

ISSN 2524-0080

Ғылыми журнал

<https://journals.ayu.edu.kz/index.php/news/issue/view/45>

*Қ. А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің*

# ХАБАРЛАРЫ

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА,  
ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

*Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesi'nin*

# HAVERLERİ

МАТЕМАТИК, FİZİK, BİLİŞİM SERİSİ

# ИЗВЕСТИЯ

*Международного казахско-турецкого университета имени Х.А.Ясави*

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА,  
ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

# NEWS

*Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University*

MATHEMATICS, PHYSICS,  
COMPUTER SCIENCE SERIES



ISSN 2524-0080  
Ғылыми журнал

*Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік  
университетінің*

## **ХАБАРЛАРЫ**

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

*Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesi'nin*

## **HABERLERİ**

МАТЕМАТİK, FİZİK, BİLİŞİM SERİSİ

## **ИЗВЕСТИЯ**

*Международного казахско-турецкого университета имени  
Ходжа Ахмеда Ясауи*

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

## **NEWS**

*Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University*

MATHEMATICS, PHYSICS, COMPUTER SCIENCE SERIES

*Қазақстан Республикасы Инвестициялар және даму министрлігінің Байланыс,  
ақпараттандыру және ақпарат комитетінде 04.12.2015 ж. тіркелді, куәлік №15721-Ж.*

*Қазақстан Республикасы Ақпарат және коммуникациялар министрлігінің Байланыс,  
ақпараттандыру және бұқаралық ақпарат құралдары саласындағы мемлекеттік бақылау  
комитетінде 10.03.2017 ж. қайта тіркелген, куәлік №16387-Ж.*

*Жылына 4 рет шығарылады.*

### **Ғылыми басылым**

*Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары  
(математика, физика, информатика сериясы) № 3 (22) 2022 ж.*

*Журнал 2016 жылдың мамыр айының 30 жұлдызынан бастап  
Париж қаласындағы ISSN орталығында тіркелген.*

### **Редакцияның мекен-жайы:**

*Редакцияның мекен-жайы: 161200, Қазақстан Республикасы, Түркістан қаласы,  
Б. Саттарханов даңғылы, 29В, ректорат, 404 бөлме.*

*Байланыс тетіктері: 8(725-33)6-38-26(19-60)*

*e-mail: ayu-habarlari@ayu.edu.kz,*

## РЕДАКЦИЯЛЫҚ АЛҚА МҮШЕЛЕРІ

### МАТЕМАТИКА

Баканов Г.Б.	- ф.-м.ғ.д., профессор, /Қазақстан/
Турметов Б.Х.	- ф.-м.ғ.д., профессор /Қазақстан/
Сәрсенби Ә.	- ф.-м.ғ.д., профессор /Қазақстан/
Нұрсұлтанов Е.Д.	- ф.-м.ғ.д., профессор /Қазақстан/
Фарук Учар	- профессор, доктор /Түркия/
Мануэль Де ла Сен	- PhD, профессор /Испания/

### ФИЗИКА

Тұрмамбеков Т.А.	- ф.-м.ғ.д., профессор, /Қазақстан/
Сейтов Б.Ж.	- PhD, /Қазақстан/
Кутербеков Қ.А.	- ф.-м.ғ.д., профессор, /Қазақстан/
Тілебаев Қ.Б.	- ф.-м.ғ.д., профессор, /Қазақстан/
Али Чорух	- профессор, доктор /Түркия/
Мелехат Билге Демиркөз	- профессор, доктор /Түркия/

### ИНФОРМАТИКА

Бидайбеков Е.Ы.	- п.ғ.д., профессор /Қазақстан/
Беркимбаев К.М.	- п.ғ.д., профессор /Қазақстан/
Кеңесбаев С.М.	- п.ғ.д., профессор /Қазақстан/
Булент Иылмаз	- профессор, доктор /Түркия/
Сагироглу Шереф	- профессор, доктор /Түркия/

## **DANIŞMA KURULU**

### **MATEMETİK**

Bakanov Galitdin	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Turmetov Batırhan	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Sarsenbi Abzhahan	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Nursultanov Erlan	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Faruk Uçar	- Prof. Dr. /Türkiye/
Manuel De La Sen	- PhD /İspanya/

### **FIZİK**

Turmambekov Törebay	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Seyitov Bekbolat	- PhD, /Kazakistan/
Kuterbekov Kayrat	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Tilebayev Kayrat	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Ali Çoruh	- Prof. Dr. /Türkiye/
Melehat Bilge Demirköz	- Prof. Dr. /Türkiye/

