)d\tau\cdot\lambda_1 + \int_{t_{i-1}}^{t}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau +$$

$$+\int_{t_{i-1}}^{t}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau\cdot\lambda_j + \int_{t_{i-1}}^{t} f(\tau)d\tau,\ \ t\in\left[t_{i-1},t_i\right),\ i=\overline{1,m}. \qquad (10)$$

Біртендеп жуықтау әдісімен келесі теореманы дәлелдеуге болады. Мұнда $\varepsilon=\frac{1}{m}<1$ болғандықтан және $\left[0,1\right]$ аралығында $\left\|A(\varepsilon t)\right\|\le\left\|A(t)\right\|\le\alpha$ және сығушы оператордың қасиеттері қолданылады. Дәлелдеу өте ауқымды болғандықтан, мұнда келтірілмейді.

Теорема. Егер,

$$\delta_\varepsilon = e^{\alpha\varepsilon}\beta\varepsilon < 1$$

шарты орындалса, онда (6), (7) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешімі жалғыз. Мұнда $\left\|K(t,s)\right\|\le\beta$, α,β - тұрақтылар.

(10) интералдық теңдеулер жүйесінен $\lim_{t\to t_i-0} u_i(t),\ i=\overline{1,m}$ шектерді анықтайық және λ_i енгізілген параметрлерін анықтау үшін (8), (9) шеттік шарттарына қояйық, сонда енгізілген параметрлерге қатысты келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

$$B\lambda_1 + C\lambda_m + C\left(\int\limits_{t_{m-1}}^{1} A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau + \int\limits_{t_{m-1}}^{1} A(\tau)d\tau \cdot \lambda_1 + \int\limits_{t_{m-1}}^{1} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_{m-1}}^{1} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau \cdot \lambda_j + \int\limits_{t_{m-1}}^{1} f(\tau)d\tau \right) = d, \qquad (11)$$

$$\lambda_p + \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau + \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau)d\tau \cdot \lambda_1 + \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau \cdot \lambda_j + \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} f(\tau)d\tau = \lambda_{p+1}, \qquad p = \overline{1, m-1}. \qquad (12)$$

λ_i параметрлеріне қатысты өрнектерді теңдеулер жүйесінің сол жағына, ал қалған өрнектерді теңдеулер жүйесінің оң жағына шығарсақ, онда (11), (12) сызықтық теңдеулер жүйесін келесі түрде жазуға болады.

$$\left(B + C \int\limits_{t_{m-1}}^{1} A(\tau)d\tau \right)\lambda_1 + C \int\limits_{t_{m-1}}^{1} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau \cdot \lambda_j + C\lambda_m =$$

$$= d - C \int\limits_{t_{m-1}}^{1} f(\tau)d\tau - C \int\limits_{t_{m-1}}^{1} A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau - C \int\limits_{t_{m-1}}^{1} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau, \qquad (13)$$

$$\left(I + \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau)d\tau \right) \cdot \lambda_p + \int\limits_{t_{p-1}}^{t_{p-1}} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau \cdot \lambda_j - \lambda_{p+1} = -\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} f(\tau)d\tau - \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau)u_p(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau, \; p = \overline{1, m-1}. \qquad (14)$$

(13), (14) теңдеулер жүйесінде λ_i қатысты матрицаны $Q_\varepsilon(h)$-деп белгілейік, ал оң жағындағы $f(t)$ өрнегіне сәйкес келетін интегралдарды $F_\varepsilon(h)$, ал $u_i(t)$ мүшелері бар интегралдарды $G_\varepsilon(u,h)$ - деп белгілейік, яғни,

$$F_\varepsilon^{\,T}(h) = \left(d - \int\limits_{t_{m-1}}^{1} f(\tau)d\tau, \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\tau)d\tau, ..., \int\limits_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} f(\tau)d\tau \right)$$

$$G_\varepsilon^T(u,h) = \left(G_{\varepsilon,m}(u,h), G_{\varepsilon,1}(u,h), ..., G_{\varepsilon,m-1}(u,h) \right),$$

мұндағы, $G_{\varepsilon,i}(u,h) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} A(\tau)u_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau, \; i = \overline{1, m}$.

Сонда енгізілген λ_i параметрлеріне қатысты (13), (14) сызықтық теңдеулер жүйесін келесі түрде жазуға болады:

$$Q_\varepsilon(h)\lambda = -F_\varepsilon(h) - G_\varepsilon(u,h). \qquad (15)$$

Сонымен, $\left(\lambda, u[t]\right)$ мәндері (10), (15) тұйық жүйесінен келесі алгоритм арқылы анықталады:

1-қадам. $Q_\varepsilon(h)$ матрицасының кері матрицасы бар деп есептеп, $Q_\varepsilon(h)\lambda = -F_\varepsilon(h)$ теңдеулер жүйесінен $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(1)}, ..., \lambda_m^{(1)}\right) \in R^{nm}$ параметрлерінің 1-ші жуықталған мәнін анықтаймыз, яғни $\lambda^{(1)} = -\left[Q_\varepsilon(h)\right]^{-1} F_\varepsilon(h)$.

б) 1–ші жуықталған $\lambda_i^{(1)}$, $i = \overline{1,m}$ мәндерін (6) пантограф тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің оң жағына қоямыз және (7) шартты пайдаланып, арнайы Коши есебінің жуықталған шешімін анықтаймыз: $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), ..., u_m^{(0)}(t)\right)$.

Процесті жалғастыра отырып, k-шы қадамда $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$, $k = 0,1,...$ жұптарының жүйесін анықтаймыз.

Осылайша анықталған $\tilde{\lambda} = \left(\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_m\right) \in R^{nm}$, $\tilde{u}[t] = \left(\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), ..., \tilde{u}_m(t)\right)$ элементтерінен құрылған $\left(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t]\right)$ жұбы (6)-(9) есебінің шешімі болса, онда табылған мәндерді $\tilde{x}(t) = \tilde{u}_r(t) + \tilde{\lambda}_r$, $\tilde{x}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} \tilde{u}_m(t) + \tilde{\lambda}_m$, $r = \overline{1,m}$, $t \in \left[t_{r-1}, t_r\right)$ теңдіктеріне қойып, $\tilde{x}[t]$ (1), (2) есебінің жуықталған шешімін анықтауға болады.

Қорытынды

Бұл жұмыста параметрлеу әдісін қолдана отырып, пантограф типтес интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп зерттелген. Берілген есепке профессор Д.Джумабаевтың параметрлеу әдісі қолданылды. Жаңа айнымалылар енгізу арқылы бастапқы пантограф тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі алынды. Кіші аралықта Коши есебінің жалғыз шешімі болатындығы көрсетілді. Есептің жуық шешімін анықтау алгоритмі ұсынылды. Алынған нәтижелерді пантограф типіндегі дербес туындылы интегралдық–дифференциалдық теңдеулерді шешуде қолдануға болады.

Жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23488086) қаржыландыру аясында орындалған.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Mahler, K. (1940). On a special functional equation. *Journal of the London Mathematical Society*, *1*(2), 115-123. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-15.2.115
2. Fox, L., Mayers, D. F., Ockendon, J. R., & Tayler, A. B. (1971). On a functional differential equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, *8*(3), 271-307. https://doi.org/10.1093/imamat/8.3.271
3. Morris, G. R., Feldstein, A., & Bowen, E. W. (1972). The Phragmén-Lindelöf principle and a class of functional differential equations. In *Ordinary differential equations* (pp. 513-540). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-743650-0.50048-4
4. Bykov Ya.V., Bykova L.Ya., Shevtsov E.I. (1973). Sufficient conditions for the oscillatory nature of solutions of nonlinear differential equations with deviating argument . *Differents. Equations*, *9(9),* 1555–1560.
5. Iserles, A., & Liu, Y. (1997). Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, *208*(2), 404-424. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5322

6. Rodionov, V. I. (2013). Analog of the cauchy function for a generalized equation with several deviations of the argument. *Differential Equations*, *49*, 662-679. https://doi.org/10.1134/S0012266113060025
7. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational mathematics and mathematical Physics*, *29*(1), 34-46. https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-4
8. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational mathematics and mathematical Physics*, *29*(1), 34-46. https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-4
9. Dzhumabaev, D. (2018). Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *41*(4), 1439-1462. https://doi.org/10.1002/mma.4674
10. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021, July). Unique solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution. In *American Institute of Physics Conference Series* (Vol. 2365, No. 1, p. 070012). https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/2021AIPC.2365g0012N/doi:10.1063/5.0057302
11. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021). On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution. *International Journal of Applied Mathematics*, *34*(2), 225. https://doi.org/10.12732/ijam.v34i2.1

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, корреспондент автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	**Усманов Кайрат Идрисович** – доцент, физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz, ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
	Usmanov Kairat Idrisovich – docent, candidate of Physics and Mathematics, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz, ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
	Усманов Кайрат Идрисович – доцент, кандидат физика-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
2	**Мамидова Малика Таирқызы** –магистр, Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: malikamamidova@gmail.com , +7 747 515 0802
	Mamidova Malika Tairovna– master, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, malikamamidova@gmail.com, +7 747 515 0802
	Мамидова Малика Таировна – магистр, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: malikamamidova@gmail.com , +7 747 515 0802

УДК 517.956.4
ГРНТИ 27.31.44
https://doi.org/10.47526/2025-1/2524-0080.19

Абан У.Б.[1] , Турметов Б.Х.[2]
[1]*магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г.Туркестан), e-mail: abanulbolsyn@gmail.com*
[2]*доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г.Туркестан), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

О РАЗРЕШИМОСТИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ
ON THE SOLVABILITY OF DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR A CLASS OF DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS WITH INVOLUTION
ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР АЗҒЫНДАЛҒАН ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР КЛАСЫ ҮШІН ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аннотация. *В данной работе для вырожденных диффузионных уравнения с инволюцией исследуются вопросы разрешимости прямой и обратной задачи по определению правой части. Рассматривается уравнение с дробным производным в смысле Капуто. В эллиптической части рассматриваемого уравнения участвует нелокальный аналог оператора Лапласа с коэффициентом, зависящий от временной переменной.*

При исследовании этих задач по временной переменной получаем одномерное вырожденное уравнение с дробной производной Капуто. Решение этого уравнения выражается через специальной функции типа Килбаса-Сайго. Аналогично, по пространственной переменной получается спектральная задача для нелокального оператора Лапласа с краевым условием Дирихле. В явном виде находим собственные функции и собственные значения этой задачи и показываем полноту системы собственных функций в пространстве L_2.

Используя классический метод Фурье решения рассматриваемых задач ищутся в виде разложения в ряд по собственным функциям. Доказана абсолютная и равномерная сходимость рядов, возможность их почленного дифференцирования по всем переменным и абсолютная и равномерная сходимость дифференцированных рядов. Основные утверждения относительно рассматриваемых задач приведены в виде теорем о существования и единственности.

Ключевые слова: *уравнение субдиффузии, производная Капуто, нелокальный оператор Лапласа, прямая задача, обратная задача, метод Фурье, функция Килбаса-Сайго.*

Abstract. *In this paper, for degenerate diffusion equations with involution, the solvability of the direct and inverse problems for determining the right-hand side is studied. The equation with a fractional derivative in the Caputo sense is considered. The elliptic part of the studied equation involves a nonlocal analogue of the Laplace operator with a coefficient depending on the time variable.*

By studying these problems with respect to the time variable, we obtain a one-dimensional degenerate equation with a fractional Caputo derivative. The solution of this equation is expressed by a special function of the Kilbas-Saigo type. Similarly, for the spatial variable, we obtain a spectral problem for the nonlocal Laplace operator with the Dirichlet boundary condition. We explicitly find the eigenfunctions and eigenvalues of this problem and show the completeness of the system of eigenfunctions in space.

Using the classical Fourier method, solutions to the problems under consideration are sought in the form of expansions in a series of eigenfunctions. The absolute and uniform convergence of the series, the possibility of their differentiation term by term in all variables and the absolute and uniform convergence of the differentiated series are proved. The main statements concerning the problems considered are presented in the form of existence and uniqueness theorems.

Key words: *subdiffusion equation, Caputo derivative, nonlocal Laplace operator, direct problem, inverse problem, Fourier method, Kilbas-Saigo function.*

Аңдатпа. *Бұл жұмыста инволюциясы бар азғындалған диффузия теңдеулері үшін тура және оң жақ бөлігін анықтау кері есептерінің шешілу мәселелері зерттеледі. Капуто мағынасында бөлшек туындысы бар теңдеу қарастырылады. Қарастырылып отырған теңдеудің эллипстік бөлігі уақыт айнымалысына тәуелді коэффициенті бар Лаплас операторының бейлокал аналогын қамтиды.*

Осы есептерді зерттеу барысында уақыт айнымалысына қатысты Капутоның бөлшек туындысы бар бір өлшемді азғындалған теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің шешімі Килбас-Сайго түріндегі арнайы функция арқылы өрнектеледі. Сол сияқты, кеңістіктік айнымалы бойынша бейлокал Лаплас операторы үшін Дирихле шекаралық шарты бар спектрлік есеп алынады. Біз бұл есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндерін айқын түрде табамыз және меншікті функциялар жүйесінің L_2 *кеңістіктегінде толықтығын көрсетеміз.*

Классикалық Фурье әдісін қолдана отырып, қарастырылатын есептердің шешімдері меншікті функциялар арқылы жіктелген қатар түрінде ізделеді. Қатарлардың абсолютті және біркелкі жинақтылығы, олардың барлық айнымалылар бойынша мүшелеп дифференциалдау мүмкіндігі, дифференциалданған қатарлардың абсолютті және біркелкі жинақтылығы дәлелденген. Қарастырылып отырған мәселелерге қатысты негізгі тұжырымдар шешімнің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар түрінде берілген.

***Негізгі сөздер**: субдиффузия теңдеуі, Капуто туындысы, бейлокал Лаплас операторы, тура есеп, кері есеп, Фурье әдісі, Килбас-Сайго функциясы.*

Введение

В современной науке основой большинства моделей, описывающих физические и химические процессы, экономические и социально-биологические явления и многих других, служат дифференциальные уравнения дробного порядка. Подробное сведения об этих моделях можно найти, например, в справочнике по дробному исчислению с приложениями [1] и литературе в них.

Хотя к настоящему времени было опубликовано множество работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка и различным их приложениям, тем не менее, теория дробных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами еще далека от полноты.

В работе А.А.Килбаса и М.Сайго [2] было изучено дифференциальное уравнение дробного порядка следующего вида,

$$ {}_{RL}D^{\alpha}u(t)+\lambda t^{\beta}u(t)=g(t),0<t\,,$$

где, $0<\alpha,\beta>-\{\alpha\},{}_{RL}D^{\alpha}$ - производная порядка α в смысле Римана-Лиувилля. Решение этого уравнения выписана в явном виде с помощью специальной функции, зависящей от трех параметров (функция Килбаса-Сайго).

$$E_{\alpha,m,l}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{m=0}^{k-1}\frac{\Gamma\left[\alpha(mj+l)+1\right]}{\Gamma\left[\alpha(mj+l+1)+1\right]}\right)z^{k}\,.$$

Более общее уравнения дробного поряка с переменными коэффициентами изучены в работах [3-5]. В частности, в работе [5] используя метод преобразования Лапласа, построены явные решения дробного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра с переменными коэффициентами.

Цикл работ D.Suragan и соавторов [6-8] были посвящены к построению явного вида решений общего дифференциального уравнения дробного порядка с переменными коэффициентами. В этих работах рассматривались уравнения с производными Римана-Лиувилля, Капуто и Хильфера. В качестве приложения полученных результатов в работе [8] были изучены начально-краевые задачи для уравнений в частных производных дробного порядка с переменными коэффициентами.

Начально-краевые задачи для вырожденных диффузионных уравнений исследовались в работах многочисленных авторов. Так в работе M.Kirane и соавторов [9] в случае $n=1$ в прямоугольной области для дробного аналога вырожденного параболического уравнения с инволюцией изучены обратные задачи по определению правой части, зависящей от пространственной переменной. Методом Фурье найдены классические решения задач с краевыми условиями Дирихле и Неймана.

В дальнейшем, в работах [10-12] аналогичные исследования проводились для вырожденных уравнений в конечных и бесконечных областях. При этом рассматривались уравнения с линейными и полилинейными операторами. В частности, в работе [12] в

линейных и нелинейных случаях получены оптимальные оценки скоростей затухания решений.

В работе [13] рассмотрена задача моделирования процесса термодиффузии в замкнутом металлическом проводе, обернутом тонким листом изоляционного материала. Моделирование этого процесса приводит к рассмотрению обратной задачи для одномерного вырожденного дробного эволюционного уравнения с инволюцией. Применением метода разделения переменных доказаны теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемой задачи.

Далее, в работе [14] исследованы вырожденные дробно-эллиптические уравнения типа Трикоми–Геллерстедта–Келдыша. Доказаны теоремы о корректности дробно-эллиптических краевых задач для общих положительных операторов с дискретными спектром.

Отметим, также что обратные задачи для одномерных параболических уравнений с инволюцией с комплекснозначнымы переменными коэффициентами изучены в работах [15,16]. Установлены существование и единственность решения изучаемых задач. А в работах [17,18] обратные задачи изучены для уравнений диффузии с общим эллиптическим оператором. Кроме того, свойства операторов с инволютивными преобразованиями изучены в работах [19,20].

В настоящей работе рассматривается вырожденное уравнение диффузии с нелокальным оператором Лапласа. Рассматриваемое нами уравнение входят в класс дифференциальных уравнений с инволюцией. Ранее такие задачи для уравнений с инволюцией в основном исследовались в одномерном или двумерном случае. В отличие от этих работ авторов, в данной работе задачи изучаются в n-мерном случае.

Переходим к постановке задачи. Пусть $Q = \Pi \times (0,T)$, где $\Pi = \left\{ x \in R^n : 0 < x_j < p_j,\ j = 1,\ldots,n \right\}$ - параллелепипед, $p_j > 0$ и $T > 0$. Рассмотрим отображения $S_j : R^n \to R^n$, $1 \le j \le n$ вида

$$S_j x = \left(x_1,...,x_{j-1}, p_j - x_j, x_{j+1},...,x_n \right).$$

Если рассмотрим всевозможные произведение отображений S_j, $1 \le j \le n$, то общее количество таких отображений с учетом отображения $S_0 x = x$ будет 2^n. Для нумерации этих отображений мы возпользуемся записью целого числа в двоичной системе исчисления. Если i индекс, то кроме обычного обозначения мы будем также использовать запись этого числа в двоичной системе исчисления $i = \left(i_n ... i_1 \right)_2$, где $i_k = 0$ или $i_k = 1$. Тогда мы можем рассматривать отображения вида $S_l^{i_l} ... S_1^{i_1} x$.

Пусть $a_0, a_1, ..., a_{2^l - 1}$ - некоторый набор действительных чисел. Введем оператор

$$L_x v(x) = \sum_{i=0}^{2^l - 1} a_i \Delta v\left(S_l^{i_l} ... S_1^{i_1} x \right).$$

Пусть $0 < \alpha \le 1, \beta > -\alpha, D_t^\alpha$ оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле Капуто [21], а именно $D_t^\alpha = I^{1-\alpha} \dfrac{d}{dt}$, где $I^0 u(t) = u(t)$ и

$$I^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(\tau) d\tau .$$

В дальнейшем функция $g(t)$ будет означать квазиполином вида $g(t)=\sum_{j=1}^{p} g_j t^{m_j}$, $m_j > 0, g_j$ заданные постоянные.

Цель исследования: Целью настоящей работы является исследования корректности и доказательства теорем о существования и единственности решений следующих задач.

Задача 1 (Прямая задача). Необходимо найти функцию $u(t,x) \in C\left(\bar{Q}\right)$, $D_t^{\beta} u(t,x), L_x u(t,x) \in C\left(Q\right)$, удовлетворяющие условиям,

$$D_t^{\alpha} u(t,x) - t^{\beta} L_x u(t,x) = F(t,x) \equiv f(x)g(t), (t,x) \in Q, \qquad (1)$$

$$u(t,x) = 0, [0 \le t \le T], x \in \partial\Pi. \qquad (2)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), x \in \bar{\Pi}, \qquad (3)$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданные функции.

Задача (Обратная задача). Необходимо найти пару функции $u(t,x)$ и $f(x)$ обладающие гладкостью, $u(t,x) \in C\left(\bar{Q}\right), D_t^{\alpha} u(t,x), L_x u(t,x) \in C\left(Q\right)$, $f(x) \in C\left(\bar{\Pi}\right)$, удовлетворяющие условиям (1)-(3) и дополнительному условию

$$u(T,x) = \psi(x), x \in \bar{\Pi}, \qquad (4)$$

где, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные функции.

Методы исследования задачи

Сначала построим решение одномерного дифференциального уравнения дробного порядка Пусть $\lambda > 0, 0 < \alpha \le 1, \beta > -\alpha$ -заданные числа. Рассмотрим следующую задачу.

Задача OD1. Необходимо определить функцию $u(t)$ из класса $C[0,+\Gamma)$ для которой $D^{\alpha} u(t) \in C(0,+\infty)$ и удовлетворяющую условиям,

$$D^{\alpha} u(t) + \lambda t^{\beta} u(t) = fg(t), 0 < t < T, \qquad (5)$$

$$u(0) = \varphi, \qquad (6)$$

где, f, j - заданные числа, и $g(t)=\sum_{j=1}^{p} g_j t^{m_j}$ некоторый квазиполином, $m_j > 0, g_j$ заданные постоянные.

Задача OD2. Необходимо определить функцию $u(t)$ из класса $C[0,T]$, для которой $D^{\alpha} u(t) \in C(0,T)$ и постоянную f удовлетворяющую условиям (5),(6) и дополнительному условию

$$u(T) = \psi, \qquad (7)$$

где, φ,ψ - заданные числа, и $g(t)=\sum_{j=1}^{p} g_j t^{m_j}$ некоторый квазиполином, $m_j>0, g_j$ заданные постоянные.

Решение задачи **OD1** построена в работах [22] и оно имеет вид

$$u(t)=\varphi E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right)+f\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right). \qquad (8)$$

Введем обозначение

$$G_p(t)=\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right).$$

Тогда формулу (8) можно переписать в виде

$$u(t)=\varphi E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right)+fG_p(t). \qquad (9)$$

Далее, считая f неизвестной и подставляя функцию (9) в условие (7), имеем

$$\psi=u(T)=\varphi E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda T^{\alpha+\beta}\right)+fG_p(T).$$

Отсюда при выполнении условии $G_p(T)\neq 0$ решение задачи OD2 имеют вид

$$f=\frac{\psi-\varphi\cdot E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda T^{\alpha+\beta}\right)}{G_p(T)}$$

и

$$u(t)=\frac{G_p(t)}{G_p(T)}\psi+\left[E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right)-\frac{G_p(t)}{G_p(T)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda T^{\alpha+\beta}\right)\right]\varphi.$$

Далее, приведем известные утверждения о собственных функциях и собственных значениях задачи Дирихле для нелокального оператора Лапласа.

Рассмотрим следующую граничную задачу.

Задача S. Найти функцию $v(x)\neq 0$ из класса $v(x)\in C\left(\overline{\Pi}\right)\cap C^2\left(\Pi\right)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_x v(x)+\lambda v(x)=0,\ x\in\Pi,$$

и граничному условию

$$v(x)|_{\partial\Pi}=0,$$

где, $\lambda \in \mathrm{R}$.

Отметим, что Задача S изучена в работе [23]. Кроме того, спектральные вопросы нелокального аналога бигармонического оператора и их приложения к вопросам разрешимости обратных задач для параболического уравнения четвертого порядка изучены в работе [24].

Обозначим

$$\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n}.$$

В работе [23] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть коэффициенты $a_i, i = 0,1,\ldots,2^n-1$ такие что выполняются условия $\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_n} \neq 0$. Тогда собственные функции задачи S имеют вид

$$v_{k_1k_2\ldots k_n}(x) = C\prod_{i=1}^{n} \sin\frac{k_i\pi x_i}{p_i}, C = 2^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p_i}}.$$

а соответствующие им собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{k_1k_2\ldots k_n} = \varepsilon_{k_1k_2\ldots k_n}\mu_{k_1k_2\ldots k_n},$$

где $\mu_{k_1k_2\ldots k_n} = \pi^2\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{k_i^2}{p_i^2}\right)$. Система функций $\left\{v_{k_1k_2\ldots k_n}(x)\right\}_{k_j=1}^{\infty}, j = 1,2,\ldots,n$ является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(\Pi)$.

Замечание 1. Если при всех $k_j = 1,2,\ldots, j = 1,2,\ldots,n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1,k_2,\ldots,k_n} > 0$, то собственные значения задачи S являются положительными.

Замечание 2. Если при всех $k_j = 1,2,\ldots, j = 1,2,\ldots,n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1,k_2,\ldots,k_n} > 0$, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что справедливы оценки

$$C_1\mu_{k_1k_2\ldots k_n} \le \lambda_{k_1k_2\ldots k_n} \le C_2\mu_{k_1k_2\ldots k_n}. \qquad (10)$$

Теперь исследуем сходимость рядов Фурье по системе $v_{k_1\ldots k_n}(x)$. Эти утверждения в основном известны (см. например, [24]), но для полноты изложения мы их приводим с доказательством.

Пусть

$$h(x) = \sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty} h_{k_1\ldots k_n}v_{k_1\ldots k_n}(x),$$

ряд Фурье функции $h(x)$ по системе $v_{k_1\ldots k_n}(x)$, где

$$h_{k_1\ldots k_n} = \left(h, v_{k_1\ldots k_n}\right) \equiv \int_0^{p_1}\ldots\int_0^{p_n} h(x_1,x_2,\ldots,x_n)v_{k_1\ldots k_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1..dx_n. \qquad (11)$$

В дальнейшем всюду символ C будет означать произвольную постоянную, значение которой нас не интересует.

Лемма 1. Пусть $h(x)\in C\left(\overline{\Pi}\right)$, функции $\dfrac{\partial^j h(x)}{\partial x_1...\partial x_j}, 1\le j\le n$ кусочно-непрерывны в $\overline{\Pi}$ и выполняется условие

$$h(x)\big|_{\partial\Pi}=0. \qquad (12)$$

Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1...k_n}\right|$ сходится.

Доказательство. Если $h(x)\in C\left(\overline{\Pi}\right)$ и $\dfrac{\partial^j h(x)}{\partial x_1...\partial x_j}, 1\le j\le n$ кусочно-непрерывны, то интегрируя по частям по переменной x_1 в интеграле (11) с учетом равенства (12) получаем

$$h_{k_1...k_n}=\frac{1}{k_1}h^{1,0,..,0}_{k_1...k_n},$$

где,

$$h^{1,0,..,0}_{k_1...k_n}=C\int_0^{p_1}...\int_0^{p_n}\frac{\partial h(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1}v^{1,0,..,0}_{k_1...k_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1..dx_n,$$

$$v^{1,0,..,0}_{k_1...k_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\cos\frac{k_1\pi x_1}{p_1}\cdot\prod_{j=2}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}.$$

Продолжая этот процесс по всем $j\in\{2,3,...,n\}$, имеем

$$h_{k_1...k_n}=\frac{1}{k_1k_2...k_n}h^{1,1,..,1}_{k_1...k_n},$$

где,

$$h^{1,1,..,1}_{k_1...k_n}=C\int_0^{p_1}...\int_0^{p_n}\frac{\partial^n h(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_n}v^{1,1,..,1}_{k_1...k_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1..dx_n,$$

$$v^{1,1,..,1}_{k_1...k_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{k_j\pi x_j}{p_j}.$$

Далее, используя неравенство Коши-Буняковского получаем

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1...k_n}\right|=\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k_1k_2...k_n}h^{1,1,..,1}_{k_1...k_n}\right|\le\sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2...k_m^2}}\sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|h^{1,1,..,1}_{k_1...k_n}\right|^2}.$$

Так как система $\left\{v_{k_1\ldots k_n}^{1,1,\ldots,1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right\}$ ортогонально в пространстве $L_2(\Pi)$ и $\frac{\partial^n h(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1\ldots\partial x_n}\in L_2(\Pi)$, то в силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1\ldots k_n}^{1,1,\ldots,1}\right|^2$ сходится. Кроме того,

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2\ldots k_m^2}=\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{1}{k_2^2}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_m^2}<\infty.$$

Отсюда вытекает доказательство леммы.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть функция $h(x)$ принадлежит классу $C^2(\overline{\Pi})$ и имеет кусочно-непрерывные в $\overline{\Pi}$ частные производные $\frac{\partial^{n+2}h(x)}{\partial x_1\ldots\partial x_j^3\ldots\partial x_n}$, $j\in\{1,2,\ldots,n\}$. Тогда если функции $h(x)$ и $\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_j^2}$ удовлетворяют условиям (12), то числовой ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_j=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}k_j^2\left|h_{k_1\ldots k_j\ldots k_n}\right|$ сходится.