### **BİLİŞİM SERİSİ**

Bidaybekov Esen	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Berkimbayev Kamalbek	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Kenesbayev Serik	- Prof. Dr. /Kazakistan/
Bulent Yılmaz	- Prof. Dr. /Türkiye/
Sağiroğlu Şeref	- Prof. Dr. /Türkiye/

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

### МАТЕМАТИКА

Баканов Г.Б.	- д.ф.-м.н., профессор /Казахстан/
Турметов Б.Х.	- д.ф.-м.н., профессор /Казахстан/
Сарсенби А.	- д.ф.-м.н., профессор /Казахстан/
Нурсултанов Е.Д.	- д.ф.-м.н., профессор /Казахстан/
Фарук Учар	- профессор, доктор /Турция/
Мануэль Де ла Сен	- PhD, профессор /Испания/

### ФИЗИКА

Турмамбеков Т.А.	- д.ф.-м.н., профессор /Казахстан/
Сейтов Б.Ж.	- PhD, /Казахстан/
Кутербеков Қ.А.	- д.ф.-м.н., профессор /Казахстан/
Тилебаев К.Б.	- д.ф.-м.н., профессор /Казахстан/
Али Чорух	- профессор, доктор /Турция/
Мелехат Билге Демиркоз.	- профессор, доктор /Турция/

### ИНФОРМАТИКА

Бидайбеков Е.Ы.	- д.п.н., профессор /Казахстан/
Беркимбаев К.М.	- д.п.н., профессор /Казахстан/
Кенесбаев С.М.	- д.п.н., профессор /Казахстан/
Булент Иылмаз	- профессор, доктор /Турция/
Сагироглу Шереф	- профессор, доктор /Турция/

## **EDITORIAL BOARD**

### **MATHEMATICS**

Bakanov Galitdin	- Doctor of Physics and Mathematics, Professor /Kazakhstan/
Turmetov Batyrkhan	- Doctor of Physics and Mathematics, Professor /Kazakhstan/
Sarsenbi Abzhakhan	- Doctor of Physics and Mathematics, Professor /Kazakhstan/
Nursultanov Erlan	- Doctor of Physics and Mathematics, Professor /Kazakhstan/
Faruk Uchar	- Professor, Doctor /Turkey/
Manuel De la Sen	- PhD, Professor /Spain/

### **PHYSICS**

Turmambekov Torebay	- Doctor of Physics and Mathematics, Professor /Kazakhstan/
Seitov Bekbolat	- PhD, /Kazakhstan/
Kuterbekov Kairat	- Doctor of Physics and Mathematics, Professor /Kazakhstan/
Tilebayev Kairat	- Doctor of Physics and Mathematics, Professor /Kazakhstan/
Ali Choruh	- Professor, Doctor /Turkey/
Melekhat Bulge Demirkoz	- Professor, Doctor /Turkey/

### **COMPUTER SCIENCE**

Bidaibekov Esen	- Doctor of Pedagogical Sciences, Professor /Kazakhstan/
Berkimbayev Kamalbek	- Doctor of Pedagogical Sciences, Professor /Kazakhstan/
Kenesbayev Serik	- Doctor of Pedagogical Sciences, Professor /Kazakhstan/
Bulent Iylmaz	- Professor, Doctor /Turkey/
Sagiroglu Sheref	- Professor, Doctor /Turkey/

---

## МАТЕМАТИКА

---

ӘОЖ 517.954

МҒТАР 27.31.44

<https://doi.org/10.47526/2022-3/2524-0080.01>

**Б.Б. ОРМАН<sup>1</sup>, Б.Х. ТУРМЕТОВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты  
(Қазақстан, Түркістан), E-mail: bakdaulet.orman@ayu.edu.kz

<sup>2</sup>физика-математика ғылымдарының докторы, профессор  
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті  
(Қазақстан, Түркістан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

### ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ҮШІН КЕЙБІР ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

**Аңдатпа.** Бұл жұмыс Пуассон теңдеуі үшін кейбір шеттік есептердің шешімділігін зерттеуге арналған. Шекаралық операторлар бөлшек ретті туындылар арқылы анықталады. Қарастырылатын есептер белгілі Дирихле және Нейман есептерін жалпылайды. Зерттелетін есептер операторлық әдістерді қолдану арқылы шешіледі. Мақалада қарастырылатын есептердің шешімдері анықталады және оладың жалғыздығы дәлелденеді.