Доказательство. Если функции $h(x)$ и $\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_j^2}$ удовлетворяют условиям (7), то интегрируя два раза по переменному x_j интеграл $h_{k_1\ldots k_n}^{1,1,\ldots,1}$ получаем

$$h_{k_1\ldots k_n}=\frac{1}{k_1k_2\ldots k_j^5\ldots k_n}h_{k_1k_2\ldots k_j\ldots k_n}^{1,1,\ldots,5,\ldots,1}$$

где,

$$h_{k_1k_2\ldots k_j\ldots k_n}^{1,1,\ldots,3,\ldots,1}=C\int_0^{p_1}\ldots\int_0^{p_n}\frac{\partial^{n+2}h(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1\ldots\partial x_j^3\ldots\partial x_n}v_{k_1k_2\ldots k_j\ldots k_n}^{1,1,\ldots,3,\ldots,1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n,$$

$$v_{k_1k_2\ldots k_j\ldots k_n}^{1,1,\ldots,5,\ldots,1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{k_j\pi x_j}{p_j}.$$

Далее, используя неравенство Коши-Буняковского для $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1\ldots k_n}\right|$ получаем

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_j=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}k_j^2\left|h_{k_1\ldots k_n}\right|=\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{k_j^2}{k_1k_2\ldots k_j^3\ldots k_n}\left|h_{k_1k_2\ldots k_j\ldots k_n}^{1,1,\ldots,3,\ldots,1}\right|\le\sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2\ldots k_j^2\ldots k_m^2}}\sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1k_2\ldots k_j\ldots k_n}^{1,1,\ldots,3,\ldots,1}\right|^2}.$$

Так как система $\left\{v_{k_1k_2\ldots k_j\ldots k_n}^{1,1,\ldots,3,\ldots,1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right\}$ ортогонально в пространстве $L_2(\Pi)$ и $\frac{\partial^{n+3}h(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1\ldots\partial x_j^3\ldots\partial x_n}\in L_2(\Pi)$, то в силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_j=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1k_2\ldots k_j\ldots k_n}^{1,1,\ldots,3,\ldots,1}\right|^2$ сходится. Отсюда вытекает доказательство леммы.

Следствие 1. Пусть функция $h(x)$ принадлежит классу $C^2\left(\overline{\Pi}\right)$ и для всех $j \in \{1,2,...,n\}$ имеет кусочно-непрерывные в $\overline{\Pi}$ частные производные $\frac{\partial^{n+2}h(x)}{\partial x_1 ... \partial x_j^3 ... \partial x_n}$. Тогда, если функции $h(x)$ и $\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_j^2}$ удовлетворяют условиям (12), то числовой ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_j=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_j...k_n}\left|h_{k_1...k_j...k_n}\right|$ сходится.

Доказательство этого утверждения следует из представления собственных значений $\lambda_{k_1k_2...k_n} = \varepsilon_{k_1k_2...k_n}\pi^2\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j^2}{p_j^2}\right)$ и утверждения Леммы 2.

Анализ и основные результаты

Далее, докажем теорему о существования и единственности решения задачи 1.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть m_j i $0, g_j$ - постоянные, $g(t) = \sum_{j=1}^{p} g_j t^{m_j}$ квазиполином, функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2. Тогда решение задачи 1 существует, единственно и имеет вид

$$u(t,x) = \sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\left[\varphi_{k_1...k_n}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+f_{k_1...k_n}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)\right)\right]v_{k_1...k_n}(x), \qquad (13)$$

где, $\varphi_{k_1...k_n}$ и $f_{k_1...k_n}$ коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ соответственно.

Доказательство. Сначала исследуем существование решение задачи 1. Решение будем искать в виде ряда

$$u(t,x) = \sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}u_{k_1...k_n}(t)v_{k_1...k_n}(x), \qquad (14)$$

где, $u_{k_1...k_n}(t)$ неизвестные коэффициенты.

Подставляя функцию $u(t,x)$ из (14) в уравнение (1) для коэффициентов $u_{k_1...k_n}(t)$ получаем следующую задачу Коши

$$D^{\alpha}u_{k_1...k_n}(t) + \lambda_{k_1...k_n}t^{\beta}u_{k_1...k_n}(t) = f_{k_1...k_n}g(t), t > 0, \qquad (15)$$

$$u_{k_1...k_n}(0) = \varphi_{k_1...k_n}. \qquad (16)$$

На основании формулы (10) решение задачи (15)-(16) имеет вид

$$u_{k_1\dots k_n}(t)=\varphi_{k_1\dots k_n}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\dots k_n}t^{\alpha+\beta}\right)+f_{k_1\dots k_n}\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\dots k_n}t^{\alpha+\beta}\right).$$

Следовательно, ряд (13) является формальным решением задачи 1. Покажем теперь, что этот ряд и ряды, полученные после применения к нему операторов D^{α} и L_x, сходятся.

В работе [25] для функции $E_{\alpha,m,l}(z)$ доказано следующее свойство:

$$\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\alpha(l-m)\right]}{\Gamma\left[1+\alpha(l-m+1)\right]}t\right)^{-1}\le E_{\alpha,m,l}\left(-t\right)\le\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\alpha l\right]}{\Gamma\left[1+\alpha(l+1)\right]}t\right)^{-1} \tag{17}$$

где, $\alpha\in(0,1),m>0,l>m-\frac{1}{\alpha},t\ge 0$.

Используя неравенство (17) для коэффициентов $u_{k_1\dots k_n}(t)$ имеем

$$\left|u_{k_1\dots k_n}(t)\right|\le\left|\varphi_{\varphi_{k_1\dots k_n}}\right|\left(1+\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}\lambda_{k_1\dots k_n}t^{\alpha+\beta}\right)^{-1}+\left|f_{k_1\dots k_n}\right|\sum_{j=1}^{p}C_j\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\beta+\mu_j\right]}{\Gamma\left[1+\beta+\mu_j+1)\right]}\lambda_{k_1\dots k_n}t^{\alpha+\beta}\right)^{-1}\le$$

$$\le C\left(\left|\varphi_{\varphi_{k_1\dots k_n}}\right|+\left|f_{k_1\dots k_n}\right|\right).$$

Тогда для ряда (13) с учетом ограниченности функции $\left|v_{k_1\dots k_n}(x)\right|$ для всех $(t,x)\in\bar{Q}$ получаем оценку

$$\left|u(t,x)\right|\le C\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left[\left|\varphi_{k_1\dots k_n}\right|+\left|f_{k_1\dots k_n}\right|\right]. \tag{18}$$

Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 1, то ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{k_1\dots k_n}\right|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|f_{k_1\dots k_n}\right|$ сходятся. Тогда из оценки (18) следует, что ряд (13) сходится равномерно в замкнутой области $\bar{Q}$ и поэтому $u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$.

Далее, так как $D^{\alpha}u_{k_1\dots k_n}(t)=f_{k_1\dots k_n}g(t)-\lambda_{k_1\dots k_n}t^{\beta}u_{k_1\dots k_n}(t)$, то

$$D^{\alpha}u(t,x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}f_{k_1\dots k_n}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}\right)v_{k_1\dots k_n}(x)-\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\dots k_n}t^{\beta}u_{k_1\dots k_n}(t).$$

Отсюда,

$$\left|D^{\alpha}u(t,x)\right|\le C\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|f_{k_1\dots k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\dots k_n}\left|u_{k_1\dots k_n}(t)\right|\le$$

$$\leq C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|f_{k_1...k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|\varphi_{k_1...k_n}\right|.$$

Аналогично, применяя к функции (13) оператор L_x имеем

$$L_x u(t,x)=-\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left[\varphi_{k_1...k_n}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+f_{k_1...k_n}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)\right)\right]v_{k_1...k_n}(x).$$

Отсюда,

$$\left|L_x u(t,x)\right|\leq C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|f_{k_1...k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|\varphi_{k_1...k_n}\right|.$$

Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2, то ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|\varphi_{k_1...k_n}\right|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|f_{k_1...k_n}\right|$ сходятся. Тогда ряды представляющие функции $D^{\alpha}u(t,x)$ и $L_x u(t,x)$ сходятся равномерно в замкнутой области $\bar{Q}$ и поэтому $D^{\alpha}u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$ и $L_x u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$.

Далее, единственность решения задачи докажем стандартным методом, основанным на полноте систем собственных функций $v_{k_1k_2...k_n}(x)$ в $L_2\left(\Pi\right)$. Действительно, пусть $u(t,x)$ - решение однородной задачи 1. Рассмотрим функции

$$u_{k_1k_2...k_n}(t)=\int_{\Pi}u(t,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx.$$

Тогда,

$$D^{\alpha}u_{k_1k_2...k_n}(t)=\int_{\Pi}D^{\alpha}u(t,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx=\int_{\Pi}L_x u(t,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx=$$

$$-\lambda_{k_1k_2...k_n}\int_{\Pi}u(t,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx=-\lambda_{k_1k_2...k_n}u_{k_1k_2...k_n}(t).$$

Кроме того,

$$u_{k_1k_2...k_n}(0)=\int_{\Pi}u(0,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx=0.$$

Таким образом, для функции $u_{k_1k_2...k_n}(t)$ получаем однородную задачу (15)-(16) и поэтому $u_{k_1k_2...k_n}(t)\equiv 0$. Тогда функция $u(t,x)$ -решение однородной задачи 1 ортогональны

всем элементам системы $v_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$. В силу полноты этой системы $u(t,x)\equiv 0$ в $\overline{Q}$. Теорема доказана.

Основным результатом относительно задачи 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть m_j і $0, g_j > 0$ - постоянные, $g(t)=\overset{p}{\underset{j=1}{\text{e}}} g_j t^{m_j}$ квазиполином, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2. Тогда решение задачи 2 существует, единственно и имеют вид

$$f(x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{G_p(T)}\left[\psi_{k_1\ldots k_n}-\varphi_{k_1\ldots k_n}\cdot E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\right]v_{k_1\ldots k_n}(x), \tag{19}$$

$$u(t,x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{G_p(t)}{G_p(T)}\psi_{k_1\ldots k_n}v_{k_1\ldots k_n}(x)+$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left[E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\right)-\frac{G_p(t)}{G_p(T)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\right]\varphi_{k_1\ldots k_n}v_{k_1\ldots k_n}(x), \tag{20}$$

где, $\varphi_{k_1\ldots k_n}$ и $\psi_{k_1\ldots k_n}$ коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно, а функция $G_p(t)$ определяется равенством

$$G_p(t)=\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\right).$$

Доказательство. Решение задачи 2 также будем искать в виде ряда (14). Тогда для неизвестных коэффициентов $u_{k_1k_2\ldots k_n}(t)$ получаем задачу с условиями (15), (16) и дополнительным условием

$$u_{k_1\ldots k_n}(T)=\varphi_{k_1\ldots k_n}.$$

В этом случае считая функцию $f(x)$ неизвестной и используя условию переопределения (4), на основе формул (9) и (10) получаем

$$f_{k_1\ldots k_n}=\frac{\psi_{k_1\ldots k_n}-\varphi_{k_1\ldots k_n}\cdot E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)}{G_p(T)}$$

и

$$u_{k_1\ldots k_n}(t)=\frac{G_p(t)}{G_p(T)}\psi_{k_1\ldots k_n}+\left[E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\right)-\frac{G_p(t)}{G_p(T)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\right]\varphi_{k_1\ldots k_n}.$$

Таким образом, ряды (19) и (20) являются формальным решением задачи 2. Исследуем гладкость этих функций. Сначала оценим ряд (19). Так как коэффициенты g_j положительны, то из нижнего неравенства (17) для функции $G_p(T)$ получаем

$$G_p(T)=\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}T^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)=\sum_{j=1}^{p}C_jE_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\geq$$

$$\geq\sum_{j=1}^{p}C_j\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\alpha\left(1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}-1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]}{\Gamma\left[1+\alpha\left(1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}-1-\frac{\beta}{\alpha}+1\right)\right]}\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)^{-1}=$$

$$\geq\sum_{j=1}^{p}C_j\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\mu_j\right]}{\Gamma\left[1+\mu_j+\alpha\right]}\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)^{-1}=\sum_{j=1}^{p}C_j\left(\frac{\Gamma\left[1+\mu_j+\alpha\right]}{\Gamma\left[1+\mu_j+\alpha\right]+\Gamma\left[1+\mu_j\right]\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}}\right).$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{G_p(T)}\leq C\lambda_{k_1\ldots k_n}.$$

Из этой оценки для ряда (19) получаем

$$\left|f(x)\right|\leq\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{G_p(T)}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|+\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{G_p(T)}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\leq$$

$$\leq C\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\ldots k_n}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|.$$

Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2, то числовые ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\ldots k_n}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|$ сходятся. Тогда ряд (19) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{\Pi}$ и поэтому $f(x)\in C\left(\overline{\Pi}\right)$. Далее, из верхнего неравенства (17) следуют ограниченность функции $\frac{G_p(t)}{G_p(T)}$, $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\right)$ и $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)$. Тогда для ряда (20) получаем

$$\left|u(t,x)\right|\leq C\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|.$$

Отсюда, как и в случае ряда (19) получаем равномерную сходимость ряда (20) в замкнутой области $\overline{Q}$ и поэтому $u(t,x)\in C\left(\overline{Q}\right)$.

Функция $u_{k_1\ldots k_n}(t)$ удовлетворяет уравнению (15), т.е. имеет место равенство

$$D^{\alpha}u_{k_1\ldots k_n}(t)=\frac{\psi_{k_1\ldots k_n}-\varphi_{k_1\ldots k_n}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)}{G_p(T)}G_p(t)-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}u_{k_1\ldots k_n}(t).$$

Из этого равенства учитывая ограниченность функций $\frac{G_p(t)}{G_p(T)}$, $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\right)$ и $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)$ получаем

$$\left|D^{\alpha}u_{k_1\ldots k_n}(t)\right| \le \frac{G_p(t)}{G_p(T)}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right| + \left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right| E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right) + \lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\left|u_{k_1\ldots k_n}(t)\right| \le$$

$$\le C\left(\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right| + \left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|\right) + C\lambda_{k_1\ldots k_n}\left(\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right| + \left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|\right).$$

Следовательно, ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\ldots k_n}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\ldots k_n}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|$ являются мажорантными по отношению к ряду представляющую функцию $D^{\alpha}u(t,x)$. Поэтому если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2, то этот ряд сходится и $D^{\alpha}u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$. Аналогично доказывается соотношение $L_x u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$. Остается доказать единственность решения задачи. Пусть существуют две пары $\{u_1(t,x), f_1(x)\}$ и $\{u_2(t,x), f_2(x)\}$ удовлетворяющие условиям задачи 2. Тогда пара функции $u(t,x)=u_1(t,x)-u_2(t,x), f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным условия (2) и (3). Если рассмотрим функцию

$$u_{k_1k_2\ldots k_n}(t)=\int_{\Pi}u(t,x)v_{k_1k_2\ldots k_n}(x)dx,$$

то для нее получаем задачу

$$D^{\alpha}u_{k_1\ldots k_n}(t)+\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\beta}u_{k_1\ldots k_n}(t)=f_{k_1\ldots k_n}g(t), t>0, \qquad (21)$$

$$u_{k_1\ldots k_n}(0)=0, u_{k_1\ldots k_n}(T)=0. \qquad (22)$$

Решение задачи (21)-(22) имеет вид

$$u_{k_1\ldots k_n}(t)=f_{k_1\ldots k_n}G_p(t)\equiv f_{k_1\ldots k_n}\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\right).$$

Так как $G_p(t)\neq 0$, то отсюда получаем $f_{k_1\ldots k_n}\equiv 0$ и $u_{k_1\ldots k_n}(t)=0$. Следовательно, функции $u(t,x)$ и $f(x)$ ортогональны всем элементам системы $v_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$. В силу полноты этой системы $f(x)\equiv 0, x\in\bar{\Pi}$ и $u(t,x)\equiv 0,(t,x)\in\bar{Q}$. Теорема доказана.

Заключение

В данной работе в прямоугольной области исследованы вопросы разрешимости некоторых прямых и обратных задач для вырожденного уравнения диффузии с инволютивными преобразованными аргументами. Ранее подобные задачи для уравнений с инволюцией в основном рассматривались в одномерном или двумерном случае, а в нашем случае данную задачу мы исследовали в общем в n-мерном случае. Рассматриваемые задачи

решены применением метода Фурье. При разделении переменных возникает спектральная задача для нелокального аналога оператора Лапласа. Используя известные утверждения относительно задачи Дирихле для классического оператора Лапласа нам удалось найти собственные функции и собственные значения этой спектральной задачи. Кроме того, мы доказали полноту системы собственных функций вспомогательной спектральной задачи. Это утверждение позволило нам построит решению основных задач в виде рядов по системе собственных функций.

В дальнейшем планируется продолжить изучение обратных задач для вырожденных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP19677926).

Список использованной литературы

1. Tarasov, V. E. (Ed.). (2019). *Handbook of fractional calculus with applications* (Vol. 5). Berlin, Germany: de Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110571707
2. Kilbas, A. A., & Saigo, M. (1997). Closed-form solution of a class of linear differential equations of fractional order. *Differential Equations*,*33*(2), 194-204. http://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1609900
3. Bonilla, B., Rivero, M., & Trujillo, J. J. (2007). On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, *187*(1), 68-78. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.08.104
4. Tomovski, Z., Hilfer, R., & Srivastava, H. M. (2010). Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag–Leffler type functions. *Integral transforms and special functions*, *21*(11), 797-814. https://doi.org/10.1080/10652461003675737
5. Tomovski, Z., & Garra, R. (2014). Analytic solutions of fractional integro-differential equations of Volterra type with variable coefficients. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, *17*, 38-60. https://doi.org/10.2478/s13540-014-0154-8
6. Fernandez, A., Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2022). On linear fractional differential equations with variable coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, *432*, 892-897. https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127370
7. Fernandez, A., Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2023). A new representation for the solutions of fractional differential equations with variable coefficients. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *20*(1), 1--20. https://doi.org/10.1007/s00009-022-02228-71660-5446/23/010001-20
8. Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2021). Hilfer-type fractional differential equations with variable coefficients. *Chaos, Solitons & Fractals*, *150*, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111146
9. Kirane, M., Samet, B., & Torebek, B. T. (2017). Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data. *Electronic Journal of Differential Equations*, 257,1-13.
10. Smadiyeva, A. G. (2023). Degenerate time-fractional diffusion equation with initial and initial-boundary conditions. *Georgian Mathematical Journal*, *30*(3), 435-443. https://doi.org/10.1515/gmj-2022-2217
11. Smadiyeva, A. G. (2022). Initial-boundary value problem for the time-fractional degenerate diffusion equation. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, *113*(1), 32–41. https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v113.i1.04
12. Smadiyeva, A. G., & Torebek, B. T. (2023). Decay estimates for the time-fractional evolution equations with time-dependent coefficients. *Proceedings of the Royal Society A*, *479* (2276), 1-21. https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0103.
13. Kirane, M., Sadybekov, M. A., & Sarsenbi, A. A. (2019). On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *42*(6), 2043-2052.
14. Ruzhansky, M., Torebek, B. T., & Turmetov, B. (2022). Well-posedness of Tricomi–Gellerstedt–Keldysh-type fractional elliptic problems. *Journal of Integral Equations and Applications*, *34*(3), 373-387. https://doi.org/10.1216/jie.2022.34.373
15. Mussirepova, E., Sarsenbi, A. A., & Sarsenbi, A. M. (2022). Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *45*(17), 11262-11271. https://doi.org/10.1002/mma.8448
16. Mussirepova, E., Sarsenbi, A., & Sarsenbi, A. (2022). The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient. Boundary Value Problems, 2022(1), 99. https://doi.org/10.1186/s13661-022-01675-1
17. Ashurov, R. R., & Mukhiddinova, A. T. (2020). Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation. *Differential equations*,*56*, 1550-1563. https://doi.org/10.1134/S0012266120120046

18. Ashurov, R. R., & Fayziev, Y. E. (2022). On the nonlocal problems in time for subdiffusion equations with the Riemann-Liouville derivatives. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, *106*(2), 18-37. https://doi.org/10.31489/2022M2/18-37
19. Karachik, V. V., & Kh, T. B. (2020). Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation. *Novi sad journal of mathematics*, *50*(1), 67-88. https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942
20. Karachik, V., & Turmetov, B. (2017). Solvability of some Neumann-type boundary value problems for biharmonic equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 218, 1--17. http://ejde.math.unt.edu
21. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006).*Theory and applications of fractional differential equations* 204, Elsevier.
22. Turmetov, B. (2018). On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, *2018* (25), 1-14. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.25
23. Turmetov, B., & Karachik, V. (2023). On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with involution in a parallelepiped. In *American Institute of Physics Conference Series* , 2879:1, 1-4. https://doi.org/10.1063/5.0175246
24. Turmetov, B., & Karachik, V. (2024). On solvability of some inverse problems for a nonlocal fourth-order parabolic equation with multiple involution. *AIMS Mathematics*, *9*(3), 6832-6849. https://doi.org/10.3934/math.2024333
25. Boudabsa, L., & Simon, T. (2021). Some properties of the Kilbas-Saigo function.*Mathematics*, *9*(3), 217. https://doi.org/10.3390/math9030217

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, корреспондент автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	**Абан Улболсын** – магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: abanulbolsyn@gmail.com
	Aban Ulbolsyn – master's student , Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: abanulbolsyn@gmail.com
	Абан Улболсын – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: abanulbolsyn@gmail.com
2	**Турметов Батырхан** – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
	Turmetov Batirkhan – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
	Турметов Батырхан – доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

ФИЗИКА

ӘДК 667,61
МРНТИ 55.22.31
https://doi.org/10.47526/2025-1/2524-0080.20

Балтабаева Д. Э.[1], Қалдар Б.С.[2], Абдурахманова Ш. Ш.[3], Амангельдиева Ю.О.[4], Эртаев Н.С.[5]
[1]*магистр, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: dilnoza.baltabayeva@ayu.edu.kz*
[2]*студент, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: Berik2002Berik@gmail.com*
[3]*магистр, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: shakhnoza.abdurakhmanova@ayu.edu.kz*
[4]*магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: yulduz.amangeldieva12345@mail.ru*
[5]*магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: nurs.ertaev@gmail.com*

ЖОҒАРЫ ЖЫЛДАМДЫҚТЫ ЖАЛЫНМЕН БҮРКУ ӘДІСІ АРҚЫЛЫ АЛЫНҒАН ZRCN ЖАБЫНЫНЫҢ ФИЗИКА-МЕХАНИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН ЗЕРТТЕУ
INVESTIGATION OF PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF ZRCN COATINGS OBTAINED BY HIGH VELOCITY OXYGEN FUEL METHOD
ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОКРЫТИЙ ZRCN, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ГАЗОПЛАМЕННОГО НАПЫЛЕНИЯ

Аңдатпа. *Цирконий карбонитридіне (ZrCN) негізделген жабындар 65Г және У8Г болаттарының механикалық және пайдалану сипаттамаларын айтарлықтай жақсартады. Бұл жабындар жоғары тозуға төзімділігімен және беріктігімен ерекшеленеді, сондықтан оларды металл өңдеу және машина жасау салаларында кеңінен қолдануға болады. Зерттеулер көрсеткендей, жоғары жылдамдықты оттегі жалынымен бүрку (HVOF) әдісі ZrCN жабындарын қалыптастыруда жоғары тиімділік көрсетеді. Бұл әдіс өңделген беттерде тығыз, берік және жоғары адгезиясы бар жабындарды алуға мүмкіндік береді. Микроқаттылық көрсеткіштері жабын қолданылғаннан кейін айтарлықтай өсетіні анықталды. Атап айтқанда, 65Г болатының микроқаттылығы 456,6 HV-ге, ал У8Г болатының қаттылығы 649,7 HV-ге дейін артқан. Үлгілердің үйкеліс пен тозу сынақтары ASTM G99 стандарты бойынша Трибометр TRB3 құрылғысында жүргізілді. Қарсы корпус ретінде диаметрі 6 мм 100Cr6 корунд шары қолданылды. Сынақтар құрғақ үйкеліс режимінде орындалды, онда қарсы дене ұстағышына жүктеме 5 Н және үлгінің айналу жылдамдығы 2 см/сек болды. Сынақтар ауа атмосферасында, 25,49°С температурада және 21,72% ылғалдылықта өтті. Үйкеліс жолы 30 метрді құрады. ZrCN жабындарының жоғары тиімділігі оның ерекше физикалық және химиялық қасиеттерімен түсіндіріледі. 65Г және У8Г болаттарында ZrCN жабындарын пайдалану өнімнің қызмет ету мерзімін ұзартуға, оның сенімділігі мен өнімділігін арттыруға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, алынған нәтижелер ZrCN жабындарының үйкеліс коэффициентін төмендетіп, тозуға төзімділікті арттыратынын дәлелдейді. Бұл зерттеудің қорытындылары болашақта осындай жабындардың басқа металл қорытпаларында қолданылу мүмкіндігін де қарастыруға негіз болады.*

Негізгі сөздер: *У8Г және 65Г болаттар, үйкеліс коэффициенті, микроқаттылық, ZrCN жабыны, ЖЖЖБ.*

Abstract. *Coatings based on zirconium carbonitride (ZrCN) significantly improve the mechanical and operational characteristics of 65G and U8G steels, increasing their wear resistance and durability. The high-speed oxygen-flame spraying (HVOF) method allows obtaining dense, durable and highly adhesive coatings. In particular, the microhardness of 65G steel increased to 456.6 HV, and the hardness of U8G steel increased to 649.7 HV. Friction and wear tests of samples were carried out on a TRB3 tribometer in accordance with the ASTM G99 standard. A 100Cr6 corundum ball with a diameter of 6 mm was used as a counterbody. The tests were carried out in the dry friction mode, while the load on the counterbody holder was 5 N, and the rotation speed of the sample was 2 cm / s. The tests were conducted in an air atmosphere at a temperature of 25.49°C and a humidity of 21.72%. The friction distance was 30 meters. The high efficiency of ZrCN coatings is explained by their unique physical and chemical properties. Their use extends the service life of products, increases reliability and reduces the friction coefficient. These studies confirm the prospects of ZrCN for protecting metal alloys from wear and create a basis for further developments in this area.*

Key words: *U8G and 65G steels, friction coefficient, microhardness, ZrCN coating, HVOF.*

Аннотация. *Покрытия на основе карбонитрида циркония (ZrCN) значительно улучшают механические и эксплуатационные характеристики сталей 65Г и У8Г. Данные покрытия характеризуются высокой износостойкостью и долговечностью, поэтому их можно широко применять в металлообрабатывающей и машиностроительной отраслях. Исследования показали, что метод высокоскоростного кислородно-пламенного напыления (HVOF) весьма эффективен при формировании покрытий ZrCN. Данный метод позволяет получать плотные, прочные и высокоадгезионные покрытия на обработанных поверхностях. Установлено, что после нанесения покрытия значения микротвердости значительно возросли. В частности, микротвердость стали 65Г увеличилась до 456,6 HV, а твердость стали У8Г увеличилась до 649,7 HV. Испытания образцов на трение и износ проводились на трибометре TRB3 в соответствии со стандартом ASTM G99. В качестве контртела использовался корундовый шарик 100Cr6 диаметром 6 мм. Испытания проводились в режиме сухого трения, при этом нагрузка на держатель контртела составляла 5 Н, а скорость вращения образца – 2 см/с. Испытания проводились в воздушной атмосфере при температуре 25,49°C и влажности 21,72%. Расстояние трения составило 30 метров. Высокая эффективность покрытий ZrCN объясняется его уникальными физико-химическими свойствами. Применение покрытий ZrCN на сталях 65Г и У8Г позволяет продлить срок службы изделия, повысить его надежность и производительность. Кроме того, полученные результаты доказывают, что покрытия ZrCN снижают коэффициент трения и повышают износостойкость. Результаты данного исследования также дадут основу для рассмотрения возможности использования подобных покрытий на других металлических сплавах в будущем.*

Ключевые слова*: стали У8Г и 65Г, коэффициент трения, микротвердость, покрытие ZrCN, HVOF.*

Кіріспе

Қазіргі заманғы материалтану және нанотехнологиялар саласындағы үрдістер беттерді өңдеудің жаңа әдістерін әзірлеуге және материалдардың қасиеттерін жақсартуға әкелді. Жабындарды алу үшін әртүрлі әдістер қолданылады, олардың ішінде физикалық және химиялық әдістер кең таралған. Физикалық әдістерге ЖЖЖБ, вакуумдық буландыру (PVD), плазмалық бүрку және магнетрондық тозаңдату жатады, олар жоғары адгезиялы, тығыз жабындар қалыптастыруға мүмкіндік береді [1,2]. Магнетрондық тозаңдату әсіресе жұқа, біркелкі және жоғары сапалы жабындар алу үшін қолданылады [3]. Химиялық әдістерден химиялық бу тұндыру (CVD) және электрохимиялық тұндыру (электролиз) кеңінен пайдаланылады, олар күрделі пішінді бөлшектерге біркелкі қабат қалыптастыруға тиімді [4]. Сонымен қатар, сол-гель (sol-gel) және лазерлік жабу технологиялары да жоғары тозуға төзімді, коррозияға қарсы жабындар алуда қолданылады [5].

Қазіргі таңда перспективалы бағыттардың бірі ЖЖЖБ–жоғары жылдамдықты газды жалынмен бүрку технологиясы, ол наноқұрылымды жабындарды алуға мүмкіндік береді [6-9]. ЖЖЖБ–материалдардың жоғары тозуға төзімділігін, коррозияға беріктігін және жылу тұрақтылығын қамтамасыз ететін қорғаныш жабындарды алудың негізгі әдістерінің бірі. Мұндай жабындарды жасау үшін қолданылатын материалдар арасында ZrCN өзінің жоғары қаттылығы және агрессивті ортаға төзімділігімен ерекшеленеді [10-12].

ZrCN–жоғары қаттылық, тотығуға төзімділік және жылу тұрақтылығы сияқты ерекше қасиеттерге ие материал. Xue және әріптестерінің зерттеулері ЖЖЖБ әдісімен алынған ZrCN жабындарының дәстүрлі әдістермен алынған жабындарға қарағанда жетілдірілген механикалық қасиеттерге ие екенін көрсетті. Бұл жабындар аэрокосмостық және автомобиль өнеркәсібінде, экстремалды пайдалану жағдайларына төтеп бере алатын материалдар қажет салаларда кеңінен қолданылады [13].

Зерттеулер ЖЖЖБ арқылы алынған наноқұрылымды ZrCN жабындарының тығыздығы мен біртектілігі жоғары екенін және олардың қорғаныс қасиеттерінің айтарлықтай жақсарғанын көрсетеді. Мысалы, Zhang және әріптестері микроструктураны бақылау арқылы жабынның жарықшақтар мен ақаулар түзілуін азайтуға болатынын атап өтті, бұл оның ұзақ мерзімділігі үшін аса маңызды [14-16].

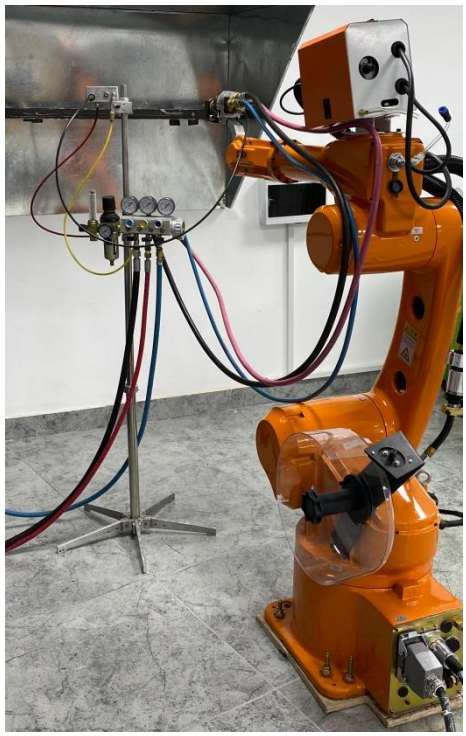
Бүрку параметрлерін оңтайландыру жабын сапасын қамтамасыз етуде маңызды рөл атқарады. Singh және әріптестерінің зерттеулері жалын температурасы мен газ қысымының фазалық құрамға және микроструктураға айтарлықтай әсер ететінін көрсетті. Мысалы, температураны арттыру жабын тығыздығының жоғарылауына ықпал етеді,

бірақтүйіршіктердің өсу қаупін арттырады, бұл материалдың қаттылығына теріс әсер етуі мүмкін [17,18].

Жоғарыда көрсетілген зерттеу нәтижелерін ескере отырып осы зерттеуде жоғары жылдамдықты газды жалынмен бүрку әдісі арқылы алынған ZrCN физика-механикалық қасиеттерін зерттеу осы жұмыстың негізгі мақсаты болып табылады.

Зерттеу әдістері

ЖЖЖБ арқылы жабындарды қалыптастыру үшін арнайы жабдықталған құрылғы қолданылады (сурет 1). Оның негізгі бөлігі–газ жалын ағынымен әрекеттесетін оттықтар. Жалын жанғыш қоспаның жануы арқылы пайда болып, оттық саптамасынан жоғары жылдамдықпен шығады. Қазіргі газ-жалын бүріккіштерінде материал сым, иілгіш бау, штанга немесе ұнтақ түрінде беріледі. Жанғыш қоспаны қыздыру аймағына беру үшін арналар концентрлі жасалған. Жанған қоспа сақиналы жалын түзіп, материалды жоғары пластикалық немесе сұйық күйге дейін қыздырады. Нәтижесінде балқытылған бөлшектер бетке бүркіліп, жабын қабатын құрайды [19].



Сурет 1. ЖЖЖБ жоғары жылдамдықты бүрку қондырғысы: оттық, ұнтақ диспенсері, чиллер, газды басқару панелі, компрессор, баллондағы газ (C_3H_8), баллондағы газ (O_2) бөліктерінен тұрады.

Бүрку қашықтығы–термиялық бүріккіш жабынның маңызды параметрлерінің бірі, ол материал бөлшектерінің температурасы мен жылдамдығына әсер етеді. ЖЖЖБ технологиясында жалын температурасы 3200°С-қа, ал ағын жылдамдығы гипердыбыстық деңгейге дейін жетуі мүмкін. Материал бөлшектері 80–1000 м/с жылдамдыққа дейін қызады, бұл аппарат құрылымына және газ қоспасының құрамына байланысты өзгереді [20,21].

Заманауи газ-жалын бүріккіштерде материал саптама арқылы беріледі және сақиналы жалынның әсерінен пластикалық немесе сұйық күйге дейін қызады. Сым және өзек материалдар қолданылғанда, балқытылған зат сығылған ауамен ұсақ бөлшектерге бөлініп, бетке жоғары жылдамдықпен шөгеді. Дегенмен, бұл әдісте жылу энергиясының жоғалуы

мүмкін. Бүркуге арналған материалдың жанбай, балқу және қайнау температуралары арасында жеткілікті айырмашылыққа ие болуы маңызды [22-24].

Тұрақты сапалы жабын алу үшін нақты уақыт режимінде процестегі параметрлерді бақылау және реттеу қажет. Бұл жабын бөлшектерінің температурасы мен жылдамдығын тұрақты ұстап тұруға арналған ЖЖЖБ бүріккіштерінің басқару жүйелерін әзірлеуге ынталандырады. Мұндай жүйелер нақты уақыттағы диагностикалық әдістер мен газ-бөлшектер жылдамдығын өлшеу технологияларын қолдануды қамтиды. ZrCN негізіндегі жабындарды жоғары жылдамдықты жалын бүрку әдісімен қолдану–әртүрлі өнімдердің өнімділік сипаттамаларын жақсартатын перспективті технология [25].

Микроқаттылық мәндері ГОСТ 9450-76 стандартына сәйкес Виккерс әдісі арқылы Микротвердомер HLV-1DT құрылғысында зерттелді. Зерттеу барысында индентор ретінде 136° бұрыштары бар алмазды төртқырлы пирамида қолданылды. Өлшеу процесінде $HV_{0.5}$ жүктемесі үлгі бетіне түсіріліп, индентор 10 секунд бойы ұсталып тұрды. Кейіннен енгізу іздерінің диагональдық өлшемдері (d_1 және d_2) дәлдікпен анықталды [26].

Үлгілердің үйкеліс пен тозу сынақтары ASTM G99 стандарты бойынша Трибометр TRB3 құрылғысында зерттелді. Қарсы корпус ретінде диаметрі 6 мм 100Cr6 корунд шары қолданылды. Сынақтар құрғақ үйкеліс режимінде қарсы дене ұстағышына жүктеме 5 Н және үлгінің айналу жылдамдығы 2 см/сек болған кезде жүргізілді. Сынақ ауа атмосферасында 25,49°С температурада және 21,72% ылғалдылықта жүргізілді. Үйкеліс жолы 30 метрді құрады.

Зерттеу нәтижелері

Зерттеу барысында 65Г және У8Г маркалы болаттан жасалған үлгілер зерттелді, ал қаптау үшін ZrCN ұнтағы таңдалды. ZrCN–жоғары абразивті тозуға және коррозияға төзімділігімен ерекшеленетін композициялық материал, бұл оның жұмыс барысында тиімділігін арттырады. 65Г және У8Г маркалы болаттан жасалған үлгілер болып табылады. Қаптау үшін таңдалған ұнтақ ZrCN болды. ZrCN–бірегей физика-химиялық қасиеттері бар композициялық материал. Осылайша, ZrCN негізіндегі жабын абразивті тозуға және коррозиялық процестерге төзімділік сияқты бірқатар артықшылықтарға ие.

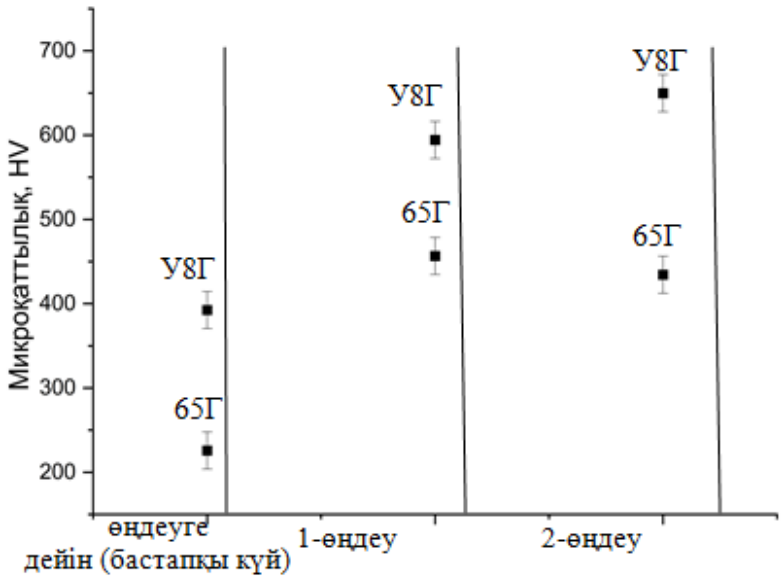
Жобаның міндеттерінде келтірілгендей жабынның өнімділік сипаттамаларына әсерін зерттеу үшін 65Г және У8Г маркалы болат таңдалды. 65Г және У8Г үлгілеріне ZrCN негізіндегі жабынды пайдаланып, кейінгі ЖЖЖБ жабыны үшін дайындалды. Кесте 1-де берілген параметрлер бойынша 65Г және У8Г үлгілеріне ZrCN негізінде жабын алынды.

Кесте 1. 65Г және У8Г үлгісіне жабынды жасау үшін қолданылатын параметрлер

№	Арақашықтық	Отын	Ауа қысымы	Оттегі газы	Ұнтақ
Үлгі1 (65Г)	35-40см	1,7 bar	3 bar	2,8 bar	ZrCN
Үлгі2 (65Г)			3,8 bar		
Үлгі1 (У8Г)			3 bar		
Үлгі2 (У8Г)			3,8 bar		

ZrCN жабыны 65Г және У8Г болаттары үшін тиімді. Төменде көрсетілген мәліметтерге сүйенсек, қаптамаға дейін болаттың микроқаттылығы келесі мәндерге ие: болат У8Г бұл мәндер көміртегінің көп болуына байланысты жоғары болуы мүмкін, бұл жоғары қаттылықты қамтамасыз етеді. Бастапқы күйдегі болаттардың микроқаттылық көрсеткіштері

У8Г 392,65 HV-қа және 65Г 225,75 HV-қа мәндеріне ие. Мәндер төмен көміртекті болаттарға тән орташа қаттылық материалын көрсетеді.



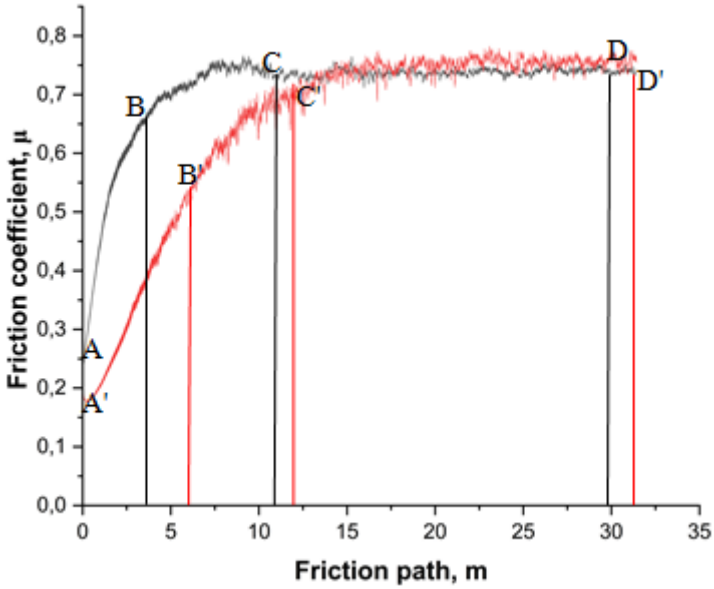
Сурет 2. 65Г және У8Г болаттарының микроқаттылығының мәндері. ЖЖЖБ режимдері: арақашықтық 35-40 см, отын 1,7 bar, ауа қысымы 3 bar, оттегі газы 3 bar қысымдарында 65Г және У8Г (1-өңдеу) және де арақашықтық 35-40 см, отын 1,7 bar, ауа қысымы 3 bar, оттегі газы 3,8 bar қысымдарында 65Г және У8Г (2- өңдеу).

Бұл диаграмма 65Г және У8Г болаттарының (1-өңдеу) бастапқы күйдегі және ZrCN жабыны қолданылғаннан кейінгі микроқаттылығының өзгерісін көрсетеді. ЖЖЖБ процесінде оттегі газы 3 bar қысымында алынған ZrCN жабынының 65Г және У8Г болаттарының (1-өңдеу) микроқаттылығы HLV-1DT микротвердометрінде $HV_{0.5}$ жүктемесімен өлшенді. Индентор үлгі бетіне 10 секунд бойы түсіріліп, әр үлгі 5 рет өлшенді. Нәтижесінде, 65Г болатының ZrCN жабыны үшін микроқаттылығы 456,6 HV, ал У8Г болаты үшін 594,4 HV екендігі анықталды (Сурет 2).

ЖЖЖБ процесінде оттегі газы 3,8 bar қысымында алынған ZrCN жабынының 65Г және У8Г болаттарының (2-өңдеу) микроқаттылығы дәл осы әдіспен өлшенді. Бұл жағдайда 65Г болаты үшін ZrCN жабынының микроқаттылығы 434,4 HV, ал У8Г болаты үшін 649,7 HV мәніне ие болды (Сурет 2).

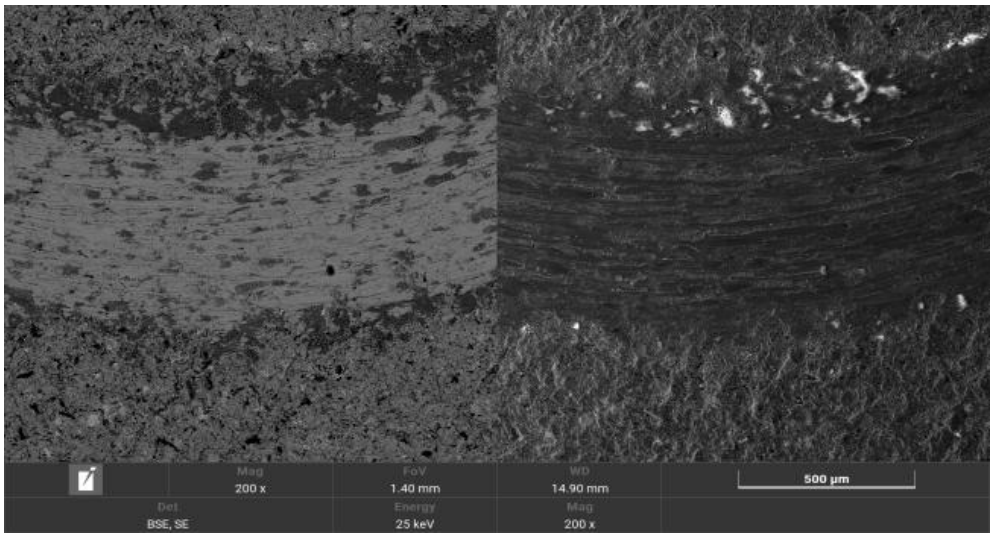
65Г және У8Г болаттарына ZrCN жабын қолданғаннан кейін, У8Г болатының микроқаттылығы жоғары екені анықталды. Бұл оның құрамындағы көміртегі мөлшерінің көптігі мен бастапқы құрылымдық ерекшеліктеріне байланысты, себебі жоғары көміртекті болаттар беріктілігі мен тозуға төзімділігі жоғары материалдар қатарына жатады. ZrCN жабын екі болаттың да микроқаттылығын арттырғанымен, оның тиімділігі материалдың бастапқы қасиеттеріне тәуелді. Сонымен қатар, үйкеліс коэффициенті жабынның тозуға төзімділігін анықтайтын маңызды параметр болып табылады және ол жабын бетінің құрылымы, микроқаттылығы мен морфологиясына байланысты өзгереді [27].

ЖЖЖБ әдісімен алынған ZrCN жабындары, әдетте, жоғары тығыздық пен ұсақ түйіршікті құрылымының арқасында жабысқақ және абразивті тозуды азайтып, төмен үйкеліс коэффициентін көрсетеді [28]. Зерттеулер оның мәні сынақ жағдайлары мен жабын құрамына байланысты 0,2–0,6 диапазонында өзгеретінін көрсетті [29]. 65Г болатының ZrCN жабындарының үйкеліс коэффициенттері сурет 3-те көрсетілген.



Сурет 3. 65Г болатындағы ZrCN жабынының үйкеліс коэффициенті

Графикте болат беттеріндегі ZrCN жабыны үшін үйкеліс коэффициентінің (μ) үйкеліс жолына тәуелділігі көрсетілген. 65Г болаты (Үлгі 1) үшін бастапқы фазада, яғни AB аралығы, (0–3,5 м) μ ~0,25-0,65 ге дейін өсіп, беткі қабаттың тозуын көрсетеді. Орта фазада, яғни BC аралығы (3,5–11,5 м) μ ~0,7–0,75 деңгейінде тұрақтанып, жабын толық тозады. Соңғы фазада, яғни CD аралығы (11,5–35 м) μ ~0,8 болып қалады, бұл субстраттың жақсы тозуға төзімділігін дәлелдейді. 65Г болаты (Үлгі 2) үшін бастапқы фазада, яғни A'B' аралығы (0–6 м) μ ~0,5-ге дейін өсіп, беткі қабаттың тозуын көрсетеді. Орта фазада, яғни B'C' аралығы, (6–11,5 м) μ ~0,55–0,7 деңгейінде тұрақтанып, жабын толық тозады. Соңғы фазада, яғни C'D' аралығы, (11,5–35 м) μ ~0,75 болып қалады, бұл субстраттың жақсы тозуға төзімділігін дәлелдейді.

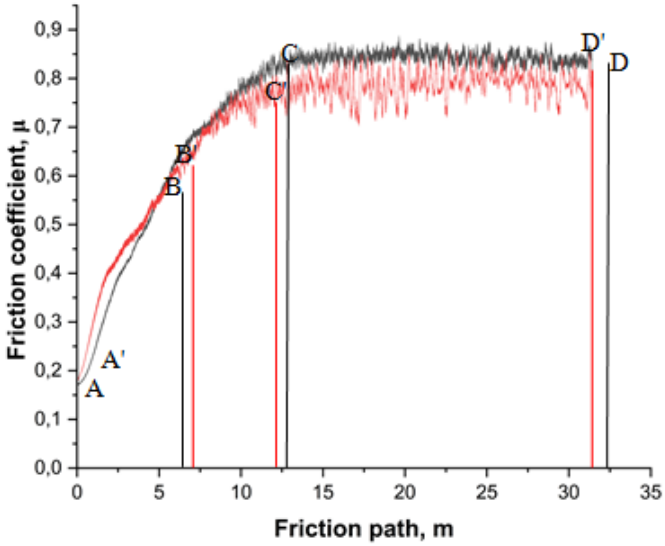


Сурет 4. 65Г болатындағы ZrCN жабынының SEM анализы

SEM анализы 65Г болатындағы ZrCN жабынының көлденең қимасын көрсетеді. BSE/SE режимінде айқын интерфейсі бар көп қабатты құрылым байқалады. Кескіннің сол

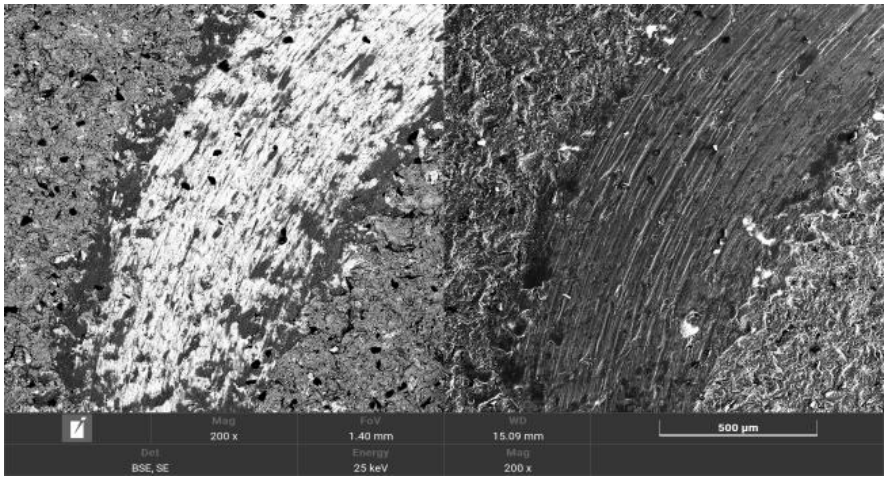
жақ бөлігі ықтимал диффузиялық процестерді көрсететін гетерогенділікпен және химиялық құрамдағы айырмашылықтармен сипатталады. Оң жағында жабынның қабаттық морфологиясы көрсетілген, бұл оның тұндыру және кейінгі жұмыс кезінде қалыптасуын көрсетуі мүмкін. 500 мкм шкала жабынның қалыңдығын, оның негізге адгезиясын және ықтимал өнімділік сипаттамаларын бағалауға мүмкіндік береді.

У8Г болаттарындағы ZrCN жабындарының үйкеліс коэффициенттері сурет 5-те көрсетілген.



Сурет 5. У8Г болатындағы ZrCN жабынының үйкеліс коэффициенті

Графикте болат беттеріндегі ZrCN жабыны үшін үйкеліс коэффициентінің (μ) үйкеліс жолына тәуелділігі көрсетілген. У8Г болаты (Үлгі 1) үшін бастапқы фазада, яғни AB аралығы (0–5 м) μ ~0,55-ге дейін өсіп, беткі қабаттың тозуын көрсетеді. Орта фазада, яғни BC аралығы (5–11,5 м) μ ~0,55–0,8 деңгейінде тұрақтанып, жабын толық тозады. Соңғы яғни CD аралығы фазада (11,5–35 м) μ ~0,85 болып қалады, бұл субстраттың жақсы тозуға төзімділігін дәлелдейді. У8Г болаты (Үлгі 2) үшін бастапқы фазада, яғни A'B' аралығы, (0–6 м) μ ~0,55-ге дейін өсіп, беткі қабаттың тозуын көрсетеді. Орта фазада, яғни B'C' аралығы, (6–10,5 м) μ ~0,55–0,75 деңгейінде тұрақтанып, жабын толық тозады. Соңғы фазада, яғни C'D' аралығы (10,5–35 м) μ ~0,75 болып қалады, бұл субстраттың жақсы тозуға төзімділігін дәлелдейді.



Сурет 6. У8Г болатындағы ZrCN жабынының SEM анализы

SEM анализы У8Г болатындағы ZrCN жабынының көлденең қимасын көрсетеді. BSE/SE режимінде фазалық біртекті емес және кеуектілігі бар гетерогенді құрылым байқалады. Сол жағы химиялық құрамдағы айырмашылықтарды көрсететін ауыспалы контраст аймақтарын көрсетеді, ал оң жағында механикалық кернеу мен тозуды көрсетеді. 500 мкм шкала жабынның қалыңдығын, оның субстратқа адгезиясын және өнімділік сипаттамаларын бағалауға мүмкіндік береді.