**Кілт сөздер:** Пуассон теңдеуі, интегралдық оператор, дифференциалдық оператор, бөлшек оператор, шеттік есеп, шешімнің бірегейлігі, шешімнің бар болуы.

**В.В. Orman<sup>1</sup>, В.Кh. Turmetov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University  
(Kazakhstan, Turkestan), E-mail: bakdaulet.orman@ayu.edu.kz

<sup>2</sup>doctor of physical and mathematical sciences, professor,  
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University  
(Kazakhstan, Turkestan), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

### On the solvability of some boundary value problems for the Poisson equation

**Abstract.** This work is devoted to the study of the solvability of some boundary value problems for the Poisson equation. Boundary operators are defined using fractional derivatives. The problems under consideration generalize the well-known Dirichlet and Neumann problems for the Poisson equation. The problems under study are solved by using operator methods. In the article solutions of the considered problems are determined and their uniqueness is proved.

**Keywords:** Poisson equation, integral operator, differential operator, fractional operator, boundary value problem, uniqueness of a solution, existence of a solution.

**Б.Б. Орман<sup>1</sup>, Б.Х. Турметов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>магистрант Международного казахско-турецкого университета имени  
Ходжа Ахмет Ясауи,

(Казахстан, Туркестан), E-mail: bakdaulet.orman@ayu.edu.kz

<sup>2</sup>доктор физико-математических наук, профессор,  
Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясауи  
(Казахстан, Туркестан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

### О разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Пуассона

**Аннотация.** Данная работа посвящена к исследованию разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Пуассона. Граничные операторы определяются при помощи

производных дробного порядка. Рассматриваемые задачи обобщают известные задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. Исследуемые задачи решаются применением операторных методов. В статье определяются решения рассматриваемых задач и доказываются их единственность.

**Ключевые слова:** уравнение Пуассона, интегральный оператор, дифференциальный оператор, дробный оператор, краевая задача, единственность решения, существования решения.

### 1. Кіріспе

Бұл жұмыста классикалық Пуассон теңдеуі үшін шекаралық шартында бөлшек ретті дифференциалдық оператор қатысқан шеттік есеп зерттелінеді. Алдымен осы мақалада қолданылатын бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық операторлардың анықтамаларын келтіреміз.

Кез келген  $f(x) \in C^1[0, b]$  функция үшін

$$T^\alpha f(x) = x^{1-\alpha} f'(x), \alpha > 0$$

түрдегі дифференциалдық операторды қарастырайық. Егер  $\alpha \in (0, 1)$  болса, онда келесі

$$I^\alpha f(x) = \int_0^x f(t) \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$$

интегралдық оператор  $T^\alpha$  үшін кері оператор болады. Осы оператордың  $n$  - дәрежесін  ${}^n T^\alpha$  түрінде белгілейік, яғни  ${}^n T^\alpha = \underbrace{T^\alpha \cdot T^\alpha \cdot \dots \cdot T^\alpha}_n$  болсын.

[1] жұмыста келесі интегралдық және дифференциалдық операторлар қарастырылған

$$J^{\alpha, \beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left( \frac{x^\beta - t^\beta}{\beta} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t^{1-\beta}}.$$

$$D^{\alpha, \beta} f(x) = {}^n T^\alpha [J^{n-\alpha, \beta} f](x) \equiv \frac{{}^n T^\alpha}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \left( \frac{x^\beta - t^\beta}{\beta} \right)^{n-\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t^{1-\beta}}, n-1 < \alpha \leq n,$$

$${}_c D^{\alpha, \beta} f(x) = J^{n-\alpha, \beta} [{}^n T^\alpha f](x) \equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \left( \frac{x^\beta - t^\beta}{\beta} \right)^{n-\alpha-1} {}^n T^\alpha f(t) \frac{dt}{t^{1-\beta}}, n-1 < \alpha \leq n.$$

$\alpha = 0$  болған ерекше жағдайда  $J^{0, \beta} f(x) = f(x)$  болсын деп есептейік.

Егер  $\beta = 1$  болса, онда  $J^{\alpha, \beta}$  операторы  $\alpha$  - ретті Риман-Лиувилл интегралына сәйкес келеді, ал  $D^{\alpha, \beta}$  және  ${}_c D^{\alpha, \beta}$  операторлары сәйкес түрде  $\alpha$  - ретті Риман-Лиувилл және Капуто туындыларымен бірдей болады [2].