Қорытынды

Қорытындай келе, ЖЖЖБ әдісі жоғары адгезиясы бар тығыз жабындар қалыптастырумен танымал, бұл бетінің қасиеттерін жақсартуға ықпал етеді. ZrCN бүрку материалдың қаттылығын және тозуға төзімділігін айтарлықтай арттырады. Зерттеу нәтижелері көрсетілгендей, 65Г болат пен У8Г болаттарының ZrCN жабындары бастапқы фазада үйкеліс коэффициентінің өсуі, бұл жабынның тозуы мен субстратты қорғауын білдіреді. Орта фазада үйкеліс коэффициенті тұрақтанып, жабынның жартылай тозғанын және толық тозудан кейін жүйенің механикалық тұрақтылығын көрсетеді. Соңғы фазада коэффициент тұрақты сақталып, болат субстраттың тозуға төзімділігін дәлелдейді. Бұл ZrCN жабындарының 65Г және У8Г болаттарымен тиімді үйлесетінін және жоғары тұрақтылық пен қорғаныс қамтамасыз ететінін растайды. Сонымен қатар, микроқаттылық мәндері ЖЖЖБ процесінің параметрлеріне байланысты өзгереді, және жабыннан кейін микроқаттылықтың 1,5-2 есе артуы байқалады. 65Г болатының ZrCN жабынынан кейінгі микроқаттылығының мәні 456,6 HV болды. У8Г болаты үшін ZrCN жабынының микроқаттылығы 649,7 HV құрады. Осылайша, ZrCN жабыны 65Г және У8Г болаттарында тозуға төзімділікті арттырып, олардың қызмет ету мерзімін ұзартады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Kalliopi K. Aligizaki, D. (2004), "Surface Engineering for Corrosion and Wear Resistance", *Anti-Corrosion Methods and Materials*, Vol. 51 No. 1 https://doi.org/10.1108/acmm.2004.12851aae.001
2. Pawlowski, L. (2008). The science and engineering of thermal spray coatings (2nd ed.). Wiley.
3. Mattox, D. M. (2010). Handbook of physical vapor deposition (PVD) processing (2nd ed.). William Andrew.
4. Ohring, M. (2002). Materials science of thin films: Deposition and structure (2nd ed.). Academic Press.
5. Pierre, A. C. (2020). Introduction to sol-gel processing. Springer Nature.
6. Molak, R. M., Araki, H., Watanabe, M., et al. (2017). Effects of spray parameters and post-spray heat treatment on microstructure and mechanical properties of warm-sprayed Ti-6Al-4V coatings. *Journal of Thermal Spray Technology, 26*(4), 627–647. https://doi.org/10.1007/s11666-016-0494-5
7. Yuan, J., Cheng, Y., Jing, Z., et al. (2023). Properties of Al-based amorphous coatings prepared by low-temperature ЖЖЖБ spraying. *Journal of Thermal Spray Technology, 32*(6), 1338–1349. https://doi.org/10.1007/s11666-023-01555-9
8. Moghaddasi, M., Bozorg, M., Aghaie, E., et al. (2021). Corrosion and wear analysis of high-velocity oxy-fuel sprayed WC-10Co-4Cr and Colmonoy-6 coatings on nickel-aluminum bronze alloy substrate. *Journal of Materials Engineering and Performance, 30*(12), 7564–7576. https://doi.org/10.1007/s11665-021-05965-0
9. Ruiz-Luna, H., Porcayo-Calderon, J., Alvarado-Orozco, J. M., et al. (2017). Influence of oxidation treatments and surface finishing on the electrochemical behavior of Ni-20Cr ЖЖЖБ coatings. *Journal of Materials Engineering and Performance, 26*(11), 6064–6074. https://doi.org/10.1007/s11665-017-3048-1
10. Li, M., & Christofides, P. D. (2004). Feedback control of ЖЖЖБ thermal spray process accounting for powder size distribution. *Journal of Thermal Spray Technology, 13*(1), 108–120. https://doi.org/10.1007/s11666-004-0055-1
11. Li, C., Li, S., Liu, P., et al. (2024). Numerical simulation and sensitivity evaluation of process parameters for AC-ЖЖЖБ spraying 3D model. *JOM*. https://doi.org/10.1007/s11837-024-06652-w
12. Jiang, H. R., Wei, M. L., Ma, X. S., & Dong, T. C. (2019). *Journal of Thermal Spray Technology*. https://doi.org/10.1007/s11666-019-00889-7
13. Abubakar, A. A., Abul, F. M., Arif, S. S., & Akhtar, J. M. (2019). *Journal of Thermal Spray Technology, 28*(3), 359. https://doi.org/10.1007/s11666-019-00828-6
14. Zhao, X., Li, C., Li, S., Jiang, H., & Han, X. (2023). Surface coating technology, *461*, 129435. https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2023.129435

15. Pradeep, D.G., Venkatesh, C.V. & Nithin, H.S. (2022) Review on Tribological and Mechanical Behavior in ЖЖЖБ Thermal-sprayed Composite Coatings. *J Bio Tribo Corros* 8, 30. https://doi.org/10.1007/s40735-022-00631-x
16. Baczynski, C., Glover, S. C. O., & Klessen, R. S. (2015). Fervent: Chemistry coupled, ionising and non-ionising radiative feedback in magnetohydrodynamic simulations.
17. Kaur, M., Singh, H., & Prakash, S. (2012). High-temperature behavior of a high-velocity oxy-fuel sprayed Cr3C2-NiCr coating. *Metallurgical and Materials Transactions A, 43*(8), 2979–2993. https://doi.org/10.1007/s11661-012-1118-4
18. Janka, L., Norpoth, J., Trache, R. *et al.* (2017).ЖЖЖБ- and HVAF-Sprayed Cr_3C_2-NiCr Coatings Deposited from Feedstock Powders of Spherical Morphology: Microstructure Formation and High-Stress Abrasive Wear Resistance Up to 800 °C. *J Therm Spray Tech* 26, 1720–1731 https://doi.org/10.1007/s11666-017-0621-y
19. Braic M, Braic V, Balaceanu M, Zoita CN, Kiss A, Vladescu A, Popescu A, Ripeanu R (2011) Structure and properties of Zr/ZrCN coatings deposited by cathodic arc method. Mater Chem Phys 126:818–825. https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2010.12.036
20. Clavería, I., Lostalé, A., Fernández, Á., Castell, P., Elduque, D., Mendoza, G., & Zubizarreta, C. (2019). Enhancement of tribological behavior of rolling bearings by applying a multilayer ZrN/ZrCN coating. *Coatings, 9*(7), 434. https://doi.org/10.3390/coatings9070434
21. Ротару, А. Н. (год). Оценка прочности стальных конструкций по результатам измерения твердости по методу Виккерса. Научный сотрудник, ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), г. Москва, РФ.
22. Anusha, K., Routara, B.C. & Guha, S. A Review on High-Velocity Oxy-Fuel (HVOF) Coating Technique. J. Inst. Eng. India Ser. D 104, 831–848 (2023). https://doi.org/10.1007/s40033-022-00434-x
23. . A. Raza, F. Ahmad, T.M. Badri, M.R. Raza, K. Malik, An influence of oxygen flow rate and spray distance on the porosity of HVOF coating and its effects on corrosion—a review. Materials (2022). https://doi.org/10.3390/ma15186329
24. S.K. Nayak, A. Kumar, T. Laha, (2022). Developing an economical wear and corrosion resistant Fe-Based metallic glass composite coating by plasma and HVOF spraying. J. Therm. Spray Technol. https://doi.org/10.1007/s11666-021-01277-w
25. A. Silvello, P. Cavaliere, S. Yin, R. Lupoi, I. Garcia Cano, S. Dosta, (2022). Microstructural, mechanical and wear behavior of HVOF and cold-sprayed high-entropy alloys (HEAs) coatings. J. Therm. Spray Technol. https://doi.org/10.1007/s11666-021-01293-w
26. M. Löbel, T. Lindner, T. Mehner, L.M. Rymer, S. Björklund, S. Joshi, T. Lampke, (2022).Microstructure and corrosion properties of AlCrFeCoNi high-entropy alloy coatings prepared by HVAF and HVOF. J. Therm. Spray Technol. https://doi.org/10.1007/s11666-021-01255-2
27. Frank, F., Tkadletz, M., Czettl, C., & Schalk, N. (2021). Microstructure and Mechanical Properties of ZrN, ZrCN and ZrC Coatings Grown by Chemical Vapor Deposition. Coatings, 11(5), 491. doi:10.3390/coatings11050491
28. Hollstein, F., Kitta, D., Louda, P., Pacal, F., & Meinhardt, J. (2001). Investigation of low-reflective ZrCN–PVD-arc coatings for application on medical tools for minimally invasive surgery. *Surface and Coatings Technology*, *142*, 1063-1068.
29. Constantin, L. R., Parau, A. C., Balaceanu, M., Dinu, M., & Vladescu, A. (2019). Corrosion and tribological behaviour in a 3.5% NaCl solution of vacuum arc deposited ZrCN and Zr–Cr–Si–C–N coatings. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 233(1), 158-169.

References

1. Kalliopi K. Aligizaki, D. (2004), "Surface Engineering for Corrosion and Wear Resistance", *Anti-Corrosion Methods and Materials*, Vol. 51 No. 1 https://doi.org/10.1108/acmm.2004.12851aae.001
2. Pawlowski, L. (2008). The science and engineering of thermal spray coatings (2nd ed.). Wiley.
3. Mattox, D. M. (2010). Handbook of physical vapor deposition (PVD) processing (2nd ed.). William Andrew.
4. Ohring, M. (2002). Materials science of thin films: Deposition and structure (2nd ed.). Academic Press.
5. Pierre, A. C. (2020). Introduction to sol-gel processing. Springer Nature.
6. Molak, R. M., Araki, H., Watanabe, M., et al. (2017). Effects of spray parameters and post-spray heat treatment on microstructure and mechanical properties of warm-sprayed Ti-6Al-4V coatings. *Journal of Thermal Spray Technology*, *26*(4), 627–647. https://doi.org/10.1007/s11666-016-0494-5
7. Yuan, J., Cheng, Y., Jing, Z., et al. (2023). Properties of Al-based amorphous coatings prepared by low-temperature ЖЖЖБ spraying. *Journal of Thermal Spray Technology, 32*(6), 1338–1349. https://doi.org/10.1007/s11666-023-01555-9
8. Moghaddasi, M., Bozorg, M., Aghaie, E., et al. (2021). Corrosion and wear analysis of high-velocity oxy-fuel sprayed WC-10Co-4Cr and Colmonoy-6 coatings on nickel-aluminum bronze alloy substrate. *Journal of Materials Engineering and Performance, 30*(12), 7564–7576. https://doi.org/10.1007/s11665-021-05965-0

9. Ruiz-Luna, H., Porcayo-Calderon, J., Alvarado-Orozco, J. M., et al. (2017). Influence of oxidation treatments and surface finishing on the electrochemical behavior of Ni-20Cr ЖЖЖБ coatings. *Journal of Materials Engineering and Performance, 26*(11), 6064–6074. https://doi.org/10.1007/s11665-017-3048-1
10. Li, M., & Christofides, P. D. (2004). Feedback control of ЖЖЖБ thermal spray process accounting for powder size distribution. *Journal of Thermal Spray Technology, 13*(1), 108–120. https://doi.org/10.1007/s11666-004-0055-1
11. Li, C., Li, S., Liu, P., et al. (2024). Numerical simulation and sensitivity evaluation of process parameters for AC-ЖЖЖБ spraying 3D model. *JOM*. https://doi.org/10.1007/s11837-024-06652-w
12. Jiang, H. R., Wei, M. L., Ma, X. S., & Dong, T. C. (2019). *Journal of Thermal Spray Technology*. https://doi.org/10.1007/s11666-019-00889-7
13. Abubakar, A. A., Abul, F. M., Arif, S. S., & Akhtar, J. M. (2019). *Journal of Thermal Spray Technology, 28*(3), 359. https://doi.org/10.1007/s11666-019-00828-6
14. Zhao, X., Li, C., Li, S., Jiang, H., & Han, X. (2023). Surface coating technology, *461*, 129435. https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2023.129435
15. Pradeep, D.G., Venkatesh, C.V. & Nithin, H.S. (2022) Review on Tribological and Mechanical Behavior in ЖЖЖБ Thermal-sprayed Composite Coatings. *J Bio Tribo Corros* 8, 30. https://doi.org/10.1007/s40735-022-00631-x
16. Baczynski, C., Glover, S. C. O., & Klessen, R. S. (2015). Fervent: Chemistry coupled, ionising and non-ionising radiative feedback in magnetohydrodynamic simulations.
17. Kaur, M., Singh, H., & Prakash, S. (2012). High-temperature behavior of a high-velocity oxy-fuel sprayed Cr3C2-NiCr coating. *Metallurgical and Materials Transactions A, 43*(8), 2979–2993. https://doi.org/10.1007/s11661-012-1118-4
18. Janka, L., Norpoth, J., Trache, R. *et al.* (2017).ЖЖЖБ- and HVAF-Sprayed Cr_3C_2-NiCr Coatings Deposited from Feedstock Powders of Spherical Morphology: Microstructure Formation and High-Stress Abrasive Wear Resistance Up to 800 °C. *J Therm Spray Tech* 26, 1720–1731 https://doi.org/10.1007/s11666-017-0621-y
19. Braic M, Braic V, Balaceanu M, Zoita CN, Kiss A, Vladescu A, Popescu A, Ripeanu R (2011) Structure and properties of Zr/ZrCN coatings deposited by cathodic arc method. Mater Chem Phys 126:818–825. https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2010.12.036
20. Clavería, I., Lostalé, A., Fernández, Á., Castell, P., Elduque, D., Mendoza, G., & Zubizarreta, C. (2019). Enhancement of tribological behavior of rolling bearings by applying a multilayer ZrN/ZrCN coating. *Coatings, 9*(7), 434. https://doi.org/10.3390/coatings9070434
21. Rotaru, A. N. (god). Otsenka prochnosti stal'nykh konstruktsiy po rezul'tatam izmereniya tverdosti po metodu Vikkersa. Nauchniy sotrudnik, FGBU VNII GOChS (FTs), g. Moskva, RF.
22. Anusha, K., Routara, B.C. & Guha, S. A Review on High-Velocity Oxy-Fuel (HVOF) Coating Technique. J. Inst. Eng. India Ser. D 104, 831–848 (2023). https://doi.org/10.1007/s40033-022-00434-x
23. . A. Raza, F. Ahmad, T.M. Badri, M.R. Raza, K. Malik, An influence of oxygen flow rate and spray distance on the porosity of HVOF coating and its effects on corrosion—a review. Materials (2022). https://doi.org/10.3390/ma15186329
24. S.K. Nayak, A. Kumar, T. Laha, (2022). Developing an economical wear and corrosion resistant Fe-Based metallic glass composite coating by plasma and HVOF spraying. J. Therm. Spray Technol. https://doi.org/10.1007/s11666-021-01277-w
25. A. Silvello, P. Cavaliere, S. Yin, R. Lupoi, I. Garcia Cano, S. Dosta, (2022). Microstructural, mechanical and wear behavior of HVOF and cold-sprayed high-entropy alloys (HEAs) coatings. J. Therm. Spray Technol. https://doi.org/10.1007/s11666-021-01293-w
26. M. Löbel, T. Lindner, T. Mehner, L.M. Rymer, S. Björklund, S. Joshi, T. Lampke, (2022).Microstructure and corrosion properties of AlCrFeCoNi high-entropy alloy coatings prepared by HVAF and HVOF. J. Therm. Spray Technol. https://doi.org/10.1007/s11666-021-01255-2
27. Frank, F., Tkadletz, M., Czettl, C., & Schalk, N. (2021). Microstructure and Mechanical Properties of ZrN, ZrCN and ZrC Coatings Grown by Chemical Vapor Deposition. Coatings, 11(5), 491. doi:10.3390/coatings11050491
28. Hollstein, F., Kitta, D., Louda, P., Pacal, F., & Meinhardt, J. (2001). Investigation of low-reflective ZrCN–PVD-arc coatings for application on medical tools for minimally invasive surgery. *Surface and Coatings Technology*, *142*, 1063-1068.
29. Constantin, L. R., Parau, A. C., Balaceanu, M., Dinu, M., & Vladescu, A. (2019). Corrosion and tribological behaviour in a 3.5% NaCl solution of vacuum arc deposited ZrCN and Zr–Cr–Si–C–N coatings. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 233(1), 158-169.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, корреспондент автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	**Балтабаева Дилноза Эрмахаммадқызы** - магистр, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: dilnoza.baltabayeva@ayu.edu.kz, +77074313105
	Baltabayeva Dilnoza Ermakhammadkyzy – master, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: dilnoza.baltabayeva@ayu.edu.kz, +77074313105
	Балтабаева Дилноза Эрмахаммадқызы - магистр, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: dilnoza.baltabayeva@ayu.edu.kz, +77074313105
2	**Қалдар Берік Серікұлы** - бакалавр Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: Berik2002Berik@gmail.com, +77059792631
	Kaldar Berik Serikuly - student, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: Berik2002Berik@gmail.com, +77059792631
	Қалдар Берік Серікұлы - магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: Berik2002Berik@gmail.com, +77059792631
3	**Абдурахманова Шахноза Шакирқызы** – магистр, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан**,** e-mail: shakhnoza.abdurakhmanova@ayu.edu.kz, +77713510901
	Abdurakhmanova Shakhnoza Shakirkyzy - master , Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: shakhnoza.abdurakhmanova@ayu.edu.kz, +77713510901
	Абдурахманова Шахноза Шакирқызы – магистр, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: shakhnoza.abdurakhmanova@ayu.edu.kz, +77713510901
4	**Амангельдиева Юлдуз Ойбекқызы** - магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: yulduz.amangeldieva12345@mail.ru , +7778 640 4486
	Amangeldiyeva Yulduz Oybekqyzy - master student, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: yulduz.amangeldieva12345@mail.ru , +7778 640 4486
	Амангельдиева Юлдуз Ойбекқызы - магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: yulduz.amangeldieva12345@mail.ru , +7778 640 4486
5	**Эртаев Нұрсұлтан Сұлтанбайұлы** - магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: nurs.ertaev@gmail.com , +77763187990
	Ertaev Nursultan Sultanbayuly - master's student, Turkestan, Kazakhstan, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, e-mail: nurs.ertaev@gmail.com, +77763187990
	Эртаев Нұрсұлтан Сұлтанбайұлы - Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: nurs.ertaev@gmail.com , +77763187990

UDC 539.3
IRSNI 29.19.19
https://doi.org/10.47526/2025-1/2524-0080.21

Sarıbek Y.[1], Çoruh A.[2], Saidakhmetov P.[3], Tomak M.[4]
[1] *PhD, Sakarya University*
(Turkey, Sakarya), e-mail: alicoruhlu@gmail.com
[2]*Professor, PhD, Sakarya University*
(Turkey, Sakarya), e-mail: coruh@sakarya.edu.tr
[3]*Candidate of Science, M.Auezov South Kazakhstan University*
(Kazakhstan, Shymkent), e-mail: timpf_ukgu@mail.ru
[4]*Professor Doctor, Middle East Technical University*
(Turkey, Ankara), e-mail: alicoruhlu@gmail.com

MOLECULAR DYNAMICS SIMULATION STUDY OF THERMAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF PD, PT AND RH METALS
PD, PT ЖӘНЕ RH МЕТАЛДАРЫНЫҢ ЖЫЛУЛЫҚ ЖӘНЕ МЕХАНИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН МОЛЕКУЛАЛЫҚ ДИНАМИКА ӘДІСІМЕН ЗЕРТТЕУ
ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕТАЛЛОВ PD, PT И RH МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Abstract: *The thermal and mechanical properties of Pd, Pt, and Rh pure metals are thoroughly investigated using advanced molecular dynamics (MD) simulations, employing the Sutton-Chen (SC) and quantum Sutton-Chen (Q-SC) potential models. The study aims to analyze the behavior of these metals under increasing temperatures, providing insights into their structural stability and thermodynamic properties. The materials are heated from 0 K to temperatures slightly above their respective melting points in increments of 100 K. Temperature-dependent polynomial and linear functions of the simulation results, derived using both SC and Q-SC models, are obtained to establish a comprehensive understanding of their temperature-dependent properties. Key physical properties, including lattice parameter, density, enthalpy, cohesive energy, elastic constants, bulk modulus, shear modulus, Poisson's ratio, Young's modulus, heat capacity, and thermal expansion coefficient, are systematically calculated. The study compares the performance of SC and Q-SC potentials in predicting these properties and evaluates their accuracy against available experimental and theoretical data in the literature. The findings contribute to a better understanding of the thermomechanical behavior of noble metals, aiding in their potential applications in high-temperature environments and advanced material design. The comparative analysis of SC and Q-SC models also highlights their strengths and limitations in simulating metallic systems.*

Keywords: *Molecular Dynamics; Sutton-Chen potential; Quantum Sutton-Chen potential; transition metals; Mechanical properties.*

Аңдатпа. *Pd, Pt және Rh таза металдарының жылу-механикалық қасиеттері Саттон-Чен (СК) және кванттық Саттон-Чен (Q-SC) әлеуетті модельдерін пайдалана отырып, молекулалық динамиканы (MD) модельдеуді пайдалана отырып зерттеледі. Зерттеу температураның өсуіне қарай осы металдардың мінез-құлқын талдауға бағытталған, бұл олардың құрылымдық тұрақтылығы мен термодинамикалық қасиеттері туралы мағлұмат береді SC және Q-SC модельдерін пайдалана отырып алынған модельдеу нәтижелерінің температураға тәуелді полиномиялық және сызықтық функциялары олардың температураға тәуелді қасиеттерінің толық көрінісін қамтамасыз етеді. Торлы параметрді, тығыздықты, энтальпияны, ұйымшылдық энергиясын, серпімді тұрақтыларды, сусымалы модульді, ширату модулін, Пуассон арақатынасын, Янг модулін, жылу сыйымдылығын, жылу кеңею коэффициентін қоса алғанда, негізгі физикалық қасиеттер жүйелі түрде есептеледі. Зерттеу осы қасиеттерді болжаудағы СК және Q-SC потенциалдарының сипаттамаларын салыстырады және әдебиетте бар эксперименттік-теориялық деректермен салыстырғанда олардың дәлдігін бағалайды. Алынған нәтижелер асыл металдардың термомеханикалық қасиеттерін жақсы түсінуге, олардың жоғары температуралы ортада потенциалды қолданылуына және алдыңғы қатарлы материалдарды әзірлеуге көмектеседі. СК және Q-SC модельдерін салыстырмалы талдау металл жүйелерін модельдеуде олардың күшті және әлсіз жақтарын да бөліп көрсетеді.*

Негізгі сөздер. *Молекулярная динамика, потенциал Sutton-Chen, квантовый потенциал Sutton-Chen, переходные металлы, механические свойства.*

Аннотация. *Термические и механические свойства чистых металлов Pd, Pt и Rh исследуются с помощью моделирования молекулярной динамики (MD) с использованием моделей потенциала Саттона-Чена (SC) и квантового Саттона-Чена (Q-SC). Исследование направлено на анализ поведения этих металлов при повышении температуры, что дает представление об их структурной стабильности и термодинамических свойствах. Материалы нагреваются от 0 К до температур, немного превышающих соответствующие точки плавления с шагом 100 К. Зависящие от температуры полиномиальные и линейные функции результатов моделирования, полученные с использованием моделей SC и Q-SC, позволяют получить полное представление об их температурно-зависимых свойствах. Систематически рассчитываются ключевые физические свойства, включая параметр решетки, плотность, энтальпию, энергию сцепления, упругие константы, объемный модуль, модуль сдвига, коэффициент Пуассона, модуль Юнга, теплоемкость и коэффициент теплового расширения. В исследовании сравниваются характеристики потенциалов SC и Q-SC в прогнозировании этих свойств и оценивается их точность по сравнению с имеющимися экспериментальными и теоретическими данными в литературе. Полученные результаты способствуют лучшему пониманию термомеханических свойств благородных металлов, помогая в их потенциальном применении в высокотемпературных средах и при разработке передовых материалов. Сравнительный анализ моделей SC и Q-SC также подчеркивает их сильные и слабые стороны при моделировании металлических систем.*

Ключевые слова. *Молекулярная динамика, потенциал Саттона-Чена, квантовый потенциал Саттона-Чена, переходные металлы, механические свойства.*

Introduction

Transition metals and their alloys are indispensable for technology. They are used especially in space and micro technologies. Pd, Pt and Rh metals and their alloys are used in many areas such as automotive, space industry and dentistry. Therefore, their study will be useful for technological applications. Parallel to the theoretical and scientific developments, calculational methods based on computer simulations are used very intensively in this field.

Molecular dynamics simulation is used for a time-dependent evaluation of thermodynamic, structural and dynamical properties of metals and alloys [1-6]. The method is also used to calculate interatomic interactions with a correct mathematical function whose gradient gives the forces between atoms. Newton's equations of motion of the system are solved numerically and the system is strained to be in a state of minimum energy, balance point of its phase space [7]. Recently, molecular dynamics computer simulations have started to use empirical many-body potentials to examine the thermodynamic and structural properties of some metals. Usually, the pairwise potential models are used for various model systems. These potentials are insufficient to define metallic bonding. The interatomic interactions that are in real crystalline solids cannot characterized by simple pairwise interactions alone. Cauchy relation between the elastic constants $C_{12}=C_{44}$ is verified by the pure pairwise potential model. This is not the case for the pure metals. Thus, many-body interactions should be taken into account when we study metals and metal alloys. Recent studies have shown that empirical many-body potentials have been developed to include the local density or volume dependence to define metallic binding [8-11]. Among these studies are Daw and Baskes's embedded atom method [12], Finnis and Sinclair's [13,14] empirical many body potentials, the second moment approximation (SMA) to tight binding (TB) model [15], the glue model [16], empirical many body potentials based on Norskovs'effective medium theory [17] and lately the many body potentials developed by Sutton and co-workers[18,19] for fcc transition metals can be listed.

Sutton-Chen potential (SC) has been widely used to examine a range of problems, because this potential has a mathematically simple power law form and a sufficient long-range character. Furthermore, it is suitable for computer modeling. The Sutton-Chen potential is based on the experimental lattice parameter, cohesive energy and bulk modulus [20].

SC potential is reparametrized to develop the temperature dependence of physical properties of fcc metals by fitting the extra physical properties such as phonon frequencies at X point and by taking into account zero point energy (ZPE) [21]. This potential is identified as Quantum Sutton-Chen potential (Q-SC). Quantum Sutton-Chen potential has been used in many scientific research such as glass formations, ranging from alloys, crystallization, surface science problems, clusters,

nanowires, and single crystal plasticity of pure metals to transport properties of fcc transition metals [22-28].

Kart et al. studied the structural properties of Pd, Ag and their alloys. They compared the solidstate properties of Pd and Ag employing SC and Q-SC potential [28]. Kart SO et al. studied the properties of Pd-Ni in liquid and solid phase [9]. They compared some physical properties of mentioned metals and their alloys in the solid and liquid phases by using SC and Q-SC potentials. Although there are many studies for Pd, there is not enaugh work on Pt and Rh by using Q-SC potential. Additionally, Q-SC and SC potentials have not been compared for Pt and Rh.

In this work, we performed molecular dynamics (MD) simulations using the SC and Q-SC empirical many body potentials. We studied temperature dependence of thermal and mechanical properties of Pd, Pt and Rh. Some of our evaluated data on elastic constants, enthalpy and cohesive energy is previously provided by some other outhors [9,10,28] using our method, we reproduced these properties to work out on and to produce new extra data, shear modulus, Poisson ratio, Young's modulus, heat capacity, thermal expansion coefficients and we compared Sutton-Chen and Quantum Sutton-Chen potentials in this study. We compared the calculated simulation results using SC and Q-SC potentials with experimental and theoretical data available in the literature as well.

The article is arranged as follows: SC and Q-SC empirical many body potential models and the method of calculation are defined in Section 2. Section 3 presents the results of computer simulations. These results are compared with the experimental values and other calculations. Finally, conclusions are given in Section 4.

Methodolgy

We have used the Q-SC and SC potentials which are frequently used for FCC transition metals. SC manybody potential is based on the Finnis and Sinclair potential [13]. Empirical manybody Finnis- Sinclair force field includes a repulsive term and an attractive term proportional to square root of the local density. Total potential energy of metals and alloys per atom in a system of N atoms is given by:

$$U_{tot} = \sum_i U_i = \sum_i \left[\sum_{j \neq i} \epsilon_{ij} \frac{1}{2} V(r_{ij}) - c_i \epsilon_{ij} (\rho_i)^{1/2} \right] \qquad (1)$$

$V(r_{ij})$ is a pairwise repulsive term between atoms i and j. Second term describes the manybody cohesive term associated with atom i.

$$V(r_{ij}) = \left(\frac{a_{ij}}{r_{ij}} \right)^{n_{ij}}, \qquad (2)$$

and

$$\rho_i = \sum_{i \neq j} \emptyset(r_{ij}), \qquad (3)$$

$$\emptyset(r_{ij}) = \left(\frac{a_{ij}}{r_{ij}} \right)^{m_{ij}}, \qquad (4)$$

where, r_{ij} is the distance between atoms i and j. a_{ij} is length scale parameter leading to dimensionless arguments for $V(r_{ij})$ and ρ_i. Other parameters (namely c_{ij}, ε_{ij}, n_{ij} and m_{ij}) were obtained by fitting the 0 K properties such as the zero-pressure condition, the cohesive energy and the bulk modulus of the fcc pure metals. c_{ij} is a dimensionless parameter scaling the attractive term. ε_{ij} is an energy parameter obtained from experiment and n_{ij}, m_{ij} are positive integer parameters with n>m. These integer parameters define the range of the two components of the potential. The values of the SC and Q-SC potential parameters for Pd, Pt an Rh are given in Table 1[19, 21].

Table 1. The SC and Q-SC potential parametres for Pd, Pt and Rh pure metals

Metal	Model	N	m	ν(ev)	c	a (A°)
Pd	Q-SC	12	6	0.32864E-2	148.205	3.8813
	SC	12	7	0.41790E-2	108.526	3.8902
Pt	Q-SC	11	7	0.97894E-2	71.336	3.9163
	SC	10	8	1.98350E-2	34.428	3.9200
Rh	Q-SC	13	5	0.24612E-2	305.499	3.7984
	SC	12	6	0.49371E-2	145.658	3.8000

In this study, MD simulations is applied to a super cell consisting of 7x7x7 conventional unit cell (1372 atoms), whose algorithms are based on the extended Hamiltonian formalism [29-33] presented in the studies of Andersen [29], Parinello-Rahman [30], Nosé [31], Hoover [33], and Çağın and Pettitt [32]. The system is made up of a cubic box with 1372 atoms which is sufficient for statistics of the equilibrium properties, such as pressure, temperature, energy, etc. The simulation started with atoms arbitrarily distributed on a fcc lattice subject to the periodic boundary conditions in three dimensions. A 5th-order gear predictor-corrector algorithm is used to integrate equations of motion with the time step of 2 fs. The Parrinello-Rahman piston mass parameter is chosen as W=400 and Nosé-Hoover parameter is set to Q=100. The cutoff distance for the interactions between the atoms is taken to be two lattice parameters to realize maximum capacity and speed of the calculations. However, the temperature effects are taken into account by extending the range by an additional distance of half a lattice parameter. Three successive ensembles are used in simulations. First, HPN (constant-enthalpy and constant-pressure) MD simulation is applied to heat the system and equilibrate at the reached temperatures. The system is heated from 0.1 K to target temperature with increments of 100 K. 2000 time steps are performed for equilibrium of the system, at each temperature. In order to get more accurate values of the melting temperature, the system is heated up with increments of 10 K near to the melting temperature. Afterwards, TPN (constant-pressure and constant-temperature) dynamics are performed to obtain some statistical results such as volume, density and energy of the system. 20000 additional steps are carried out for TPN dynamics. Finally, microcanonical ensemble (EVN) (constant-energy and constant-volume) is used to obtain the elastic constants which are used to compute bulk modulus, shear modulus, poisson ratio and Young's modulus of materials. Where, 50000 additional steps are performed for EVN dynamics. Resultant zero strain averange matrix <h0> are used to obtain pressure dependent properties of the system in EVN dynamics.

Çağın [34,35] derived the fluctuation formula for the calculation of the elastic constant by using the SC potential in the EVN ensemble. The fluctuation Formula is given by

$$C_{\alpha\beta\gamma\kappa} = \frac{\Omega_0}{k_B T}\left(\langle P_{\alpha\beta} P_{\gamma\kappa}\rangle - \langle P_{\alpha\beta}\rangle\langle P_{\gamma\kappa}\rangle\right) + \frac{2Nk_BT}{\Omega_0}\left(\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\kappa} + \delta_{\alpha\kappa}\delta_{\beta\gamma}\right) + \langle\chi_{\alpha\beta\gamma\kappa}\rangle. \qquad (5)$$

Here angular brackets symbolize the averaging over time and Ω0=deth0 is reference volume for the model system. First term is fluctuation and indicates the contribution from the fluctuation of the microscopic stres tensor Pij. Second term is temperature correction term which represents the kinetic energy contribution and the last term denotes the contribution of the Born term to elastic constants.

The bulk modulus can be determined from

$$B = (C_{11} + 2C_{12})/3 \qquad (6)$$

In addition, shear modulus, Gv, GR and G are calculated from the Voigt-Reuss-Hill arithmetic approximation based on the Voigt and Reuss bounds [43, 44].

$$G_V = \frac{C_{11}-C_{12}+3C_{44}}{5} \quad (7)$$

$$G_R = \frac{5(C_{11}-C_{12})C_{44}}{4C_{44}+3(C_{11}-C_{12})}. \quad (8)$$

The arithmetic average of Voigt and Reuss bounds is called as Voigt-Reuss-Hill approximations

$$G = \frac{G_V+G_R}{2}. \quad (9)$$

Poisson's ratio [39] can be determined from

$$\nu = \frac{C_{12}}{C_{11}+C_{12}}. \quad (10)$$

From the calculated values of the bulk modulus and Poisson's ratio we have also estimated the Young modulus

$$Y = 3B(1-2\nu). \quad (11)$$

Specific heat can be determined from the differential of the enthalpy as follows

$$C_p(T) = \left(\frac{\partial H(T)}{\partial T}\right)_p \quad (12)$$

Thermal expansion coefficient is calculated by using the following relation;

$$\alpha_p(T) = -\frac{1}{a(T)}\left(\frac{\partial a(T)}{\partial T}\right)_p. \quad (13)$$

Results and discussion

Lattice parameter, cohesive energy, enthalpy and density

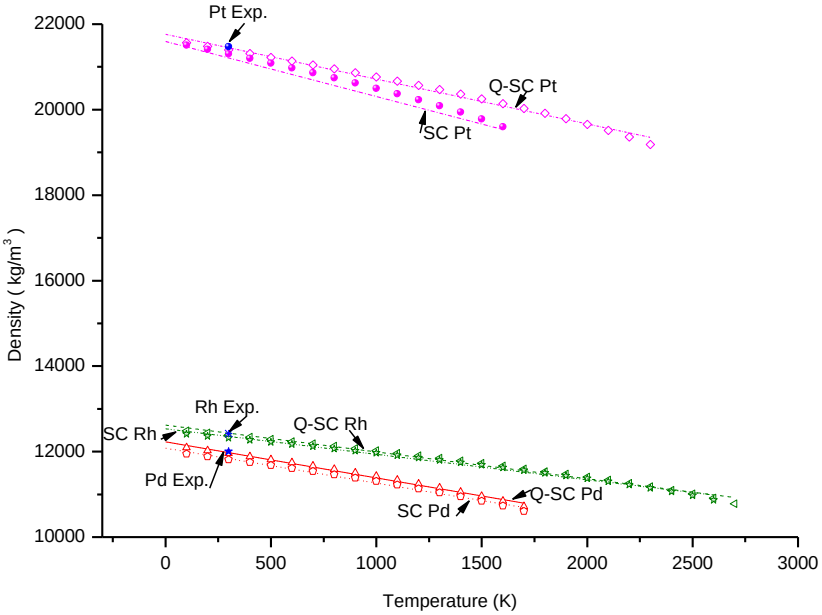
Lattice constant, cohesive energy, density and enthalpy are evaluated in TPN dynamics. The results are given in Table 2. These properties are calculated for both Q-SC and SC potentials.Results are compared to experimental values. The errors found to be very small. The results of Q-SC calculations are in better agreement with the experimental data [36, 37], comparing to SC potential data. For instance, lattice parameter results calculated from Q-SC potential for Pd, Pt and Rh pure metals indicate approximately the deviations of 0.13 %, 0.18 % and 0.16 %, respectively, at 300 K. These deviations are evaluated as 0.54 %, 0.48 % and 0.37 % by SC potential parameters results. Similarly, deviations for density results of Pd, Pt and Rh pure metals calculated from Q-SC potential are 0.69 %, 0.49 % and 0.27 %, respectively, while are being calculated as 1.87 %, 0.92 % and 0.85 % from SC potential at 300 K.

Table 2. Lattice parameter (a), density (ρ), cohesive energy (Ec), enthalpy (H) for Pd, Pt and Rh pure metals calculated from TPN ensemble at different temperatures using Q-SC and SC potential parameters. At each row, the first number gives MD simulation result calculated from Q-SC potentials while the second number gives the SC potentials. The numbers in parantheses are the available experimental value. The experimental density values of Pd and Pt are taken from ref. [36]. The experimental values of density for Rh and experimental lattice parameters are taken from ref. [37].

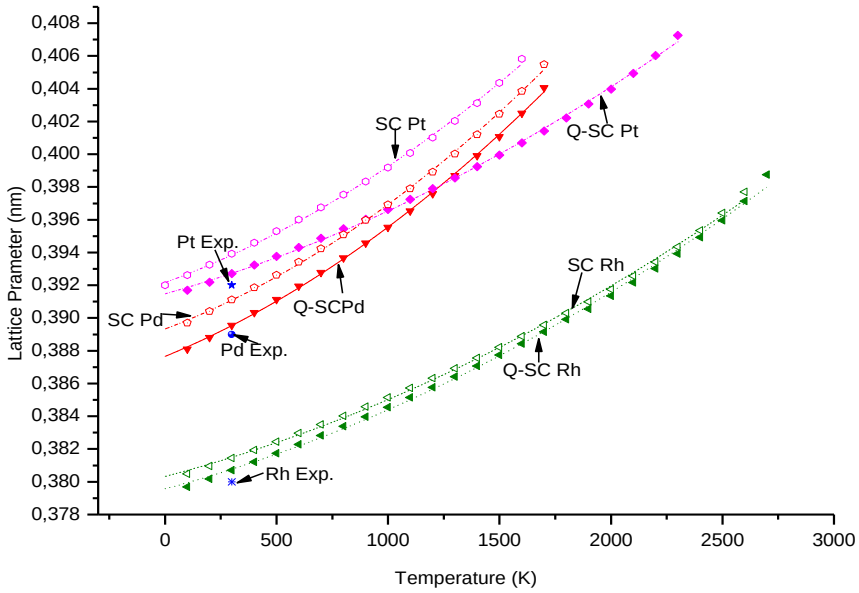
Metals	T (K)	a (Å)	ρ (g/cm3)	H (kJ/mol)	Ec (kJ/mol)
Pd	100	3.880, 3.897	12.091, 11.942 (12.065)	-375.361, -377.618	-375.364, -377.620
	200	3.888, 3.904	12.024,11.878 (12.051)	-372.819, -375.084	-372.822, -375.087
	300	3.895, 3.911 (3.89)	11.955, 11.813 (12.038)	-370.264, -372.523	-370.260, -372.524
	500	3.911, 3.926	11.812, 11.677	-365.008, -367.298	-365.013, -367.298
	700	3.927, 3.942	11.663, 11.535	-359.642, -361.934	-359.645, -361.938
	1000	3.955, 3.969	11.422, 11.303	-351.204, -353.514	-351.212, -353.516
	1200	3.975, 3.989	11.245, 11.133	-345.241, -347.582	-345.247, -347.584
Pt	100	3.916, 3.926	21.561, 21.508	-563.129, -562.921	-563.128, -562.923
	200	3.921, 3.932	21.479, 21.408	-560.625, -560.376	-560.625, -560.375
	300	3.927, 3.939 (3.92)	21.394, 21.303 (21.50)	-558.057, -557.813	-558.057, -557.816
	500	3.937, 3.952	21.222, 21.087	-552.893, -552.611	-552.897, -552.619
	700	3.948, 3.967	21.044, 20.861	-547.647, -547.291	-547.652, -547.293
	1000	3.966, 3.991	20.765, 20.498	-539.595, -538.945	-539.598, -538.953
	1200	3.978, 4.010	20.568, 20.232	-534.053, -533.048	-534.059, -533.060
Rh	100	3.796, 3.804	12.487, 12.408	-555.378, -552.171	-555.378, -552.169
	200	3.801, 3.809	12.437, 12.362	-552.806, -549.642	-552.807, -549.642
	300	3.806, 3.814 (3.80)	12.387, 12.314 (12.42)	-550.228, -547.089	-550.231, -547.090
	500	3.817, 3.824	12.285, 12.217	-545.032, -541.926	-545.038, -541.933
	700	3.828, 3.834	12.181, 12.118	-539.782, -536.702	-539.782, -536.709
	1000	3.845, 3.851	12.018, 11.963	-531.720, -528.672	-531.723, -528.680
	1200	3.857, 3.863	11.904, 11.854	-526.161, -523.159	-526.168, -523.165

In order to present comparison of solid properties which are calculated from Q-SC and SC potential parameters, density, lattice parameter and enthalpy as a function of temperature for Pd, Pt and Rh metals are given in the figs. 1(a), (b) and (c), respectively. When we examine the figures, we see that the curves obtained from Q-SC potential parameters are closer to experimental data than those of SC potential parameters. It can be said that the deviations from experimental values increase parallel to increasing temperature for both SC and Q-SC potentials.

(a)



(b)



(c)

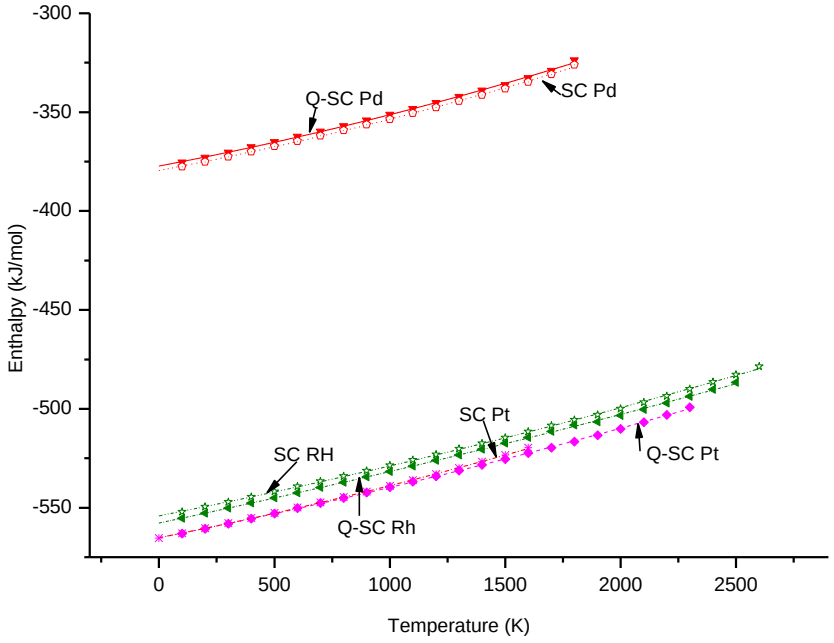


Figure1. (a) Density, (b) lattice parameter and (c) enthalpy of Pd, Pt and Rh pure metals as afunction of temperature for Q-SC and SC potential parameters along with experimental data [36,37].

Specific heat capacity and thermal expansion coefficient

The enthalpy is calculated from the TPN ensemble. The calculated enthalpy results are fitted to a quadratic polynominal using the data below the melting temperature in order to investigate the specific heat capacity as a function of temperature. Fitted data lie between 100 and 1800 K for Pd,

100 and 3000 K for Pt, 100 and 3500 K for Rh. This quadratic polynominal may be chosen as follows:

$$H(T) = a + bT + cT^2 \ (kJ\ mol^{-1}). \qquad (14)$$

Where, T is the temperature. Specific heat capacity can be calculated by taking the first derivative of equation (14). We obtain a, b and c from fitted results of enthalpy data calculated from both Q-SC potential and SC potential parameters at each temperature. The coefficients of thermal expression (a, b and c) in eq. (14), simulated results calculated from Q-SC and SC potantials and experimental data [49] are given in Table 3.

Table 3. Specific heat capacity calculated from both Q-SC potential and SC potential parameters for Pd, Pt and Rh pure metals and coefficients of poliynomial function used to find the heat capacity of metals. Available experimental data [49] are given in the last column at 300 K.

					Cp (kJ mole -1 K-1)	
Metals	A	b x 10-4	c x 10-6	Potential model	Present work	Experiment
Pd	-377.237	220.986	3.849	Q-SC	0.0244084	0.02598
	-379.467	219.023	3.987	SC	0.0242947	
Pt	-565.137	230.903	2.290	Q-SC	0.0244646	0.02586
	-565.171	232.091	3.109	SC	0.0250745	
Rh	-557.727	245.878	1.430	Q-SC	0.0254463	0.02498
	-554.121	231.345	2.110	SC	0.0244006	

When we look at the Table 3, we see that the simulated results and the experimental data given for metals are close to each other. The Q-SC simulated results are in better agreement with experimental data [49] than that of SC simulated ones, except for Pt. For example, heat capacity results calculated from Q-SC potential for Pd, Pt and Rh pure metals indicate approximately to be the deviations of 6.04 %, 5.39 % and 1.86 % respectively, at 300 K. These deviations for SC are calculated approximately to be 6.48 %, 3.03 % and 2.31 %, respectively, at 300 K.
In order to examine the thermal expansion behaviour, we have fitted lattice parameter data below the melting temperature as a function of temperature, to a quadratic polynominal as in heat capacity calculation

$$a(T) = a + bT + cT^2 . \qquad (15)$$

Thermal expansion coefficient can be evaluated by taking the first derivative of equation (15). Table 4 includes the coefficients of Eq. (15), and the simulated results and experimental data at 300 K. Thermal expansion coefficients calculated from Q-SC ve SC potential parametres are more or less similar. But these values are greater than the experimental values [49].

Table 4. Thermal expansion coefficient calculated from both Q-SC potential and SC potential parameters for Pd, Pt and Rh pure metals and coefficients of poliynomial function used to find the thermal expansion coefficient of metals. Available experimental data [49] are given in last column at 300 K.

Metals	a x 10-3	b x 10-8	c x10-11	Potential model	αp x 10-5 (K-1) Present work	Experiment
Pd	387.656	560.125	229.666	Q-SC	1.7916	1.18
	389.332	514.141	245.655	SC	1.6914	
Pt	391.477	380.229	125.834	Q-SC	1.1605	0.88
	392.163	499.900	208.946	SC	1.5873	
Rh	379.566	365.656	117.558	Q-SC	1.1458	0.82
	380.327	356.563	112.639	SC	1.1120	

Elastic constants, bulk modulus, shear modulus and Young's modulus

Elastic constants are calculated by imposing an external strain on the crystal, relaxing any internal parametres to obtain the energy as a function of the strain, and numerically solving for the elastic constants as the curvature of the energy versus strain curve [38]. The elastic constants of solid provide information on the stability and stiffness of materials. The largest contribution to the elastic constants comes from the Born-term in Eq. (5).

In this work, we obtain elastic constants from EVN simulations of 50000 steps for Pd, Pt and Rh pure metals. EVN simulations are performed at temperature between 100 and 2500 K for Pd, 100 and 3000 K for Pt, 100 and 3500 K for Rh depending on their melting points. However, solid state properties are evaluated between 100 K and the melting temperatures. Elastic constants (C11, C12 and C44), bulk modulus (B), Cauchy pressure (C12-C44), Cauchy's ratio (C12/C44), shear modulus (Gv, GR and G), G/B ratio, poisson ratio (ν) and Young's modulus (Y) results are listed in Tables 5, 6 and 7 for Pd, Pt and Rh pure metals, along with experimental and other calculated results. Here, bulk modulus (B), shear modulus (Gv, GR and G), G/B ratio, Cauchy pressure (C12-C44), Cauchy's ratio (C12/C44), poisson ratio (ν) and Young's modulus (Y) are calculated using C11, C12 and C44 elastic constants. The Voigt-Reuss-Hill arithmetic approximation based on the Voigt and Reuss bounds are used for G, ν and Y [43,44].

The calculated elastic constants and bulk modulus are in a good agreement with experiments [36,42] and theoretical studies such as tight-binding (TB), third-neighbor EAM model, long-range FS model, linear augmented plane wave (LAPW) and model pseudopotential (MP) approaches [15,18,38-41].

When we examine Table 5, we see that the elastic constants and bulk modulus calculated from SC potential parameters are closer to the experimental data than those of Q-SC potential parameters, except for C44 of the Pd. C11, C12, C44 and B results calculated from Q-SC potential for Pd show approximately the deviations of 10.6 %, 20.1 %, 13 %, and 10.8 % respectively, at 300 K. These deviations for SC potantial are calculated approximately to be 0.8 %, 6.6 %, 14.2 % and 2.6 %, respectively, at 300 K.

Table 5: Elastic constants C_{11}, C_{12}, and C_{44} (in GPa) calculated from Q-SC and SC potential parametres and Bulk modulus (in GPa), (C_{12}/C_{44}) Canchy's ratio, Cauchy pressure (C_{12}-C_{44}) (in GPa), G_v, G_R and G shear modülüs (in GPa) based on using Voigt-Reuss-Hill arithmetic approximation, (ν) Poisson's ratio and (Y) Young modulus (in GPa) calculated by using elastic constants for Pd pure metal. In the table, some experimental and other theoretically calculated results are also listed for comparison.

				Other theoretical results					
Pd	T (K)	Present work Q-SC	Present work SC	Exp. (36)	(38)	(39)	(15)	(40)	(18)
C_{11}	300	202.806	228.909	227	233	228.7	232	218	248
C_{12}	300	140.587	164.256	176	163	204	178	184	176
C_{44}	300	81.392	82.255	72	63	83.9	73	65	93
B	300	161.327	185.807	181	212	212.8	196	195	200
C_{12}-C_{44}	300	59.194	82.001	-	-	-	-	-	-
C_{12}/C_{44}	300	2.491	2.782	-	-	-	-	-	-
G_V	300	61.279	62.283	-	-	-	-	-	-
G_R	300	49.432	50.843	-	-	-	-	-	-
G	300	55.356	56.563	-	-	11.95	26	17	36
G/B	300	0.3431	0.3044	-	-	-	-	-	-
ν	300	0.4094	0.4177	-	-	0.4724	-	-	-
Y	300	87.691	91.662	-	-	35.19	-	-	-

Table 6, shows that the elastic constants and bulk modulus calculated from SC potential parameters are closer to the experimental values than those of Q-SC potential parameters, except for C11 of the Pt, as discussed in the Table 5. C11, C12, C44 and B results calculated from Q-SC potential for Pt present deviations of 11.2 %, 9 %, 37.7 %, and 8.2 % respectively, at 300 K. These deviations for SC potential are calculated to be 16.1 %, 3.9 %, 14.1 % and 7.2 %, respectively, at 300 K.

Table 6. Elastic constants C_{11}, C_{12}, and C_{44} (in GPa) calculated from Q-SC and SC potential parametres and Bulk modulus (in GPa), (C_{12}/C_{44}) Canchy's ratio, Cauchy pressure (C_{12}-C_{44}) (in GPa), G_v, G_R and G shear modulus (in GPa) based on Voigt-Reuss-Hill arithmetic approximation, (ν) Poisson's ratio and (Y) Young modulus (in GPa) calculated by using elastic constants for Pt pure metal. In the table, some experimental and other theoretically calculated results are also listed for comparison.

				Other theoretical results					
Pt	T (K)	Present work Q-SC	Present work SC	Exp. (36)	(38)	(39)	(15)	(40)	(18)
C_{11}	300	308.092	291.085	347	380	339.9	341	303	314
C_{12}	300	228.392	241.060	251	257	282.1	273	273	258
C_{44}	300	104.692	65.261	76	71	86.5	91	68	74
B	300	254.958	257.735	278	318	301.4	296	283	277
C_{12}-C_{44}	300	123.699	175.799	-	-	-	-	-	-
C_{12}/C_{44}	300	2.942	4.460	-	-	-	-	-	-
G_V	300	78.755	49.161	-	-	-	-	-	-
G_R	300	63.416	39.705	-	-	-	-	-	-
G	300	71.086	44.433	-	-	28.90	34	15	28
G/B	300	0.2788	0.1724	-	-	-	-	-	-
ν	300	0.4257	0.4529	-	-	0.4535	-	-	-
Y	300	113.629	72.6866	-	-	84.01	-	-	-

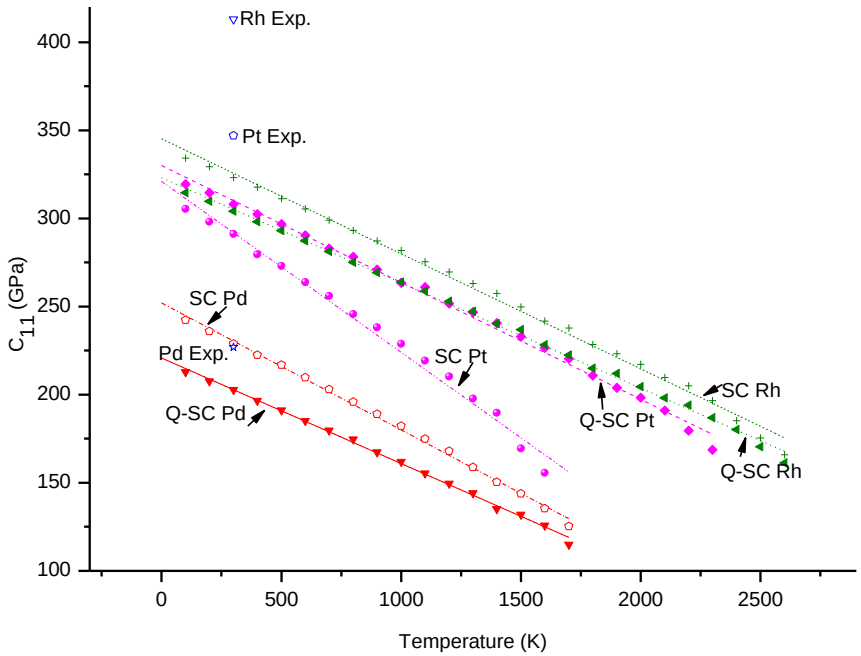
In Table 7, C11,C12, C44 and B results calculated from Q-SC potential for Rh show the deviations of 26.8%, 1%, 25.1%, and 13.3% respectively, at 300 K. These deviations for SC potential are calculated to be 22.2%, 13.1 %, 28.4 % and 5 %, respectively, at 300 K.

Table 7: Elastic constants C_{11}, C_{12}, and C_{44} (in GPa) calculated from Q-SC and SC potential parametres and Bulk modulus (in GPa), (C_{12}/C_{44}) Canchy's ratio, Cauchy pressure (C_{12}-C_{44}) (in GPa), G_v, G_R and G shear modulus (in GPa) based on Voigt-Reuss-Hill arithmetic approximation, (ν) Poisson's ratio and (Y) Young modulus (in GPa) calculated by using elastic constants for Rh pure metal. In the table, some experimental and other theoretically calculated results are also listed for comparison.

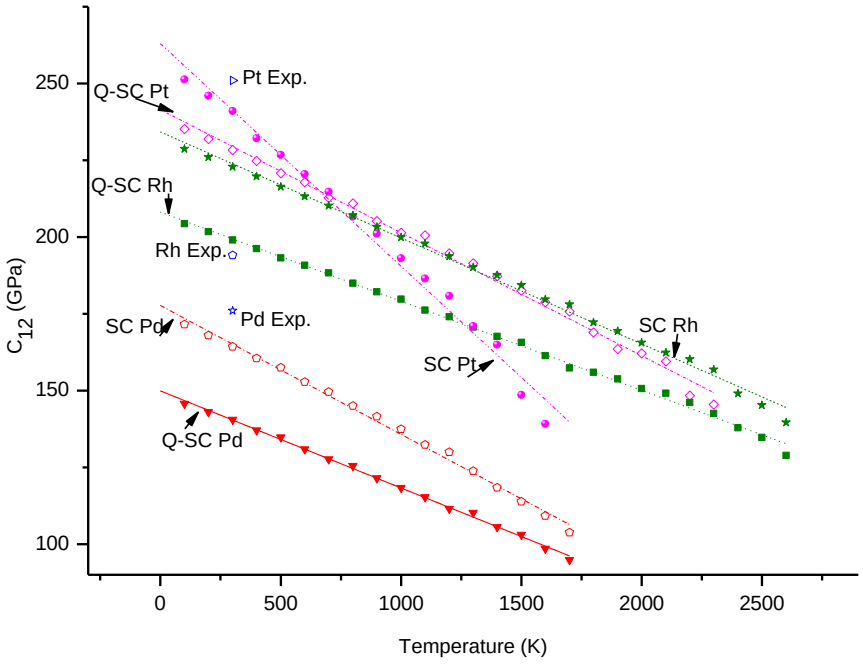
				Other theoretical results					
Rh	T (K)	Present work Q-SC	Present work SC	Exp. (42)	(38)	(15)	(18)	(36)	(41)
C_{11}	300	304.178	323.272	416	491	392	340	413	386
C_{12}	300	198.981	222.855	197	171	237	232	194	171
C_{44}	300	137.738	131.577	184	260	199	143	184	172
B	300	234.047	256.327	270	306	289	269	270	243
C_{12}-C_{44}	300	61.243	91.277	-	-	-	-	-	-
C_{12}/C_{44}	300	2.208	2.456	-	-	-	-	-	-
G_V	300	103.682	99.030	-	-	-	-	-	-
G_R	300	83.605	79.828	-	-	-	-	-	-
G	300	93.643	89.426	-	-	77	54	-	142
G/B	300	0.4001	0.3488	-	-	-	-	-	-
ν	300	0.3954	0.4080	-	-	-	-	-	0.26
Y	300	146.798	141.393	-	-	-	-	-	357

Elastic constants and bulk modulus calculated from Q-SC and SC potential can be compared from figs. 2(a), (b), (c) and (d). When we examine the figures, in general, we see that the curves obtained from SC potential parameters are closer to the experimental data than those of Q-SC potential parameters.