Айталық,  $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$  - бірлік шар,  $n \geq 2$ ,  $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$  бірлік сфера,

$x \in \Omega$ ,  $r = |x|$ ,  $\theta = \frac{x}{|x|}$ ,  $\frac{d}{dr} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{r} \frac{\partial}{\partial x_j}$  және  $u = u(x)$  функциясы  $\Omega$  аймағында анықталған



болсын.

Кез-келген  $\alpha \in (0,1]$  және  $\beta > 0$  сандары үшін келесі операторларды қарастырамыз

$$J_r^{\alpha,\beta} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - t^\beta}{\beta} \right)^{\alpha-1} u(t\theta) \frac{dt}{t^{1-\beta}},$$

$$D_r^{\alpha,\beta} u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \right) \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} u(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}},$$

$$D_{*r}^{\alpha,\beta} u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \left( \tau^{1-\beta} \frac{d}{d\tau} \right) u(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}.$$

Алдағы зерттеулерімізде біз  $D_r^{\alpha,\beta} u(x)$  және  $D_{*r}^{\alpha,\beta} u(x)$  дифференциалдық операторларға қоса келесі

$$B^{\alpha,\beta}[u](x) = r^{\alpha\beta} D_r^{\alpha,\beta} u(x), B_{*r}^{\alpha,\beta}[u](x) = r^{\alpha\beta} D_{*r}^{\alpha,\beta} u(x),$$

$$B^{-(\alpha,\beta)} u(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} u(\tau^{1/\beta} x) d\tau$$

операторлардың қолданыстарын қарастырамыз. Мысал үшін осы операторлардың  $k$ -ретті  $H_k(x)$  - біртекті гармониялық полиномдарға әсерін көрейік. Егер  $H_k(x)$  полиномдар үшін  $H_k(\tau x) = \tau^k H_k(x)$  теңдігі орынды екенін ескерсек [3], онда анықтама бойынша

$$\begin{aligned} B^{-(\alpha,\beta)} H_k(x) &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} H(\tau^{1/\beta} x) d\tau = \frac{H_k(x)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\frac{k}{\beta}-\alpha} d\tau = \\ &= \frac{H_k(x)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1 - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1 - \alpha\right)}{\beta^\alpha \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)} H_k(x). \end{aligned}$$

Осы сияқты

$$\begin{aligned} B^{\alpha,\beta}[H_k](x) &= r^{\alpha\beta} D_r^{\alpha,\beta} H_k(x) = r^{\alpha\beta} \frac{H_k(\theta)}{\Gamma(1-\alpha)} \left( r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \right) \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \tau^k \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}} = \\ &= r^{\alpha\beta} \beta^{\alpha-1} \frac{H_k(\theta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^{\frac{k}{\beta}} d\xi \left( r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \right) r^{k-\alpha\beta+\beta} = \end{aligned}$$

$$= r^{\alpha\beta} \beta^{\alpha-1} \frac{H_k(\theta)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+2-\alpha\right)} (k-\alpha\beta+\beta)r^{k-\alpha\beta} = \beta^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1-\alpha\right)} H_k(x).$$

Олай болса,

$$B^{\alpha,\beta} [B^{-(\alpha,\beta)} [H_k]](x) = B^{-(\alpha,\beta)} [B^{\alpha,\beta} [H_k]](x) = H_k(x),$$

яғни гармониялық полиномдар класында  $B^{-(\alpha,\beta)}$  және  $B^{\alpha,\beta}$  өзара кері амалдар екен.

Енді осы жұмыста қарастырылатын негізгі есептердің қойылымын келтіреміз.  $\Omega$  аймағында келесі есептерді қарастырайық.

**1-Есеп.**  $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0$  шарттарды қанағаттандыратын  $\alpha$  және  $\beta$  сандары берілсін.

$\Omega$  аймағында анықталған, тегістігі  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $D_r^{\alpha,\beta} u(x) \in C(\bar{\Omega})$  болатындай және

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$D_r^{\alpha,\beta} u(x) \Big|_{\partial\Omega} = g(x) \quad (2)$$

шарттарды қанағаттандыратын  $u(x)$  функциясын анықтау қажет.