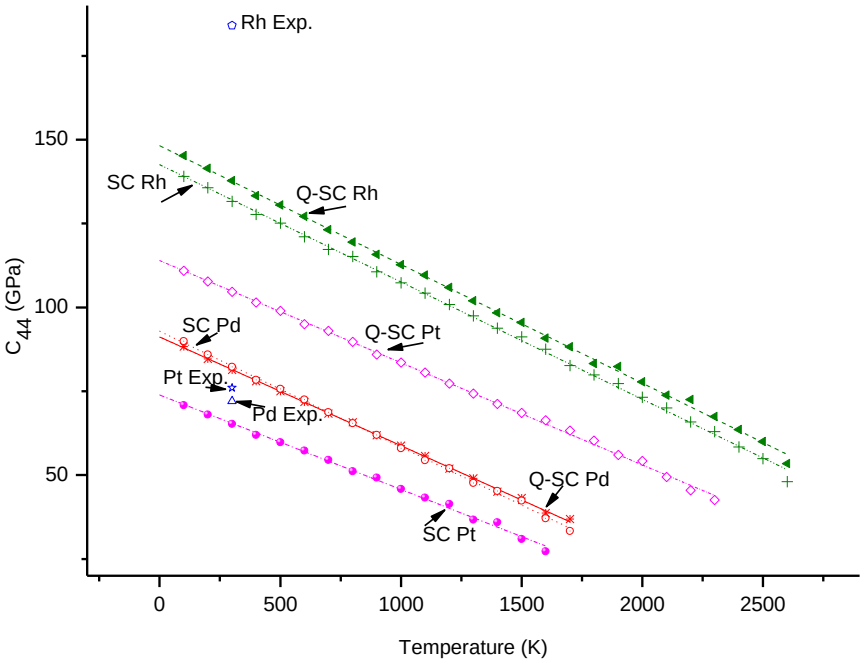
(a)



(b)


Q-SC Pt
Pt Exp.
Q-SC Rh
Rh Exp.
SC Pd
Pd Exp.
SC Rh
SC Pt
Q-SC Pd
C12 (GPa)
Temperature (K)
250
200
150
100
0
500
1000
1500
2000
2500

(c)


Rh Exp.
SC Rh
Q-SC Rh
SC Pd
Q-SC Pt
Pt Exp.
Pd Exp.
Q-SC Pd
SC Pt
C44 (GPa)
Temperature (K)
150
100
50
0
500
1000
1500
2000
2500

(d)

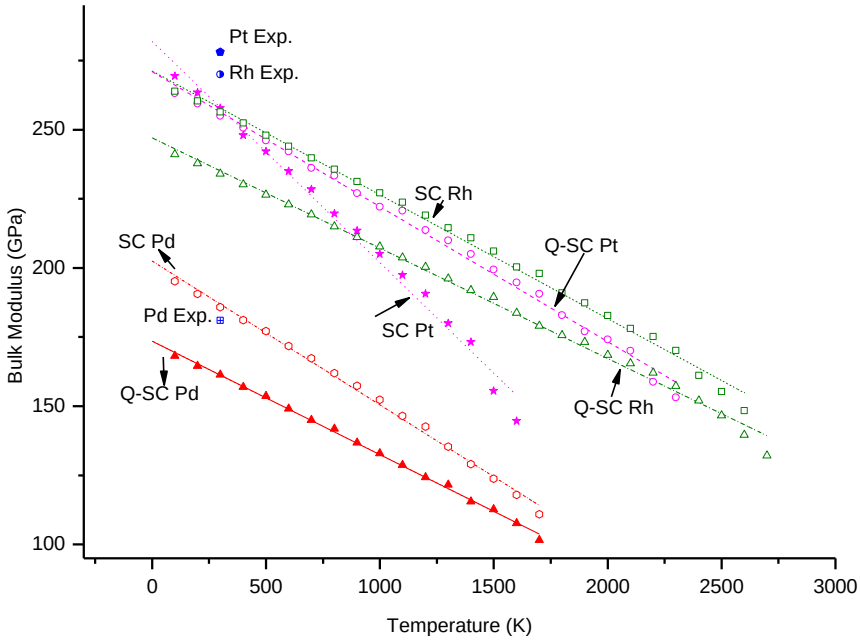


Figure 2. Elastic constants (a) C11, (b) C12 (c) C44 and bulk modulus B of Pd, Pt and Rh pure metals as a function of temperature for Q-SC and SC potential parameters along with experimental data [36,42].

The bulk modulus (B) is described as the measure of average bond strength of materials [41, 45]. It presents a strong correlation with the cohesive energy or the binding energy of the atoms in the crystal. We see that the average atomic bond strength of materials can be determined from the calculated bulk modulus by using elastic constants. The average atomic bond strength of Pd, Pt and Rh pure metals based on the calculated bulk modulus (B) by using Q-SC potential parameters follow the order from large to small as Pt > Rh > Pd. This ordering is, the same for the average atomic bond strength of Pd, Pt and Rh pure metals based on the calculated bulk modulus (B) by using SC potential parameters.

The shear modulus (G) is related with the resistance to plastic deformation while the bulk modulus (B) shows resistant to bond rupture. Therefore, it was reported that the ductile/brittle behaviour of materials could be related empirically to their elastic constants by the ratio of G/B or Poisson's ratio [46, 47]. If G/B >0.5 or ν<1/3, the material is brittle. Otherwise, the material is ductile [45, 46]. It can be said from our study that G/B is smaller than 0.5 and Poisson's ratio is larger than 1/3 for Pd, Pt and Rh pure metals with in both Q-SC and SC potentials. As can be seen from the ratio G/B or Poisson's ratio (ν), all of Pd, Pt and Rh pure metals behave in a ductile manner. Accordingly, ductility of Pd, Pt and Rh pure metals follow the order from large to small as Pt > Pd > Rh. For Cauchy pressure, Pettifor [48] has suggested that it could be used to describe the angular character of atomic bonding in metals and compounds, which reflects the ductile/brittle behaviors of materials. The Cauchy pressure is positive for metallic bonding while it is negative for the directional bonding. The ductile materials show positive Cauchy pressure; otherwise, the material is brittle. If we look to the Cauchy pressure of Pd, Pt and Rh, we see that Cauchy pressure of all of considered metals are positive. These show that Pd, Pt and Rh pure metals are ductile in nature.

Conclusion

In this work, we presented a wide range of properties of Pd, Pt and Rh pure metals. We made comparison between the simulation results obtained by using to Q-SC and SC potential parameters. We compared our results to experimental ones and theoretically calculated values available in literature. The simulation results are closer to the experimental and other theoretical results. Q-SC potential parameters provided fairly accurate temperature-dependent properties at different temperatures.

We analyzed elastic constants C11, C12 and C44 to examine the elastic properties of considered materials. We found bulk modulus (B), Cauchy pressure (C12-C44), Cauchy's ratio (C12/C44), shear modulus (Gv, GR and G) that uses the Voigt-Reuss-Hill arithmetic approximation based on the Voigt and Reuss bounds, G/B ratio, Poisson's ratio (ν) and Young's modulus (Y) results by using elastic constants results.

Examining these results, we can make some comments on the properties of these metals. First, we saw that all of Pd, Pt and Rh pure metals are ductile. Comparing shear modulus, the hardest metal is Rh, middle is Pt and least hard is Pd. Comparing elastic constants, the most plastic is metal is Pt, then Rh and Pd in between them. Comparing cohesive energies, the hardest bounded metal is Pt, then Rh and Pd.

It is seen that MD simulation with SC and Q-SC potential can be used to interpret the technological properties of Pd, Pt and Rh metals.

References

1. Landau D.P., Mon K.K., Schuttler H.B. (1995). *computer simulation studies in condensed- matter physics VIII.* Springer.
2. Ohno K., Esfarjani K., Kawazoe Y. (1999). *Computational material science.* Springer.
3. Allen M.P., Tildesley D.J. (1987). *Computer simulation of liquids*. Clarendon Press.
4. Rapaport D.C. (1995). *The art of molecular dynamics simulation*. Cambridge University Press.
5. Haile J.M., Molecular dynamics simulation (1992). Wiley-Interscience publication.
6. Davoodi, J., Ahmadi, M., & Rafii-Tabar, H. (2010). Molecular dynamics simulation study of thermodynamic and mechanical properties of the Cu–Pd random alloy. *Materials Science and Engineering: A*, *527*(16-17), 4008-4013.
7. Ciftci, Y. O., Colakoglu, K., Ozgen, S., & Kazanc, S. (2007). The calculation of some thermoelastic properties and pressure–temperature (P–T) diagrams of Rh and Sr using molecular dynamics simulation. *Journal of Physics: Condensed Matter*, *19*(32), 326204.
8. Feraoun, H., Esling, C., Dembinski, L., Grosdidier, T., Coddet, C., & Aourag, H. (2002). A new form of the Sutton–Chen potential for the Cu–Ag alloys. *Superlattices and microstructures*, *31*(6), 297-313.
9. Kart, S. Ö., Tomak, M. E. H. M. E. T., & Çağın, T. (2005). Phonon dispersions and elastic constants of disordered Pd–Ni alloys. *Physica B: Condensed Matter*, *355*(1-4), 382-391.
10. Çağın, T., Dereli, G., Uludoğan, M., & Tomak, M. E. H. M. E. T. (1999). Thermal and mechanical properties of some fcc transition metals. *Physical review B*, *59*(5), 3468.
11. Kazanc, S., Çiftci, Y. Ö., Çolakoğlu, K., & Ozgen, S. (2006). Temperature and pressure dependence of the some elastic and lattice dynamical properties of copper: a molecular dynamics study. *Physica B: Condensed Matter*, *381*(1-2), 96-102.
12. Daw, M. S., & Baskes, M. I. (1984). Embedded-atom method: Derivation and application to impurities, surfaces, and other defects in metals. *Physical Review B*, *29*(12), 6443.
13. Finnis, M. W., & Sinclair, J. E. (1984). A simple empirical N-body potential for transition metals. *Philosophical Magazine A*, *50*(1), 45-55.
14. Ackland, G. J., & Finnis, M. W. (1986). Semi-empirical calculation of solid surface tensions in body-centred cubic transition metals. Philosophical Magazine A, 54(2), 301-315.
15. Cleri, F., & Rosato, V. (1993). Tight-binding potentials for transition metals and alloys. *Physical Review B*, *48*(1), 22.
16. Ercolessi, F., Parrinello, M., & Tosatti, E. (1988). Simulation of gold in the glue model. Philosophical magazine A, 58(1), 213-226.
17. Nørskov, J. K. (1982). Covalent effects in the effective-medium theory of chemical binding: Hydrogen heats of solution in the 3 d metals. *Physical Review B*, *26*(6), 2875.
18. Sutton A.P. (1990). *Philosophical Magazine Letter.* 61139.

19. Rafii-Tabar, H., & Sulton, A. P. (1991). Long-range Finnis-Sinclair potentials for fcc metallic alloys. *Philosophical Magazine Letters*, *63*(4), 217-224.
20. Kob, W. (1999). Computer simulations of supercooled liquids and glasses. *Journal of Physics: Condensed Matter*, *11*(10), R85.
21. Çağın T., Qi Y., Li H., Kimura Y., İkeda H., Jonshon W.L., Goddard III, W.A. (1999). *MRS Symposium Series*, 554, 43.
22. Qi, Y., Çağın, T., Kimura, Y., & Goddard III, W. A. (1999). Molecular-dynamics simulations of glass formation and crystallization in binary liquid metals: Cu-Ag and Cu-Ni. *Physical review B*, *59*(5), 3527.
23. Qi, Y., Çağin, T., Kimura, Y., & Goddard, W. A. (2001). Viscosities of liquid metal alloys from nonequilibrium molecular dynamics. *Journal of computer-aided materials design*, *8*, 233-243.
24. Qi, Y., Çağin, T., Johnson, W. L., & Goddard III, W. A. (2001). Melting and crystallization in Ni nanoclusters: The mesoscale regime. *The journal of chemical physics*, *115*(1), 385-394.
25. Strachan A., Çağın T., Goddard III, W.A. (2001). *Physical Review B*, 63 0601103.
26. Ikeda, H., Qi, Y., Cagin, T., Samwer, K., Johnson, W. L., & Goddard III, W. A. (1999). Strain rate induced amorphization in metallic nanowires. *Physical Review Letters*, *82*(14), 2900.
27. Lee, H. J., Cagin, T., Johnson, W. L., & Goddard III, W. A. (2003). Criteria for formation of metallic glasses: The role of atomic size ratio. *The Journal of chemical physics*, *119*(18), 9858-9870.
28. Kart, H. H., Tomak, M. E. H. M. E. T., Uludoğan, M., & Çağın, T. (2005). Thermodynamical and mechanical properties of Pd–Ag alloys. *Computational Materials Science*, *32*(1), 107-117.
29. Andersen, H. C. (1980). Molecular dynamics simulations at constant pressure and/or temperature. *The Journal of chemical physics*, *72*(4), 2384-2393.
30. Parrinello, M., & Rahman, A. (1980). Crystal structure and pair potentials: A molecular-dynamics study. *Physical review letters*, *45*(14), 1196.
31. Nosé, S. (1984). A unified formulation of the constant temperature molecular dynamics methods. *The Journal of chemical physics*, *81*(1), 511-519.
32. Çağin, T., & Pettitt, B. M. (1991). Molecular dynamics with a variable number of molecules. *Molecular physics*, *72*(1), 169-175.
33. Hoover, W. G. (1985). Canonical dynamics: Equilibrium phase-space distributions. *Physical review A*, *31*(3), 1695.
34. Çain, T., & Ray, J. R. (1988). Third-order elastic constants from molecular dynamics: Theory and an example calculation. *Physical Review B*, *38*(12), 7940.
35. Dereli, G., Cagin, T., Uludogan, M., & Tomak, M. (1997). Thermal and mechanical properties of Pt-Rh alloys. *Philosophical Magazine Letters*, *75*(4), 209-218.
36. Simmons G., Wang H. (1971). *Single crystal elastic constants and calculated aggregated properties*. MIT Press.
37. Kittel C. (1966). *Introduction to solid state physics*. Wiley.
38. Mehl, M. J., & Papaconstantopoulos, D. A. (1996). Applications of a tight-binding total-energy method for transition and noble metals: Elastic constants, vacancies, and surfaces of monatomic metals. *Physical Review B*, *54*(7), 4519.
39. Baria J.K. (2004). Czech. Journal of Physics, 54(4).
40. Wolf, D., Okamoto, P. R., Yip, S., Lutsko, J. F., & Kluge, M. (1990). Thermodynamic parallels between solid-state amorphization and melting. *Journal of Materials Research*, *5*(2), 286-301.
41. Chen, K., Zhao, L. R., Tse, J. S., & Rodgers, J. R. (2004). Elastic properties of platinum Rh and Rh3X compounds. *Physics Letters A*, *331*(6), 400-403.
42. Singh, N. (1999). Theoretical study of structural energy, phonon spectra, and elastic constants of Rh and Ir. *Pramana*, *52*, 511-523.
43. Nakamura, M. (1994). In: Westbrook J.H., Fleischer, R.L. (Eds.), *Intermetallic Compounds* (Vol. 1, p.873) Wiley.
44. Luo, F., Chen, X. R., Cai, L. C., & Wu, Q. (2011). Thermoelastic properties of nickel from molecular dynamic simulations. *J. At. Mol. Sci*, *2*, 10-19.
45. Vitos L., Korzhavyi P.A., Johansson B. (2002). *Physical Review Letters*, 88 155501-1.
46. Pugh, S. F. (1954). XCII. Relations between the elastic moduli and the plastic properties of polycrystalline pure metals. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *45*(367), 823-843.
47. Franthsevich I. N., Voronov F.F., Bokuta S. A. (1982). In Frantsevich, I. N.(Ed.), *Elastic constants and elastic moduli of metals and insulators handbook* (pp. 60–180). Naukova Dumka.
48. Pettifor, D. G. (1992). Theoretical predictions of structure and related properties of intermetallics. *Materials science and technology*, *8*(4), 345-349.
49. Vines, R. F. (1941). The platinum metals and their alloys. *(No Title)*.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, корреспондент автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	**Сарыбек Й.**– PhD, Сакарья университеті, Сакарья қ., Түркия, e-mail: alicoruhlu@gmail.com
	Sarıbek Y. – PhD, Sakarya University, Sakarya, Turkey, e-mail: alicoruhlu@gmail.com
	Сарыбек Й. – PhD, Университет Сакарья, г. Сакарья, Турция, e-mail: alicoruhlu@gmail.com
2	**Чорух А.** – профессор, PhD, Сакарья университеті, Сакарья қ., Түркия, e-mail: coruh@sakarya.edu.tr
	Çoruh A. – professor, PhD, Sakarya University, Sakarya, Turkey, e-mail: coruh@sakarya.edu.tr
	Чорух А. – профессор, PhD, Университет Сакарья, г. Сакарья, Турция, e-mail: coruh@sakarya.edu.tr
3	**Сайдахметов П. -** ғылым кандидаты, М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент қ., Қазақстан, e-mail: timpf_ukgu@mail.ru
	Saidakhmetov P. - candidate of Science, M.Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan, e-mail: timpf_ukgu@mail.ru
	Сайдахметов П. - кандидат наук, Южно-Казахстанский университет им. М.Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан, e-mail: timpf_ukgu@mail.ru
4	**Томак М. -** профессор, доктор, Таяу Шығыс техникалық университеті, Анкара қ., Түркия, e-mail: alicoruhlu@gmail.com
	Tomak M. - professor doctor, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, e-mail: alicoruhlu@gmail.com
	Томак М. - профессор доктор, Ближневосточный технический университет, г. Анкара, Турция, e-mail: alicoruhlu@gmail.com

ИНФОРМАТИКА

UDC 15.21.69
SRSTI 20.01.07
https://doi.org/10.47526/2025-1/2524-0080.22

Rustamov N.T.[1], Amirtayev K.B.[2]
[1]*Professor Doctor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: nassim.rustamov@ayu.edu.kz*
[2]*Assistant Professor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: kanat.amirtayev@ayu.edu.kz*

COMPUTER SIMULATION OF HUMAN PSYCHOLOGICAL SYMBIOSIS
АДАМНЫҢ ПСИХОЛОГИЯЛЫҚ СИМБИОЗЫН КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУ
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО СИМБИОЗА ЧЕЛОВЕКА

Abstract. *In this paper, a mathematical model is proposed for assessing the mental symbiosis of a person associated with the power of so-called mental dependence adversely affecting consciousness. Such a model is based on the formalization of a person's mental potential, the power of this potential and mental energy. At the same time, it is argued that it is the potential of the psyche that determines the degree of symbiosis of dependence. Whenever there is a transaction between a person and the external environment, the order of our consciousness is disrupted, endangering the existing structure of mental potential, we find ourselves in a state of internal disorder or mental symbiosis. The outcome of which depends on the mental potential of the person involved in this transaction. Based on this definition, taking as a basis the relationship between the "Я-concept", fantasy Ф, and willpower* C_B C_B*, which characterize the potential of the individual's psyche, an analytical formula for estimating mental entropy (*$П_C$*) is proposed. It is shown that by numerically evaluating these parameters and comparing them, it is possible to determine the degree of symbiosis. Based on the concept of mental power and energy, the minimum mental energy required by a person to minimize mental symbiosis is estimated. The practicality of the proposed relationships between the psychological parameters of an individual "I am a concept", fantasy Ф, and willpower* C_B *is proved.*

Keywords: *mental symbiosis, mental transaction, mental potential, mental energy, mental power, minimal mental energy.*

Аңдатпа. *Бұл жұмыста санаға кері әсер ететін психикалық тәуелділік деп аталатын күшпен байланысты адамның психикалық симбиозын бағалаудың математикалық моделі ұсынылған. Мұндай модель адамның ақыл-ой әлеуетін, осы әлеуеттің күшін және ақыл-ой энергиясын ресімдеуге негізделген. Бұл ретте тәуелділік симбиозының дәрежесін психиканың потенциалы анықтайды деген пікір айтылады. Адам мен сыртқы орта арасында мәміле болған кезде, біздің санамыздың тәртібі бұзылып, психикалық әлеуеттің бар құрылымына қауіп төндіреді, біз ішкі бұзылулар немесе психикалық симбиоз жағдайында боламыз. Оның нәтижесі осы мәмілеге қатысушы адамның психикалық әлеуетіне байланысты. Осы анықтамаға сүйене отырып, жеке тұлғаның психикасының әлеуетін сипаттайтын "Я-концепция", фантазия Ф және ерік күші* C_B *арасындағы байланысты негізге ала отырып, психикалық энтропияны бағалаудың аналитикалық формуласы (*$П_C$*) ұсынылады. Осы параметрлерді сандық бағалау және оларды салыстыру арқылы симбиоздың дәрежесін анықтауға болатындығы көрсетілген. Ақыл-ой күші мен энергиясы тұжырымдамасына сүйене отырып, адамның ақыл-ой симбиозын барынша азайтуға қажетті минималды ақыл-ой энергиясы бағаланады. "Я концепция" жеке тұлғаның психологиялық параметрлері, фантазия Ф, ерік күші* C_B *арасындағы ұсынылған қатынастардың практикалық екендігі дәлелденді.*

Негізгі сөздер: *психикалық симбиоз, психика транзакты, психика потенциалы, психикалық энергия, психика күші, минималды психикалық энергия.*

Аннотация. *В данной работе, предлагается математическая модель оценки психического симбиоза человека, связанной с силой неблагоприятно воздействующего на сознание, так называемого, психической зависимости. Такая модель, строится на основе формализации психического потенциала человека, мощности этого потенциала и психической энергии. При этом утверждается, что именно потенциал психики определяет степень симбиоз зависимости. Всякий раз, когда происходит трансакт, человека с внешней средой нарушается упорядоченность нашего сознания, подвергая опасности существующей структуры психического потенциала, мы оказываемся в состоянии внутреннего беспорядка или психического симбиоза. Исход, которого зависит от психического потенциала участвующей в этом трансакте. Исходя из этого определения, принимая за основу связи между «Я-концепции», фантазии Ф, и силы воли* C_B *характеризующие потенциал психики индивида, предложена аналитическая формула для оценки психической энтропии (*$П_C$*). Показан что,*

численно оценивая эти параметры и сравнивая их, возможность определить степень симбиоза. На основе понятия мощности и энергии психики, оценивается минимальная психическая энергия, требуемая человеку для минимизации психического симбиоза. Доказывается практичность предложенных соотношений между психологическими параметрами индивида «Я-концепция», фантазия Ф, и силы воли C_B .

Ключевые слова: *психический симбиоз, трансакт психики, потенциал психики, психическая энергия, мощность психики, минимальная психическая энергия.*

Introduction

Symbiosis (from the Greek - "living together") as a psychological concept, it appeared in transactional analysis, developed by the American psychologist and psychiatrist Eric Bern in the 1960s-70s of the last century [1]. The proposed concept referred to biological symbiosis. Let's say that when two people interact, live or work together, they have ego states. And when a symbiosis occurs, in both people, one of their own ego states is devalued and excluded. Thus, one psychological personality structure is built for two people - this is called psychological symbiosis. This psychological process is referred to as $П_C$. The beginning of a transaction between two people is defined as the beginning of a symbiotic state and denoted as $П_C^c$.

One of the main factors adversely affecting consciousness is the so-called mental uncertainty, information that conflicts with pre-existing intentions and distracts us from fulfilling them. We call a similar situation in different words depending on what we are going through. Pain, fear, anxiety, and jealousy. In this case, the mental potential loses its mobility, becomes ineffective, and some information appears in the mind, and the goal already existing in the individual comes into conflict. Whenever incoming information disrupts the order of our consciousness, endangering the existing structure of goals and priorities, we find ourselves in a state of uncertainty to accept the ego of the transacting person or not. We will call this state before the symbiotic state. Prolonged exposure to this state can weaken us so much that a person loses the ability to control their attention and achieve their goals. And gradually succumbs to the ego of the person with whom he entered into the transaction. It is at this point that the process of psychological symbiosis begins, i.e. $П_C^c$. Naturally, the question arises how to evaluate this energy.

Psychology has accumulated a lot of material that allows us to trace and evaluate the main stages of personality formation, confirmed throughout life by a variety of influencing factors that generate $П_C^c$, of which three are important. It is clear that such a division is conditional [2]. The first is the biological factor. It includes the laws of biological maturation and aging. This factor affects a person's willpower (C_B). The second factor is the social environment, which unites all types of social influences: both the influence of our close friends and relatives, and the entire state structure. It is in the "Я"- "Я-concept" of a person that these factors are reflected. The third is a factor, a factor within a person's personal activity determined by his fantasy (Ф). Apparently, these factors determine the energetic properties of the human psyche, which are opposed, i.e. $П_C^c$ and they determine his life activity. Activity is the internal (mental) and external (physical) activity of a person, regulated by consciousness through the psyche. In order to be able to talk about activity, it is necessary to identify the presence of a conscious goal in a person's activity. Precisely, the goal reflects a person's sociality and shapes his Self. In the process of the transaction, the $П_C^c$ interferes with awareness of the other aspects of the activity - its motives, methods of execution. The results of such a transaction may be realized, or they may not be realized, they may not be fully realized or even not correctly. This is the role, i.e. $П_C^c$. All this is reflected in the process of the individual's psychological interaction not only with the elements of society [3]. The results of such mutual influence depend on how developed his Ф - fantasy is. Whatever this level of conscious activity may be, goal awareness always remains a necessary attribute of resistance on $П_C^c$. And for this you will need to spend a certain amount of mental energy. All this is regulated by C_B, the human willpower.

The aim of the work is to numerically assess the degree of mental symbiosis and to assess the necessary mental energy to escape from mental symbiosis.

Research method

The work [4] states that by its nature the human psyche has strength and resilience, based on these properties it affects its environment. It is these two properties of the human psyche that are expressed through its potential. Then the parameters of the potential of the human psyche are interconnected as follows:

$$U \approx \text{"Я "} \cdot (\text{С}_\text{в} + \Phi) \qquad (1)$$

where: *U* is the potential of the psyche, "Я"-"Я concept", $\text{С}_\text{В}$ is willpower, *Ф* is fantasy.

In terms of its content $(\text{С}_\text{В} + \Phi)$ - expresses the resistance of the psyche to $\Pi_\text{С}^\text{с}$, "Я" - expresses the strength of the human psyche. As you know, the social content of an individual is expressed in his goals, and the content of a person's goal is concentrated in the "Я", then, undoubtedly, the "Я" expresses the power of the human psyche. On the other hand, in order to achieve his goal, a person, with the help of his *Ф* imagination and his $\text{С}_\text{в}$ willpower, eliminates the influence of $\Pi_\text{С}^\text{с}$. Therefore, $(\text{С}_\text{В} + \Phi)$ - expresses the resistance of the human psyche to the influence of $\Pi_\text{С}^\text{с}$.

What is interesting in formula (1) is that when the human psyche is fractal [5], [6], the potential of the psyche has a fractal dependence on the *Я*-concept, i.e. in this case, the dependence of the potential of the psyche on the "Я-concept" will be gradual.

$$U(r) \approx \text{Я}^{1-D} \cdot (C_\text{в} + \Phi) \qquad (2)$$

where: *U* is the potential of the psyche; r is the social environment where the individual's transaction takes place; *D* is the fractal dimension; "*Я*" - "*Я* concept"; $\text{С}_\text{В}$- willpower; *Ф* –fantasy.

Here, *D* expresses the fractal dimension of the potential of the psyche and the speed of the psyche to respond to the influences of $\Pi_\text{С}^\text{с}$. On the other hand, this dimension characterizes the measure of resistance on the $\Pi_\text{С}^\text{с}$ using "*Я*", ego and self. When D=1, we arrive at formula (1). This corresponds to a stable mental state. A person's uniqueness can be distinguished using *D*. Formula (2) is similar to the formula of Mandelbrot B.B. [5].

When conducting an experiment [7], [8] with formula (2), it turned out that a person with fractal mental potential is resistant to the influence of $\Pi_\text{С}^\text{с}$.

For a more local explanation of the proposed concept, we introduce the following notation:

In the case when $\text{С}_\text{в} = \Phi$, the resistance $(\text{С}_\text{в} + \Phi)$ is denoted by the letter *R*.

In the case when $\text{С}_\text{в} > \Phi$, the resistance $(\text{С}_\text{в} + \Phi)$ is denoted by the letter *L*.

In the case when $\text{С}_\text{в} < \Phi$, the resistance $(\text{С}_\text{в} + \Phi)$ is denoted by the letter *C*.

The expression U>"Я" is read as "the potential of the psyche is ahead of the content of its "Я".

U<"Я" is read as "the potential of the psyche lags behind the content of the "Я".

U≈"Я"is read as "in terms of content, the potential of the psyche corresponds to the content of the "Я".

That is, the resilience of the psyche can be formally designated as:

$$T = (\text{С}_\text{в} + \Phi) = \begin{cases} \text{R} - when \quad U = \text{"Я "} \\ L - \quad when \quad U > \text{"Я "} \\ \text{С} - \quad when \quad U < \text{"Я "} \end{cases} \qquad (3)$$

It can be seen from formula (3) that the resistance of the human psyche has three types.

When $T = R$ is a balanced, prudent person, and his activities are always productive. Such people achieve fantastic results in life.

If $T = L$, the person is too modest and easily gives up his position, hoping to win back later. In most cases, they succeed.

When $T = C$, this person's mental strength is very strong and, thanks to this, he promptly eliminates Π_C^c and, by winning difficult situations, dramatically enhances his mental potential. This is common among political leaders.

What is interesting here is that γ expresses the degree of susceptibility of the human psyche to external energy-informational influences. The value of γ is called the frequency of susceptibility.

$$\gamma = {}^{1}/_{\sqrt{Я \cdot Т}} \qquad (3a)$$

This formula was found heuristically [4]. Psychological experiments conducted by people aged 20-22 years have shown that it is this psychological parameter that determines the generation of psychological symbiosis during the transaction of two people.

To create uniform samples of measures (standards) and bring all measurements in Russia into line with them, L.Euler proposed the decimal principle of division of units and the metric system of measures. It was Euler who put forward the concept of creating standards based on physical constants. This approach can be used to develop the metrology of the human psyche.

If we analyze the formal representations of mental processes, there is a formed opinion that Gustav Fechner was one of the founders who modeled the psychological process. Thus making psychology "scientific". Fechner realized that the law of the relationship between mind and body can be expressed as a quantitative relationship between sensory perception and a material stimulus [9]. Soon this formulation became known as Fechner's law: S = Klog I (the intensity of sensory perception is proportional to the logarithm of the material stimulus). Even Wilhelm Wundt insisted [10]: "It will never be forgotten that it was Fechner who first introduced scientific methods, precise principles of measurement and observation into psychology for the study of mental phenomena, thereby opening up the prospects of psychological science in the strict sense of the word."

In [11], [12], metrology was proposed for numerical evaluation of the psychological parameters described above.

1. For the strength of the human psyche, *Я* can enter the «*Ha*» dimension if the person correctly typed 10% of the correct answer. Then his mental strength will be 1 *Ha.*

2. Also, for the parameter *T*, resistance is measured by «*Ka*», according to the *Ф* and $C_в$ test, if a person scored 10% of the correct answer, then

$$1Ha \cdot 1Ka \approx 1Ep \qquad (4)$$

This formula reads as: a person has 1 *Ep* of mental potential if he guessed 10% of the correct answer for *Я*, *Ф* and $C_в$ on the test. The expression of formula (4) will be the basis of the metrology of the human psyche.

Now we introduce the function $F_{\alpha,\beta}$ – the transactional force of α -psychology on β-psychology, U_α U_β_b potential of the corresponding psychology.

$$F(\omega)_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, if\ U_\alpha > U_\beta \\ 0, if\ U_\alpha = U_\beta \\ -1, if\ U_\alpha < U_\beta \end{cases} \qquad (5)$$

When $F(\omega)_{\alpha,\beta}$ =1, say α - psychology is stronger than β psychology, then $\Pi_C \neq 0$. When $F(\omega)_{\alpha,\beta}$ =0, say both psychology is equal, in this case Π_C=0. When $F(\omega)_{\alpha,\beta}$ = -1, say psychology is stronger than α, then $\Pi_C \neq 0$.

Transaction (mutual influence)

Now let's consider the process when two (α,β) mental fields of individuals influence each other. Since this process is the basis for estimating the minimum mental energy for generating Π_C^c.

As already noted, the potential of the human psyche is $U = "Я " \cdot (С_в + Ф)$. When a person mentally influences another person, he gives a certain mental energy to the person he influences. Then this process is described by the following equation [1]:

$$U = U' + \frac{d\psi}{dt} = "Я "(С_в + Ф) = U' + \frac{d\psi}{dt} \qquad (5a)$$

where U' is the potential of the individual being influenced.

If in (4) we multiply both parts by "*Я*" dt:

$$("Я ")^2 \cdot (С_в + Ф)dt = U'"Я "\, dt + "Я "d\psi \qquad (6)$$

The left part of equation (6) represents the psychological energy of the influencing individual, and the right part expresses the potential of the human psyche to be influenced and plus the mental energy - $"Я "d\psi$ given to influence, during dt, obtained from $("Я ")^2 \cdot (С_в + Ф)dt$.

Now let's numerically evaluate the psychological energy to eliminate $П_С^с$. We will denote it as:

$$dw_M = "Я"d\psi \qquad (7)$$

Then

$$w_M = \int_0^{\psi_w} "Я"\, d\psi \qquad (8)$$

where ψ_w is the maximum energy to eliminate $П_С^с$.

Let's introduce the coefficient of psychological susceptibility of a person – ω.

The variability of the potential *U* depends on the "*Я*", such a relationship is denoted as:

$$\psi = \omega Я" ,\ d\psi = \omega d"Я" \qquad (9)$$

Then the psychological energy to eliminate $П_С^с$ is estimated as:

$$w_M = \int_0^1 "Я"\, dЯ = \frac{\omega("Я")^2}{2} \qquad (10)$$

The limit of the integral expresses in which psychological interval the process of eliminating $П_С^с$ occurs. The coefficient ω expresses how amenable an individual is to $П_С^с$. This coefficient is inversely proportional to the isotropy of a society, i.e. the higher the isotropy of a society, the less likely it is to generate a $П_С^с$.

Thus, so that you do not fall under the influence of $П_С^с$, you need to have at least the following psychological energy:

$$w_M = \frac{(Св \cdot Ф) \cdot (Я)^2}{16\pi} \approx 0.02(С_в + Ф) \cdot (Я)^2 \qquad (11)$$

If we denote it as $\omega \approx 0.02(С_в + Ф)$, then formula (11) can be rewritten as follows:

$$w_M \approx \omega \cdot (Я)^2 \approx 0{,}02 \cdot Ка \cdot На^2 = 0{,}02 \cdot (13{,}2) \cdot 16\ Ка \cdot На^2 = 0{,}264\ Ка \cdot На^2 \qquad (12)$$

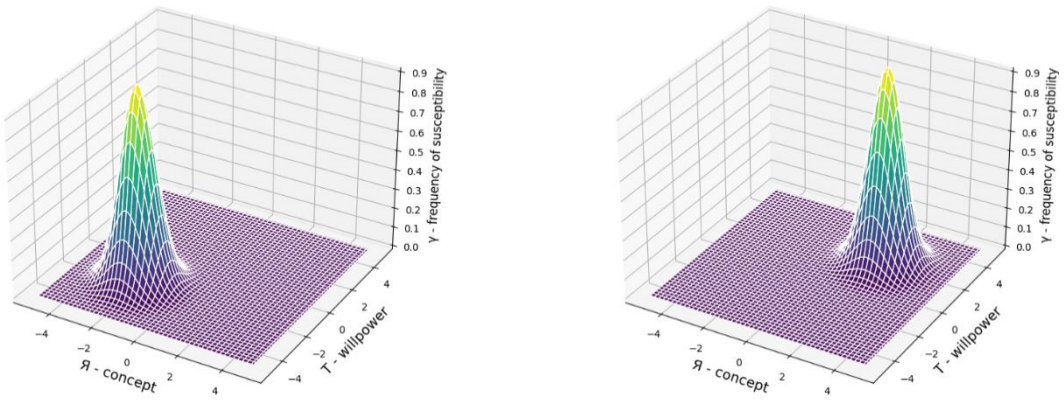
Based on formula (12), we can write $0{,}264\ Ка \cdot На^2$ is equivalent to 1J , i.e. $0{,}264\ Ка \cdot На^2$ psychological energy equals 1J.

This is the minimum psychological energy of a person to be connected to the process of psychological symbiosis.

Discussion of the results

In terms of content, γ–expresses a person's ability to fall under the influence of Π_C^c. The greater the γ, the more psychic energy is required to eliminate Π_C^c. On the other hand, with the help of this coefficient, it will be possible to assess an individual's ability to resist Π_C^c.

w_M is the minimum mental energy needed to influence another psyche. Figure 1 shows the dependence of generation.



a) b)

Figure 1. Dependence of the generation of Π_C on *Я* and *T*

The psychological symbiosis of Π_C from the *Я*-concept a) and from the psychological resistance T=($C_в$ + Ф) and c) shows the light contrast of the psychological process of generating Π_C symbiosis. It is clear that before the generation of Π_C, the human psyche passes through a symbiotic state of Π_C. During this period, the human psyche experiences and overcomes a lot of uncertainty, which swallows a certain amount of psychological energy w_M. Passing through each stage Π_C^c (1,2,3,...) requires a lot of psychological energy from a person. In principle, such energy is generated by the potential of the psyche of $U(r)$ and from what social environment r he is in. On the other hand, the very process of generating Π_C depends on the γ psyche of the person who participates in the transaction, i.e. $\vec{\gamma}(Я, T)$. It is clear that the changes in γ also depend on the changes in *Я* and T in time t and on $\frac{\partial Я}{\partial t}$ and $\frac{\partial T}{\partial t}$, which is shown in Figure 2. It can be seen from the figure that the symbiosis of the two psychology will occur when $\gamma_1 \approx \gamma_2$.

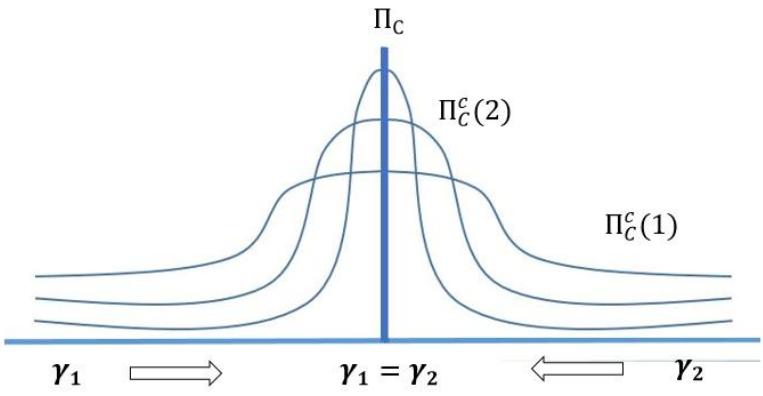
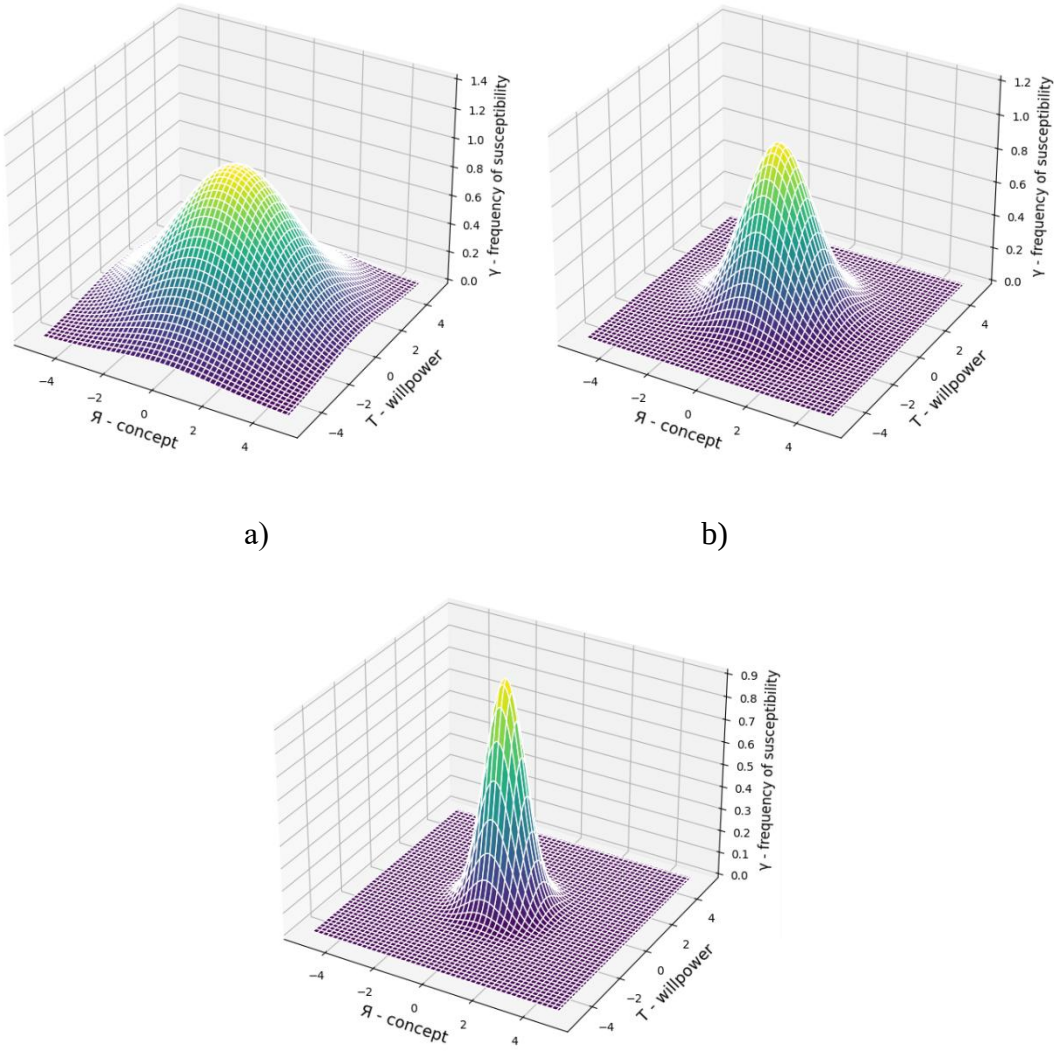


Figure 2. Graphical view of the generation of Π_C

Figure 3 shows the transition from $\Pi_C^c(1,2,3,\ldots) \rightarrow$ PC during the transaction. It can be seen from the figure that the process of generating a symbiosis of two psyches consists of several stages. In the first stage, Figure 3-a) $\Pi_C^c(1)$ stage are generated before the symbiotic state. At this stage, signs of symbiosis appear on the slave psyche. Figure 3-b), $\Pi_C^c(2)$the last stage of symbiosis generation. At this stage, the two psychics reflexively coordinate the potentials of the two psychics $U_1 \cong U_2$. Figure 3-c), generating a complete symbiosis of the two psychics. At this stage, $U_1 \equiv U_2$ occurs, that is, two psychics merge into one - this is a symbiosis.



a) b)

c)

Figure 3. Stages of the generation of psychological symbiosis of Π_C

The volumes of these figures show the stages of reflexive coordination of the potentials of the psyche involved in the process of the transaction. And the colors show the degree of reflexive agreement of the potentials of the two psyches.

Conclusions

Summarizing the work, we can say the following:

- with the help of the psychological parameters of the "Я-concept", the willpower of $C_в$ and Ф, many psychological problems can be solved;
- The potential of the human psyche U determines the structure of human psychology;

- Using the U potential of the psyche, it is possible to evaluate the results of a transaction between two psychics.;
- the process of symbiosis, i.e. the merging of two psychics into one, occurs in stages during a transaction (verbal, verbal, physical, etc.);
- the process of generating two psychics can be assessed using γ.

References

1. Berne, E. (1949). Some oriental mental hospitals. *American Journal of Psychiatry*, *106*(5), 376-383. https://doi.org/10.1176/ajp.106.5.376
2. Rogov, E. I. (2003). Choice of profession: becoming a professional. *M. VladosPress*.
3. Rubinstein, S. L. (2002). Fundamentals of general psychology. *St. Petersburg: Piter*, *720*.
4. Rustamov, N. T., & Rustamov, E. N. (2022). *A heuristic model of the functioning of the human psyche.* Tashkent: Fan va texnologiyalar nashriyot-matbaa uyi. ISBN 978-9943-8122-5-3.
5. Balkhanov, V. K. (2001). *Introduction to the theory of fractal calculus.* Ulan-Ude: Ed. Buryat State University.
6. Rustamov, N. T. (2017). On the issue of fractality of the human psyche. In *Reports of the Republican Scientific and Technical Conference "Current State and Prospects of Information Technology Application in Management"* (pp. 175–180). Tashkent.
7. Rustamov, N. N., Khudiyarov, G. B., & Rustamov, E. N. (2016). *Selection of applicants for the sport of higher achievements.* Tashkent: Fan va texnologiya.
8. Bobylev, S. V., & Rustamov, N. N. (2012). Analysis of synesthesia of highly qualified athletes. *Theory and Practice of Physical Culture*, (9), 37–38.
9. Podoprigora, S. Ya., & Podoprigora, A. S. (2013). *Philosophical dictionary* (2nd ed., erased). Rostov-on-Don: Phoenix. pp. 473–474.
10. Prokhorov, A. M. (1969). Great Soviet Encyclopedia (in 30 volumes). *M., The Soviet Encyclopedia*, *1978*, 68.
11. Rustamov, N. T., Amirtaev, K. B., & Meirbekova, O. D. (2024). Informational foundations of the metrology of the human psyche. In *Proceedings of the Scientific and Practical Conference of the Republic: "Actual Problems and Issues of a Creative Approach in Practice in the Field of Technical Regulation, Metrology, and Conformity Assessment"* (pp. 236–240). Jizzakh.
12. Rustamov, N. T., & Amirtaev, K. B. (2024). Heuristic modeling of the start-up process. In *Current state and prospects of development of digital technologies and artificial intelligence: Collection of reports of the international scientific and technical conference* (Part 2, pp. 7–13). Bukhara.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, корреспондент автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	**Рустамов Н.Т.**– профессор, доктор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: nassim.rustamov@ayu.edu.kz
	Rustamov N.T.– professor doctor, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: nassim.rustamov@ayu.edu.kz
	Рустамов Н.Т.– профессор, доктор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: nassim.rustamov@ayu.edu.kz
2	**Амиртаев К.Б**. – доцент, Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: kanat.amirtayaev@ayu.edu.kz
	Amirtayev K.B. – assistant professor, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: kanat.amirtayaev@ayu.edu.kz
	Амиртаев К.Б. – доцент, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: kanat.amirtayaev@ayu.edu.kz

UDC 004.8
STSI 20.23
https://doi.org/10.47526/2025-1/2524-0080.23

Abdissamat M. [1], **Aben A.B.** [2]
[1] *PhD student, Gazi university, (Turkey, Ankara),*
e-mail: murtaza.abdissamat@gazi.edu.kz,
[2] *Master, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, (Kazakhstan, Turkestan),*
e-mail: arypzhan.aben@ayu.edu.kz

USING MACHINE LEARNING TO DETECT PARKINSON'S DISEASE
ПАРКИНСОН АУРУЫН АНЫҚТАУ ҮШІН МАШИНАЛЫҚ ОҚУДЫ ПАЙДАЛАНУ
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ БОЛЕЗНИ ПАРКИНСОНА

Abstract. *Parkinson's disease is a progressive neurological disorder that affects millions of people worldwide. Early and accurate detection of this disease is crucial in managing its progression and improving patient outcomes. In this study, machine learning algorithms were applied to a dataset containing 195 instances and 24 features representing both healthy individuals and those diagnosed with Parkinson's disease. The analysis showed that the dataset was unbalanced. Approximately 75% of the records corresponded to individuals diagnosed with Parkinson's disease.*

Five algorithms were implemented to evaluate the effectiveness of machine learning models in detecting Parkinson's disease: Logistic Regression, Support Vector Machine (SVM) with Linear Kernel, Decision Tree, Random Forest, and K-Nearest Neighbor (KNN). The results showed that the Random Forest and KNN models achieved superior performance compared to other methods. In particular, the KNN model showed the highest accuracy (95%), precision (94%), recall (100%), and F1 score (97%). The Random Forest model also achieved high performance with accuracy (92%) and other metrics close to KNN, indicating its reliability for this classification task.

On the other hand, Logistic Regression and SVM showed mediocre results, with precision, recall, and F1-scores below 95%. This study contributes to the growing field of medical diagnostics by demonstrating the potential of machine learning methods to detect Parkinson's disease.

Keywords: *Machine learning. Parkinson's disease, k-nearest Neighbor.*

Аңдатпа. *Паркинсон ауруы – бүкіл әлем бойынша миллиондаған адамға әсер ететін үдемелі неврологиялық бұзылыс. Бұл ауруды ерте және дәл анықтау оның дамуын басқаруда және пациенттердің өмір сүру сапасын жақсартуда маңызды рөл атқарады. Осы зерттеуде машиналық оқыту алгоритмдері Паркинсон ауруына шалдыққан және сау адамдарды қамтитын 195 жазба мен 24 сипаттамадан тұратын деректер жиынтығына қолданылды. Талдау нәтижесінде деректер жиынтығы теңгерімсіз екені анықталды: жазбалардың шамамен 75%-ы Паркинсон диагнозы қойылған адамдарға тиесілі болды.*

Паркинсон ауруын анықтауда машиналық оқыту модельдерінің тиімділігін бағалау үшін бес алгоритм қолданылды: Логистикалық регрессия, сызықтық ядросы бар қолдау векторлық машинасы (SVM), шешім ағашы, кездейсоқ орман (Random Forest) және ең жақын көрші (KNN). Зерттеу нәтижелері көрсеткендей, Random Forest және KNN модельдері басқа әдістермен салыстырғанда жоғары өнімділікке қол жеткізді. Әсіресе, KNN моделі ең жоғары дәлдікке (95%), дәлдік (94%), толықтық (100%) және F1 көрсеткішіне (97%) ие болды. Random Forest моделі де жоғары нәтижелер көрсетті, оның дәлдігі (92%) және басқа метрикалары KNN-ге жақын болды, бұл оны осы классификация міндеті үшін сенімді әдіс етті.

Ал Логистикалық регрессия және SVM алгоритмдері төмен нәтиже көрсетті, олардың дәлдік, толықтық және F1 көрсеткіштері 95%-дан төмен болды. Бұл зерттеу медициналық диагностика саласына үлес қосып, машиналық оқыту әдістерінің Паркинсон ауруын анықтаудағы әлеуетін көрсетеді.

Негізгі сөздер: *Машиналық оқыту. Паркинсон ауруы, k-ең жақын көрші.*

Аннотация. *Болезнь Паркинсона - прогрессирующее неврологическое заболевание, которым страдают миллионы людей во всем мире. Раннее и точное выявление этого заболевания имеет решающее значение для контроля его прогрессирования и улучшения результатов лечения пациентов. В этом исследовании алгоритмы машинного обучения были применены к набору данных, содержащему 195 экземпляров и 24 признака, представляющих как здоровых людей, так и людей с диагнозом болезни Паркинсона. Анализ показал, что набор данных несбалансирован. Около 75% записей соответствуют людям с диагнозом болезнь Паркинсона.*

Для оценки эффективности моделей машинного обучения при выявлении болезни Паркинсона было представлено пять алгоритмов: логистическая регрессия, машина опорных векторов (SVM) с линейным ядром,

дерево решений, случайный лес и K-ближайший сосед (KNN). Результаты показали, что модели Random Forest и KNN достигли более высокой производительности по сравнению с другими методами. В частности, модель KNN показала самую высокую точность (95%), прецизионность (94%), полноту (100%) и оценку F1 (97%). Модель случайного леса также показала высокую производительность с точностью (92%) и другими показателями, близкими к KNN, что указывает на ее надежность для этой задачи классификации.

С другой стороны, логистическая регрессия и SVM показали средние результаты с точностью, полнотой и показателями F1 ниже 95%. Это исследование вносит вклад в развивающуюся область медицинской диагностики, демонстрируя потенциал использования методов машинного обучения для выявления болезни Паркинсона.

Ключевые слова: *Машинное обучение, Болезнь Паркинсона, k-ближайший сосед.*

Introduction

Parkinson's disease has a major impact on society and is a type of neurodegenerative disease affecting millions of people worldwide. It is characterized by motor symptoms such as tremors, rigidity, and bradykinesia, as well as non-motor symptoms including cognitive impairment, depression, and sleep disturbances. Early detection of Parkinson's disease is crucial for improving patient outcomes and quality of life. Traditionally, diagnosis relies on clinical evaluations and the assessment of symptoms by healthcare professionals. However, these methods often lack the accuracy and sensitivity required for early-stage detection.

With advancements in technology, machine learning (ML) has emerged as a promising tool for the early detection and diagnosis of Parkinson's disease. Machine learning models can analyze vast amounts of data, including genetic information, imaging data, and electronic health records, to identify patterns indicative of the disease. These models have shown potential in improving diagnostic accuracy, providing objective insights, and reducing the dependency on subjective clinical assessments.

The integration of machine learning into medical diagnostics has opened new avenues for research and clinical applications. By training models on large datasets, ML algorithms can detect subtle changes associated with Parkinson’s disease, even in its earliest stages. This capability enables timely interventions, personalized treatment strategies, and more effective management of the disease.

Several studies have utilized different machine learning techniques to improve Parkinson's disease diagnosis. These techniques range from supervised learning methods such as Support Vector Machines (SVM) and Random Forest to unsupervised methods like clustering algorithms and neural networks. The choice of algorithm depends on the type of data being analyzed and the desired accuracy level.

Despite these advancements, challenges remain in implementing machine learning solutions in clinical practice. Issues such as data quality, interpretability of results, and ethical considerations need to be addressed to ensure reliable and trustworthy predictions. Additionally, the integration of machine learning models into healthcare systems must be seamless, ensuring that clinicians and patients benefit from these technologies without compromising privacy or accuracy.

In this article, we explore the use of machine learning for Parkinson’s disease detection. We examine various ML techniques, discuss their potential benefits, and address challenges associated with their application in healthcare settings. Through this comprehensive analysis, we aim to highlight the role of machine learning in transforming Parkinson’s disease diagnosis and management.

Machine learning techniques have been used to detect Parkinson's disease using voice signal characteristics. The machine learning techniques K-nearest neighbor (KNN) and Feed-Forward neural network (FNN) achieve high accuracy of 99.11% for FNN and 95.89% for KSVM models [1]. Another study used MRI and SPECT DaTScan datasets. This study presents four deep learning models enhanced with gray wolf optimization for early detection of Parkinson's disease. It demonstrates the effectiveness of machine learning in diagnosing Parkinson's disease. The study results achieve accuracy close to or higher than 99% [2].

Detection of Parkinson's disease using machine learning was achieved using LSTM neural network. The study processed gait deceleration data and achieved 96.3% accuracy. The model used wavelet features extracted from a publicly available dataset to improve recognition performance[3].

A deep learning architecture combining CNN, GRU, and GNN for early detection of Parkinson's disease was proposed in a study using gait cycle data from wearable sensors. As a result, high accuracy was achieved while overcoming the limitations of traditional machine learning approaches [4]. Other studies have also used clinical characteristics, voice features, and motor tests. Machine learning models for early detection of Parkinson's disease were developed. The study achieved 100% accuracy in classifying patients and 92% accuracy in distinguishing them from healthy controls [5].

A machine learning-based prediction system for early detection of Parkinson's disease was proposed in a study using support vector machine (SVM) and L1-Norm features, which was able to achieve high classification performance confirmed by K-fold cross-validation. It improves early diagnosis and integration into healthcare systems [6]. Studies using electroencephalogram signals and Mel spectrogram images combined with convolutional neural networks have been developed. By implementing an automated approach to Parkinson's disease detection, it significantly improves accuracy and provides early diagnosis and personalized treatment strategies [7].

A study using transfer learning with ResNet50 and SVM classifiers, using time-frequency images extracted from patient voice recordings, achieved 95.07% accuracy in training and 92.13% accuracy in testing [8]. It demonstrated 68% accuracy in classifying Parkinson's disease from UK Biobank fundus images [9]. It presents a hybrid LSTM-GRU model with voice recordings. It addresses the imbalance of the dataset through oversampling methods. It is observed that it significantly improves detection performance compared to traditional machine learning methods, achieving 100% accuracy with balanced data [10]. It also demonstrates the potential for non-invasive diagnosis with 88.46% accuracy using Support Vector Machine (SVM) algorithms based on voice recordings [11]. Parkinson's disease detection using machine learning involves analyzing speech signals using algorithms such as K-nearest neighbor, Random Forest, and Bayesian neural networks. Based on the parameters of the processed speech data, the recognition accuracy was 94.7%, 88.16%, and 74.74%, respectively [12].

Materials and methods

This study used the “Parkinson’s Disease” dataset and machine learning methods such as logistic regression, machine learning vector, decision trees, random forest, and nearest neighbor.

About the dataset

This dataset consists of a variety of biomedical voice measurements from 31 individuals, including 23 individuals diagnosed with Parkinson's disease (PD). Each column represents a specific voice metric, and each row corresponds to one of 195 voice recordings from these individuals (identified in the "name" column). The primary goal of the dataset is to distinguish between healthy individuals and those with PD, with the "state" column representing 0 for healthy and 1 for PD.

The data is available in ASCII CSV format. Each row in the CSV file represents one voice recording instance, consisting of approximately six recordings per patient. The first column contains the patient's first and last name.

Matrix column entries (attributes):

name-ASCII subject name and entry number

MDVP:Fo (Hz) - average vocal fundamental frequency

MDVP:Fhi (Hz) - maximum vocal fundamental frequency

MDVP:Flo (Hz) - minimum vocal fundamental frequency

MDVP:Frequency (%), MDVP:Frequency (Abs), MDVP:REP, MDVP:PPQ, Frequency: DDP-variable measures of variation in fundamental frequency

MDVP:Gloss, MDVP:Gloss(dB),Gloss:APQ3,Gloss:APQ5, MDVP:APQ,Gloss:DDA-variable measures of variation in amplitude

NHR, HNR-measures of the ratio of noise to tonal components in the voice

status-subject's health status (1 for Parkinson's disease, 0 for healthy)

RPDE, D2-nonlinear Two measures of dynamic complexity

DFA Fractal scaling index of the signal

spread1, spread2, PPE - three non-linear measures of the radical change in frequency

Machine learning methods

In the above sections, machine learning methods play a major role in the detection of Parkinson's disease. Several types of machine learning methods were used in this study.