**2-Есеп.**  $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0$  шарттарды қанағаттандыратын  $\alpha$  және  $\beta$  сандары берілсін.

$\Omega$  аймағында анықталған, тегістігі  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $D_{*r}^{\alpha,\beta} u(x) \in C(\bar{\Omega})$  болатын, (1) – тендеуді және

$$D_{*r}^{\alpha,\beta} u(x) \Big|_{\partial\Omega} = g(x). \quad (3)$$

шартты қанағаттандыратын  $u(x)$  функциясын анықтау қажет.

Бұл есептердің тарихына шолу жасайтын болсақ, эллипс тектес тендеулер үшін шекаралық шартында бөлшек ретті оператор қатысқан шеттік есеп алғашқы рет С.Умаровтың [4] жұмысында зерттелінген. Кейін мұндай есептерге көптеген ғалымдардың назары түсті [5-10].  $\alpha$  және  $\beta$  параметрлердің  $\alpha = \beta = 1$  мәндерінде бұл есептер классикалық Нейман есебіне пара-пар [11], ал  $0 < \alpha \leq 1, \beta = 1$  мәндерінде [12,13] жұмыстарда зерттелінген. Біз осы жұмыстарда алынған нәтижелерді ары қарай  $\alpha \in (0,1), \beta > 0$  мәндеріне сәйкес дамытамыз.

## 2.Интегро-дифференциалдық операторлардың қасиеттері.

**1-Лемма.** Егер  $0 < \alpha, \beta$  және  $u(x) \in C(\bar{\Omega})$  болса, онда  $J_r^{\alpha,\beta} u(x)$  функциясыда  $C(\bar{\Omega})$  класына тиісті және  $J_r^{\alpha,\beta} u(0) = 0$  теңдігі орынды болады.

**Дәлелдеуі.**  $J_r^{\alpha,\beta} u(x)$  функциясын  $J_r^{\alpha,\beta}$  операторының анықтамасы бойынша келесі

$$|J_r^{\alpha,\beta} u(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - t^\beta}{\beta} \right)^{\alpha-1} |u(t\theta)| \frac{dt}{t^{1-\beta}} \leq \|u\|_{C(\bar{\Omega})} J^{\alpha,\beta} [1] = \frac{\beta^{-\alpha} \|u\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(\alpha+1)} r^{\alpha\beta}$$

түрде бағалауға болады. Бұдан  $\bar{\Omega}$  аймағының барлық нүктелерінде

$$\max_{\bar{\Omega}} |J_r^{\alpha, \beta} u(x)| \leq \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \|u\|_{C(\bar{\Omega})}$$

бағалау орынды.

Олай болса,  $J_r^{\alpha, \beta} u(x) \in C(\bar{\Omega})$ . Бұған қосымша

$$|J_r^{\alpha, \beta} u(0)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\beta^{-\alpha} \|u\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(\alpha + 1)} r^{\alpha\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} J_r^{\alpha, \beta} u(x) = 0.$$

Сонда,  $|J_r^{\alpha, \beta} u(0)| = 0 \Leftrightarrow J_r^{\alpha, \beta} u(0) = 0$ . сонымен 1-Лемма дәлелденді.

**1-Салдары.** Егер  $0 < \alpha, \beta$  және  $u(x) \in C(\bar{\Omega})$  болса, онда  $B^{-(\alpha, \beta)} u(x) \in C(\bar{\Omega})$ .

**2-Лемма.** Егер  $0 < \alpha < 1, \beta > 0$  және  $u(x)$   $\Omega$  аймағында тегіс функция болса, онда келесі

$$B^{-(\alpha, \beta)} [B^{\alpha, \beta} [u]](x) = B^{\alpha, \beta} [B^{-(\alpha, \beta)} [u]](x) = u(x), x \in \Omega \quad (3)$$

теңдіктер орынды.