Logistic regression

In statistics, a logistic model (or logit model) is used to predict the probability of an event by modeling the probability of the event as a linear combination of one or more independent variables. In regression analysis, logistic regression (or logit regression) estimates the coefficients of a logistic model using linear or nonlinear combinations of these independent variables. In binary logistic regression, there is one binary dependent variable represented by an indicator variable with values of "0" and "1". The independent variables can be binary (with two classes coded as indicator variables) or continuous (with specific measured values). The probability associated with a "1" can range from 0 (of course "0") to 1 (of course "1"), which explains the labeling. The logistic function is used to convert log odds into probabilities, giving the model its name. The unit of measure for the log odds scale is called the logit, which comes from the term logistic unit, and is therefore sometimes referred to as such.

Support vector machine

In machine learning, support vector machines (SVMs, also known as support vector networks) are supervised maximum likelihood models with associated learning algorithms used for classification and regression analysis. SVMs, developed at AT&T Bell Laboratories, are Vapnick (1982, 1995) and The most widely studied models are based on the statistical learning frameworks proposed by Chervonenkis (1974), in particular VC theory.

In addition to linear classification, SVMs can perform nonlinear classification using the kernel trick. This involves representing data using a set of pairwise similarity comparisons between the original data points, which are transformed into coordinates in a high-dimensional feature space using a kernel function. Thus, SVMs efficiently map inputs to high-dimensional spaces where linear classification is possible. As maximum margin models, SVMs are robust to noisy data such as misclassified examples.

Decision trees

A decision tree is a decision support tool that uses a recursive partitioning structure to model decisions and their possible outcomes. This tree-like model takes into account possible consequences, including the outcomes of random events, resource costs, and utility. It serves as a visual representation of an algorithm consisting only of conditional control statements.

Decision trees are widely used in operations research and decision analysis to determine the best strategy to achieve a desired goal. They are also a popular technique in machine learning for classification and regression tasks, providing insight into how to make decisions based on different input features.

Random Forest

Random forests or random decision forests are ensemble learning methods used for classification, regression, and other tasks. They work by building multiple decision trees during training. For classification tasks, the final output is the class that individual trees most often choose, while for regression tasks, it is the average of their predictions. This method addresses the tendency for decision trees to overfit the training data using ensemble methods.

The first random forest algorithm was introduced in 1995 by Tin Kam Ho using the random subspace method. This method implements the classification strategy originally proposed by Eugene Kleinberg, "stochastic discrimination".

A more advanced version of the algorithm was later developed by Leo Breiman and Adele Cutler, who trademarked "Random Forests" in 2006 (the trademark is currently owned by Minitab, Inc. as of 2019). This extension combines Breimann's "covering" technique with a random selection of features-a concept first introduced by Ho and later independently extended by Amit and Geman-to create a set of decision trees with reduced variance.

k-Nearest Neighbor

In statistics, the k-nearest neighbor algorithm (k-NN) is a nonparametric supervised learning method first introduced by Evelyn Fix and Joseph Hodges in 1951 and later extended by Thomas Cover. It is commonly used for classification, where it serves as a k-NN classifier. In this context, the algorithm assigns class membership to an object based on the majority vote of its k nearest neighbors. An object is classified into the class that is most common among its neighbors. When k=1, the object is assigned to the class of its nearest neighbor.

The k-NN algorithm can also be applied to regression tasks, known as k-NN regression or nearest neighbor smoothing. Here, the output is a numerical feature, which is calculated as the average of the k nearest neighbors. Similarly, when k=1, the output is the value of the nearest neighbor, often referred to as nearest neighbor interpolation.

In both classification and regression, it is often advantageous to assign weights to neighbors based on their distance from the target object, giving greater weight to the nearest neighbors. A common weighting scheme assigns a weight of $1/d$, where d is the distance to the neighbor, which ensures that the nearest neighbors contribute more to the result.

Results

In this section, predictions are made by machine learning algorithms after a preprocessing process on the dataset used in the study to detect Parkinson's disease.

Preprocessing

The dataset considered in the study consists of 24 columns and 195 rows. The calculations for the dataset considered in the study for the disease are summarized in Figure 1 below.

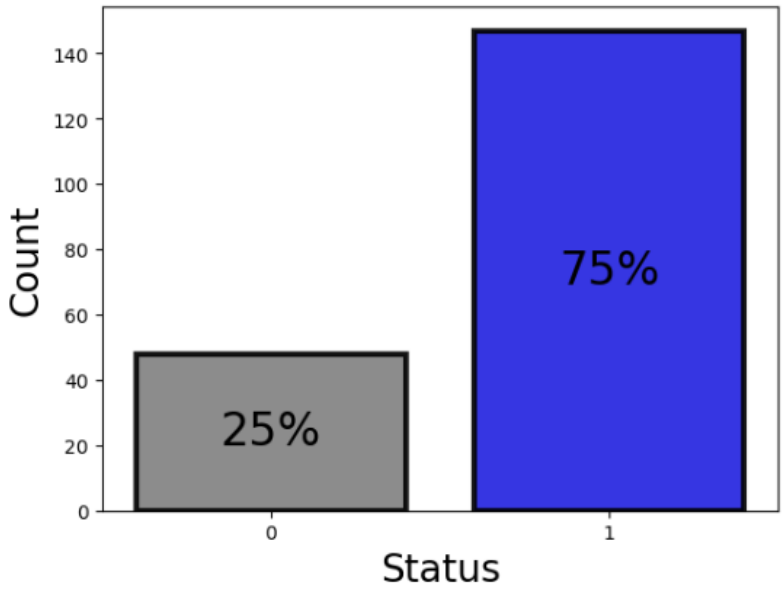


Figure 1. Proportion of Parkinson's disease in the dataset.

As shown in the figure above, the proportion of Parkinson's disease patients in the dataset used in the study is 75 percent. This means that the majority of the data in the dataset is filled with data from patients with Parkinson's disease. Table 1 below shows the dataset used in this study.

Table 1. Dataset used in the study.

name	MDVP:Fo(Hz)	MDVP:Fhi(Hz)	MDVP:Flo(Hz)	MDVP:Jitter(%)	MDVP:PPQ	Jitter:DDP	status
0	phon_R01_S01_1	119.992	157.302	74.997	0.00370	0.00554	1
1	phon_R01_S01_2	122.400	148.650	113.819	0.00465	0.00696	1
2	phon_R01_S01_3	116.682	131.111	111.555	0.00544	0.00781	1
3	phon_R01_S01_4	116.676	137.871	111.366	0.00502	0.00698	1
4	phon_R01_S01_5	116.014	141.781	110.655	0.00655	0.00908	1

The MDVP:Fo(Hz) values given in Table 1 are the mean vocal fundamental frequency values. Figure 2 below shows the prevalence of MDVP:Fo in Parkinson's disease.

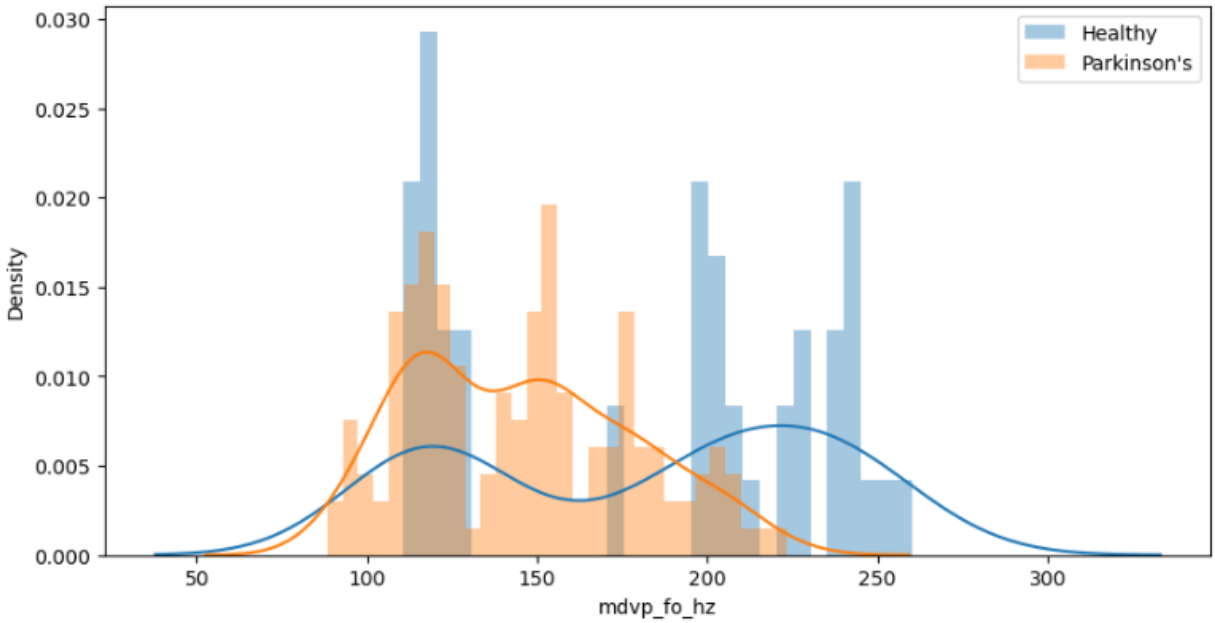


Figure 2. Prevalence of Parkinson's disease according to MDVP:Fo.

From the above diagram, it is observed that Parkinson's disease is more common at low Hz values of the mean vocal fundamental frequency. These results can be seen in the diagram shown in Figure 3 below.

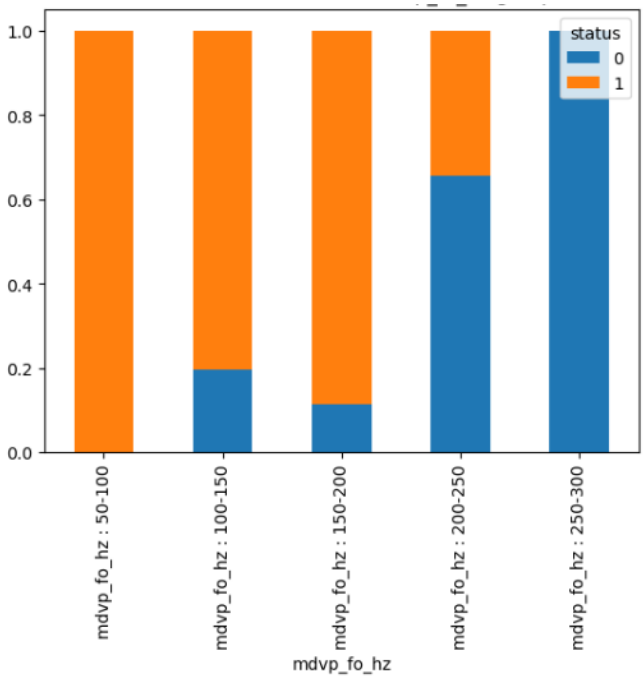


Figure 3. Relative frequencies of MDVP:Fo prevalence in Parkinson's disease.

In order to clarify the study, the relationships between the values of the given variables in the dataset were examined. During this examination, the appearance of the correlation data set is shown in Figure 4 below.

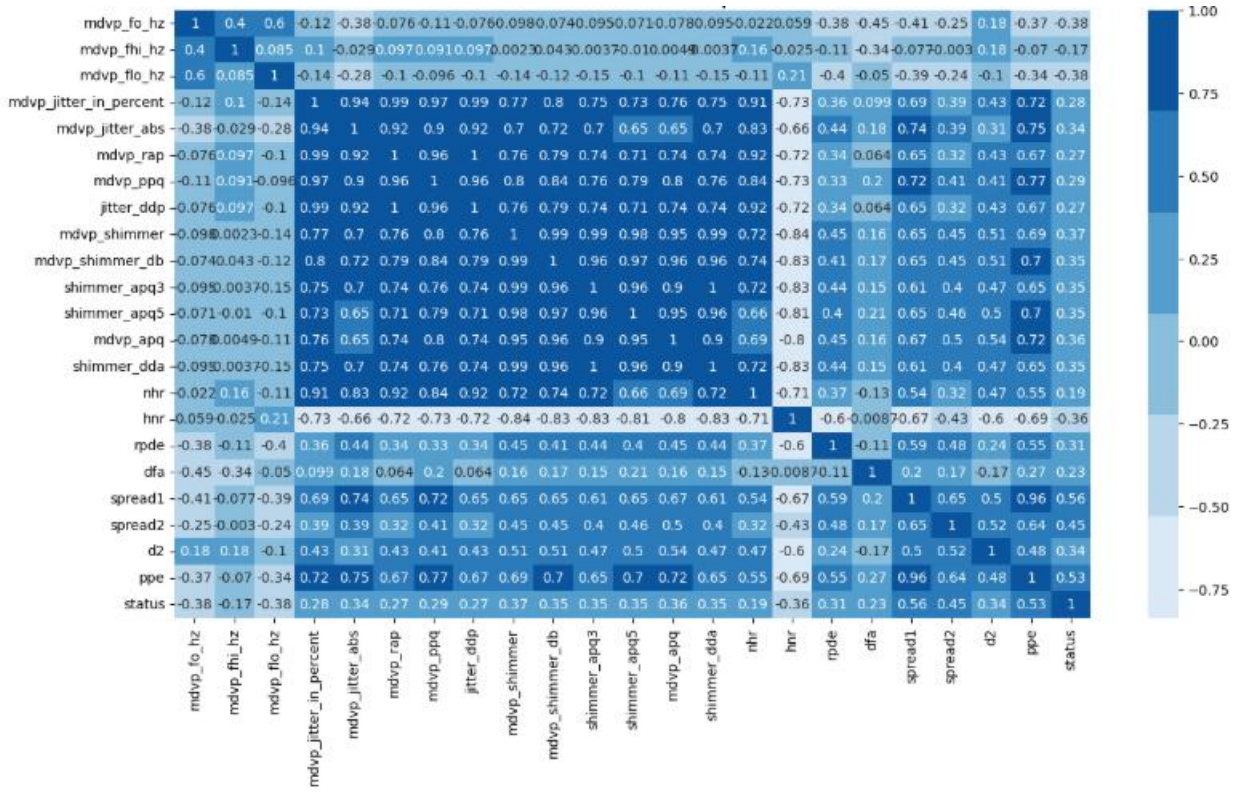


Figure 4. Results of the correlation dataset

After these steps, the data in the dataset is ready for machine learning algorithms to make predictions. Table 1 below presents the results of the machine learning algorithms used in the study.

Table 1. Results of machine learning algorithms in the detection of Parkinson's disease.

	Model	Precision	Recall	F1-Score	Accuracy
1	Logistic Regression	0.888889	1.000000	0.941176	0.897436
2	Support Vector Machine(linear)	0.888889	1.000000	0.941176	0.897436
3	Decision Tree	0.937500	0.937500	0.937500	0.897436
4	Random Forest	0.939394	0.968750	0.953846	0.923077
5	K-Nearest Neighbor	0.941176	1.000000	0.969697	0.948718

The table above shows the results of machine learning algorithms for the detection of Parkinson's disease, which was the goal of the study. As shown in the table, the precision, recall, f1-score, and accuracy scores of the Logistic Regression and Support Vector Machine (linear) models were the same. However, these values showed a low indicator compared to other models used in the study. The Decision Tree value was higher than the Logistic Regression and Support Vector Machine (linear) models in terms of precision, recall, and f1-score, but the accuracy values showed the same indicator, i.e. 89 percent. We can accept 89 percent as a high accuracy compared to the current works in this field. The high indicators in the study were achieved by the Random Forest and K-Nearest Neighbor models. The Random Forest model had precision 94%, recall 97%, f1-score 95%, and accuracy 92%. The K-Nearest Neighbor model is recommended for use in the diagnosis of Parkinson's disease, showing the results of the study with precision 94%, recall 100%, f1-score 97%, accuracy 95%, respectively. A comparative chart of machine learning models is shown in Figure 5 below.

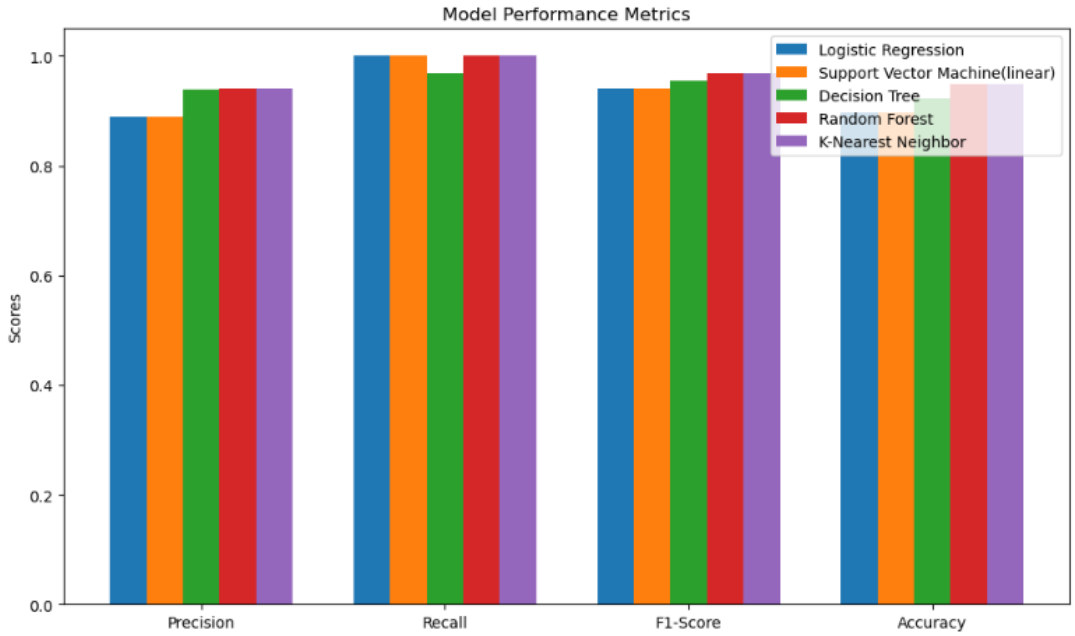


Figure 5. Comparative chart of model performance

Conclusion

The study analyzed the effectiveness and accuracy of machine learning algorithms for the diagnosis of Parkinson's disease. The data set preprocessing process improved the quality of the data. It became the basis for improving the predictive ability of the models. The results of the study showed that all the models used were able to diagnose Parkinson's disease to a certain extent, but their effectiveness varied depending on the indicators.

When comparing the performance of the algorithms, the Random Forest and K-Nearest Neighbor models achieved the highest accuracy indicators. In particular, the K-Nearest Neighbor model was distinguished by Precision 94%, Recall 100%, F1-Score 97%, and Accuracy 95%. These results allow us to recommend this model as a highly effective method for the diagnosis of Parkinson's disease.

Logistic Regression and Support Vector Machine (linear) models showed relatively low performance. They helped to identify the main trends in the diagnosis of the disease. Although the Decision Tree model also showed good results, its accuracy was lower than that of the Random Forest and K-Nearest Neighbor models.

Compared with current studies, the obtained accuracy rates (89%-95%) prove that machine learning methods are suitable for practical use in the diagnosis of Parkinson's disease. In addition, these results allow for early detection of the disease and support clinical decisions.

In the future, it is recommended to optimize the hyperparameters in the models, use a larger and more diverse dataset, and improve the results by using neural networks. These methods can further increase the reliability and accuracy of the diagnosis of Parkinson's disease.

References

1. Saravanan, Srinivasan., Parthasarathy, Ramadass., Sandeep, Kumar, Mathivanan., K., Selvam., Basu, Dev, Shivahare., Mohd, Asif, Shah. (2024). 1. Detection of Parkinson disease using multiclass machine learning approach. Dental science reports, https://doi.org/10.1038/s41598-024-64004-9
2. Babita, Majhi., Aarti, Kashyap., Siddhartha, Suprasad, Mohanty., Sujata, Dash., Saurav, Mallik., Aimin, Li., Zhongming, Zhao. (2024). 2. An improved method for diagnosis of Parkinson’s disease using deep learning models enhanced with metaheuristic algorithm. BMC Medical Imaging, https://doi.org/10.1186/s12880-024-01335-z
3. U., A., Vishniakou., Yiwei, Xia. (2024). 3. IT Parkinson’s Disease Diagnostics Based on the Freezing of Gait Analysis Using Long Short Term Memory Neural Network. Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, https://doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-3-76-83
4. Alireza, Rashnu., Armin, Salimi-Badr. (2024). 4. Integrative Deep Learning Framework for Parkinson's Disease Early Detection using Gait Cycle Data Measured by Wearable Sensors: A CNN-GRU-GNN Approach. https://doi.org/10.48550/arxiv.2404.15335
5. Md., Taufiqul, Haque, Khan, Tusar., Md., Touhidul, Islam., Abul, Hasnat, Sakil. (2023). 5. An experimental study for early diagnosing Parkinson's disease using machine learning. arXiv.org, https://doi.org/10.48550/arxiv.2310.13654
6. Mrs.S.M, Karpagavalli., Mrs.A.Aafiya, Thahaseen. (2023). 6. A deep learning based method for parkinson's disease detection using svm. Indian Scientific Journal Of Research In Engineering And Management, https://doi.org/10.55041/ijsrem25808
7. Vinya, Bojamma, A, V. (2023). 7. NeuroPark: An Automated Approach for Parkinson's Disease Detection. Indian Scientific Journal Of Research In Engineering And Management, https://doi.org/10.55041/ijsrem25368
8. Anila, Macharla., Pradeepini, Gera. (2023). 8. A novel framework for the diagnosis of Parkinson’s disease using transfer learning with RESNET50 and SVM classifier. Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science, https://doi.org/10.11591/ijeecs.v32.i2.pp877-886
9. Charlie, Tran., Kai, Sheng., Kang, Liu., Akshay, Ashok., Adolfo, Ramirez-Zamora., Jinghua, Chen., Yulin, Li., Ruogu, Fang. (2024). 9. Deep learning predicts prevalent and incident Parkinson’s disease from UK Biobank fundus imaging. Dental science reports, https://doi.org/10.1038/s41598-024-54251-1

10. Amjad, Rehman., Tanzila, Saba., Muhammad, Mujahid., Faten, Alamri., Narmine, ElHakim. (2023). 10. Parkinson's Disease Detection Using Hybrid LSTM-GRU Deep Learning Model. Electronics, https://doi.org/10.3390/electronics12132856
11. Abiona, Akeem, Adekunle., Ajinaja, Micheal, Olalekan. (2023). 11. Early Parkinson's Disease Detection Using Machine Learning Approach. Asian Journal of Research in Computer Science, https://doi.org/10.9734/ajrcos/2023/v16i2337
12. U., A., Vishniakou. (2023). 12. IT Diagnostics of Parkinson's Disease Based on the Analysis of Voice Markers and Machine Learning. Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, https://doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-3-102-110

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, корреспондент автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	**Әбдісамат М.** – докторант,, Гази университеті, Анкара қ., Түркия, e-mail: murtaza.abdissamat@gazi.edu.kz
	Abdissamat M. – PhD student, Gazi university, Ankara, Turkey, e-mail: murtaza.abdissamat@gazi.edu.kz,
	Абдисамат М. – докторант,, – докторант, университет Гази, г. Анкара, Түркия, e-mail: murtaza.abdissamat@gazi.edu.kz
2	**Абен А.Б.** – магистр, Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: arypzhan.aben@ayu.edu.kz
	Aben A.B.– master, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: arypzhan.aben@ayu.edu.kz
	Абен А.Б. – магистр, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: arypzhan.aben@ayu.edu.kz

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА

Усманов К.И.
Мамидова М.Т.
ПАНТОГРАФ ТИПТЕГІ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІН ҚОЛДАНУ
7-14

Абан У.Б.
Турметов Б.Х.
ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР АЗҒЫНДАЛҒАН ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР КЛАСЫ ҮШІН ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ
15-30

ФИЗИКА

Балтабаева Д. Э.
Қалдар Б.С.
Абдурахманова Ш. Ш.
Амангельдиева Ю.О.
Эртаев Н.С.
ЖОҒАРЫ ЖЫЛДАМДЫҚТЫ ЖАЛЫНМЕН БҮРКУ ӘДІСІ АРҚЫЛЫ АЛЫНҒАН ZRCN ЖАБЫНЫНЫҢ ФИЗИКА-МЕХАНИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН ЗЕРТТЕУ
31-41

Сарыбек Й.
Чорух А.
Сайдахметов П.
Томак М.
PD, PT ЖӘНЕ RH МЕТАЛДАРЫНЫҢ ЖЫЛУЛЫҚ ЖӘНЕ МЕХАНИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН МОЛЕКУЛАЛЫҚ ДИНАМИКА ӘДІСІМЕН ЗЕРТТЕУ
42-57

ИНФОРМАТИКА

Рустамов Н.Т.
Амиртаев К.Б.
АДАМНЫҢ ПСИХОЛОГИЯЛЫҚ СИМБИОЗЫН КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУ
58-65

Әбдісамат М.
Абен А.Б.
ПАРКИНСОН АУРУЫН АНЫҚТАУ ҮШІН МАШИНАЛЫҚ ОҚУДЫ ПАЙДАЛАНУ
66-75

МАЗМҰНЫ
76-78

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Усманов К.И.
Мамидова М.Т.
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ К ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ТИПА ПАНТОГРАФА
7-14

Абан У.Б.
Турметов Б.Х.
О РАЗРЕШИМОСТИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ
15-30

ФИЗИКА

Балтабаева Д. Э.
Қалдар Б.С.
Абдурахманова Ш. Ш.
Амангельдиева Ю.О.
Эртаев Н.С.
ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОКРЫТИЙ ZRCN, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ГАЗОПЛАМЕННОГО НАПЫЛЕНИЯ
31-41

Сарыбек Й.
Чорух А.
Сайдахметов П.
Томак М.
ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕТАЛЛОВ PD, PT И RH МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ
42-57

ИНФОРМАТИКА

Рустамов Н.Т.
Амиртаев К.Б.
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО СИМБИОЗА ЧЕЛОВЕКА
58-65

Абдисамат М.
Абен А.Б.
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ БОЛЕЗНИ ПАРКИНСОНА
66-75

СОДЕРЖАНИЕ
76-78

CONTENT

MATHEMATICS

Usmanov K.I.
Mamidova M.T.
APPLICATION OF THE PARAMETRIZATION METHOD TO INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE PANTOGRAPH TYPE
7-14

Aban U.B.
Turmetov B.Kh.
ON THE SOLVABILITY OF DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR A CLASS OF DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS WITH INVOLUTION
15-30

PHYSICS

Baltabayeva D.E.
Kaldar B.S.
Abdurakhmanova Sh.Sh.
Amangeldiyeva Y.O.
Ertaev N.S.
INVESTIGATION OF PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF ZRCN COATINGS OBTAINED BY HIGH VELOCITY OXYGEN FUEL METHOD
31-41

Sarıbek Y.
Çoruh A.
Saidakhmetov P.
Tomak M.
MOLECULAR DYNAMICS SIMULATION STUDY OF THERMAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF PD, PT AND RH METALS
42-57

COMPUTER SCIENCE

Rustamov N.T.
Amirtayev K.B.
COMPUTER SIMULATION OF HUMAN PSYCHOLOGICAL SYMBIOSIS
58-65

Abdissamat M.
Aben A.B.
USING MACHINE LEARNING TO DETECT PARKINSON'S DISEASE
66-75

CONTENT
76-78

Қ.А. ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ
ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРЛАРЫ
(МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ)

Редакцияның мекен-жайы:
161200, Қазақстан Республикасы, Түркістан қаласы,
Б. Саттарханов даңғылы, 29В, ректорат, 404 бөлме.
Байланыс телефондары: 8 (725-33) 6-38-26 (19-60) e-mail: ayu-habarlari@ayu.edu.kz

Ғылыми редакторлар:
Қошанова М.Д., Курбанбеков Ш.Р., Жунисов Н.М.
Жауапты хатшы: Мұсахан Н.П.
Техникалық редактор: Камбарбеков С.Х.

Жарияланған мақала авторларының пікірі редакция көзқарасын білдірмейді.
Мақала мазмұнына автор жауап береді.
Қолжазбалар өңделеді және авторларға қайтарылмайды.
Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары (математика, физика, информатика сериясы) журналына жарияланған материалдарды сілтемесіз көшіріп басуға болмайды.

31.03.2025 ж. баспаға жіберілді

Журнал Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің «Тұран» баспаханасында көбейтілді.
Қағаздың пішімі: 70х100. Қағазы офсеттік А4.
Офсеттік басылым. Шартты баспа табағы 6.
Таралымы 110 дана. Тапсырыс 145.