**Дәледеуі.**  $B^{-(\alpha, \beta)}$  және  $B^{(\alpha, \beta)}$  операторларының анықтамаларына сәйкес

$$\begin{aligned} B^{-(\alpha, \beta)} [B^{\alpha, \beta} [u]](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - t^\beta}{\beta} \right)^{\alpha-1} t^{-\alpha\beta} B^{\alpha, \beta} [u](t\theta) \frac{dt}{t^{1-\beta}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - t^\beta}{\beta} \right)^{\alpha-1} \frac{d}{dt} \int_0^t \left( \frac{t^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} u(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}} dt = \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)} r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \int_0^r (r^\beta - t^\beta)^\alpha \frac{d}{dt} J_t^{1-\alpha, \beta} [u](t\theta) dt = \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)} r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \left[ (r^\beta - t^\beta)^\alpha J_t^{1-\alpha, \beta} [u](t\theta) \Big|_{t=0}^{t=r} + \int_0^r \alpha (r^\beta - t^\beta)^{\alpha-1} J_t^{1-\alpha, \beta} [u](t\theta) \frac{dt}{t^{1-\beta}} \right] = \\ &= r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - t^\beta}{\beta} \right)^{\alpha-1} J_t^{1-\alpha, \beta} [u](t\theta) \frac{dt}{t^{1-\beta}} \right] = r^{1-\beta} \frac{d}{dr} J_t^{\alpha, \beta} [J_t^{1-\alpha, \beta} [u]](x) = \\ &= r^{1-\beta} \frac{d}{dr} J_t^{1, \beta} [u](x) = r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \int_0^r u(t\theta) \frac{dt}{t^{1-\beta}} = u(x). \end{aligned}$$

Екінші жақтан

$$B^{\alpha,\beta} [B^{-(\alpha,\beta)} [u]](x) = r^{\alpha\beta+1-\beta} \frac{d}{dr} J^{1-\alpha,\beta} J^{\alpha,\beta} [r^{-\alpha\beta} u](x) = r^{\alpha\beta+1-\beta} \frac{d}{dr} J^{1,\beta} [r^{-\alpha\beta} u](x) = r^{\alpha\beta+1-\beta} r^{\beta-1-\alpha\beta} u(x) = u(x).$$

2-Леммада дәлелденді.

**3-Лемма.** Егер  $0 < \alpha < 1, \beta > 0$  және  $u(x)$   $\Omega$  аймағында тегіс функция болса, онда келесі

$$B_*^{\alpha,\beta} [u](x) = B^{\alpha,\beta} [u](x) - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} u(0), x \in \Omega. \quad (4)$$

$$B_*^{\alpha,\beta} [u](0) = 0. \quad (5)$$

теңдіктер орынды.

**Дәлелдеуі.** Айталық  $0 < \alpha \leq 1$  және  $\beta > 0$  болсын.  $B_*^{\alpha,\beta}$  операторының анықтамасын қолданатын болсақ, онда

$$\begin{aligned} B_*^{\alpha,\beta} [u](x) &= \frac{r^{\alpha\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \left( \tau^{1-\beta} \frac{d}{d\tau} \right) u(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}} = \\ &= \frac{r^{\alpha\beta}}{\Gamma(2-\alpha)} r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{1-\alpha} \frac{d}{d\tau} u(\tau\theta) d\tau = \\ &= \frac{r^{\alpha\beta+1-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{1-\alpha} u(\tau\theta) \Big|_{\tau=0}^{\tau=r} + (1-\alpha) \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} u(\tau\theta) d\tau \right] = \\ &= \frac{r^{\alpha\beta+1-\beta} \beta(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{r^{\beta(1-\alpha)-1}}{\beta^{1-\alpha}} u(0) + \frac{r^{\alpha\beta+1-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} u(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}} = B^{\alpha,\beta} u(x) - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} u(0). \end{aligned}$$

Бұл есептелердің нәтижесінде (4) – теңдіктің орындалуына көз жеткіземіз. Ары қарай,  $B^{\alpha,\beta} [u](x)$  функция өрнектелетін интегралда айнымалды  $\tau = r\xi^{1/\xi}$  түрінде алмастырсақ, онда

$$B^{\alpha,\beta} [u](x) = \frac{r^{\alpha\beta-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} r \frac{d}{dr} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} u(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{r^{\alpha\beta-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} r \frac{d}{dr} \left( \frac{r^{-\alpha\beta} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} u \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) \frac{r^{\xi^{\frac{1}{\beta}-1}} d\xi}{\beta \left( r^{\xi^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{1-\beta}} \right) = \frac{\beta^{\alpha-1} r^{\alpha\beta-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} r \frac{d}{dr} \left( r^{(1-\alpha)\beta} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} u \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) d\xi \right) \\
 &= \frac{\beta^{\alpha-1} r^{-(1-\alpha)\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} \left( (1-\alpha)\beta r^{(1-\alpha)\beta} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} u \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) d\xi + r^{(1-\alpha)\beta} r \frac{d}{dr} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} u \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) d\xi \right) = \\
 &= \left( r \frac{d}{dr} + (1-\alpha)\beta \right) \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} u \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) d\xi
 \end{aligned}$$

нәтиже орынды болады. Егер  $u(x)$  тегіс функция деп есептесек, онда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( r \frac{d}{dr} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} u \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) d\xi \right) = 0.$$

Сонымен қатар,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\alpha)\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} u \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) d\xi &= \frac{(1-\alpha)\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(0) \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} d\xi = \\
 &= \frac{(1-\alpha)\beta^{\alpha} u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(0).
 \end{aligned}$$

Соңғы нәтижелерден

$$B_*^{\alpha,\beta}[u](0) = \lim_{x \rightarrow 0} B_*^{\alpha,\beta}[u](x) = \lim_{x \rightarrow 0} B^{\alpha,\beta}[u](x) - \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(0) = 0,$$

теңдік келіп шығады, яғни (5)-теңдікте орынды екен. Лемма дәлелденді.

2 және 3 леммалардан келесі нәтиже келіп шығады.

**2-Салдар.** Егер  $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0$  және  $\Omega$  аймағында жеткілікті тегіс болған  $u(x)$  функциясы берілсе, онда

$$B_*^{\alpha,\beta} \left[ B^{-(\alpha,\beta)}[u] \right](x) = u(x) - u(0) \quad (6)$$

теңдік орынды.

**4 - Лемма.** Айталық  $u(x)$  функциясы үшін  $\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega$  теңдік орындалсын, онда  $B^{\alpha,\beta}[u](x)$  функциясы үшін

$$\Delta B^{\alpha,\beta}[u](x) = |x|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f](x), x \in \Omega. \quad (7)$$

теңдік орынды.

**Дәлелдеуі.** Анықтама бойынша  $B^{\alpha,\beta}[u](x)$  функциясы интеграл арқылы өрнектеледі. Осы интегралда айнымалды алмастыру нәтижесінде оны

$$B^{\alpha,\beta}[u](x) = \left( r \frac{d}{dr} + (1-\alpha)\beta \right) \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} u \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) d\xi,$$

түрінде жазып алуға болады. Кез-келген  $v(x)$  тегіс функция үшін мынандай

$$\Delta \left[ r \frac{d}{dr} v(x) \right] = \left( r \frac{d}{dr} + 2 \right) \Delta v(x).$$

теңдік орынды болатынын белгілі. Онда лемма шартында берілген  $\Delta u(x) = f(x)$  теңдікті ескерсек  $B^{\alpha,\beta}[u](x)$  функциясына алынған соңғы өрнекке Лаплас операторын қолдану нәтижесінде

$$\Delta B^{\alpha,\beta}[u](x) = \left( r \frac{d}{dr} + (1-\alpha)\beta + 2 \right) \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^{\frac{2}{\beta}} f \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) d\xi$$

теңдікке келеміз. Бұл интегралда айнымалды  $\xi = \frac{\tau^\beta}{r^\beta}$  түрінде алмастырсақ, онда  $\Delta B^{\alpha,\beta}[u](x)$  функциясы екі интегралдың қосындысы түрінде жазылады

$$\begin{aligned} \Delta B^{\alpha,\beta}[u](x) &= \left( r \frac{d}{dr} + (1-\alpha)\beta + 2 \right) \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^{\frac{2}{\beta}} f \left( \xi^{\frac{1}{\beta}} x \right) d\xi = \\ &= ((1-\alpha)\beta + 2) \frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \frac{\tau^2 f(\tau\theta) d\tau}{\tau^{1-\beta}} + \left( r \frac{d}{dr} \right) \frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \frac{\tau^2 f(\tau\theta) d\tau}{\tau^{1-\beta}}. \end{aligned}$$

Соңғы интегралды түрлендіріп келесі формада жазып аламыз

$$\begin{aligned} \left( r \frac{d}{dr} \right) \frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \tau^2 f(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}} &= ((\alpha-1)\beta - 2) \frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \tau^2 f(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}} + \\ &+ \frac{r^{\alpha\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)} \left( r^{1-\alpha} \frac{d}{dr} \right) \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \tau^2 f(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}. \end{aligned}$$

Онда

$$\Delta B^{\alpha,\beta}[u](x) = ((1-\alpha)\beta + 2) \frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left( \frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \tau^2 f(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}} +$$

$$\begin{aligned}
 & +((\alpha-1)\beta-2)\frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\frac{\tau^2 f(\tau\theta)d\tau}{\tau^{1-\beta}}+\frac{r^{\alpha\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(r^{1-\alpha}\frac{d}{dr}\right)\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\frac{\tau^2 f(\tau\theta)d\tau}{\tau^{1-\beta}}= \\
 & =\frac{r^{\alpha\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(r^{1-\alpha}\frac{d}{dr}\right)\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\tau^2 f(\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}=r^{\alpha\beta-2}D^{\alpha,\beta}[r^2 f](x)=r^{-2}B^{\alpha,\beta}[r^2 f](x).
 \end{aligned}$$

Сонымен (7) – теңдік орынды екендігіне көз жеткіздік. Лемма дәлелденді.

**3-Салдар.** Егер  $u(x)$  функциясы  $\Omega$  аймағында Лаплас теңдеуінің шешімі болса, онда  $B^{\alpha,\beta}[u](x)$  функциясында сол аймақта Лаплас теңдеуінің шешімі болады.

**1-Ескерту.**  $|x|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f](x)$  функциясы үшін

$$|x|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f](x)=\left(r\frac{d}{dr}+2+(1-\alpha)\beta\right)f_{\alpha,\beta}(x) \quad (8)$$

формулада орынды. Мұнда  $f_{\alpha,\beta}(x)=|x|^{(\alpha-1)\beta-2} J_r^{1-\alpha,\beta}[|x|^2 f](x)$ . Соңғы теңдікте  $\alpha=1$  болса, онда  $f_{1,\beta}(x)=f(x)$ .

(7) – формула сияқты нәтижені  $B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)$  функциясына дәлелдеуге болады. Осындай нәтижені келтіреміз.

**5 - Лемма.** Егер  $v(x)$  функциясы үшін  $\Delta v(x)=F(x), x \in \Omega$  теңдік орындалса, онда

$$\Delta B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)=|x|^{-2} B^{-(\alpha,\beta)}[|x|^2 F](x), x \in \Omega. \quad (9)$$

**Дәлелдеуі.**  $\alpha$  параметрі  $\alpha \in (0,1)$  аралықтан болсын.  $\Delta B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)$  функциясы өрнектелетін интегралда айнымалды  $\tau=r\xi^{1/\xi}$  түрінде алмастыру нәтижесінде келесі теңдіктерге ие боламыз:

$$\begin{aligned}
 \Delta B^{-(\alpha,\beta)}[v](x) & =\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta-t^\beta}{\beta}\right)^{\alpha-1}\frac{t^{-\alpha\beta}u(t\theta)dt}{t^{1-\beta}}=\frac{r^{\beta(\alpha-1)}}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}\frac{r^{-\alpha\beta}\xi^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)r\xi^{\frac{1}{\beta}-1}d\xi}{\beta\left(r\xi^{\frac{1}{\beta}}\right)^{1-\beta}}= \\
 & =\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{\alpha-1}\xi^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi.
 \end{aligned}$$

Олай болса

$$\Delta B^{-(\alpha,\beta)}[u](x)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{\alpha-1}\xi^{\frac{2}{\beta}-\alpha}F\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi=$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(1 - \frac{\tau^\beta}{r^\beta}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\tau^\beta}{r^\beta}\right)^{\frac{2}{\beta}-\alpha} F\left(\left(\frac{\tau^\beta}{r^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} x\right) \frac{\beta \tau^{\beta-1}}{r^\beta} d\tau = \\
 &= \frac{r^{\beta(1-\alpha)-2+\alpha\beta-\beta}}{\beta^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} \int_0^r (r^\beta - \tau^\beta)^{\alpha-1} \frac{\tau^{2-\alpha\beta} F(\tau\theta) d\tau}{\tau^{1-\beta}} = \frac{r^{-2}}{\beta^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} \int_0^r (r^\beta - \tau^\beta)^{\alpha-1} \frac{\tau^{2-\alpha\beta} F(\tau\theta) d\tau}{\tau^{1-\beta}} = \\
 &= r^{-2} B^{-(\alpha,\beta)} [r^2 F](x).
 \end{aligned}$$

Сонымен 5-Лемма дәлелденді.

Келесі леммада біз  $B^{-(\alpha,\beta)}$  операторының Гельдер класындағы әсерін анықтаймыз.

**6-Лемма.** Айталық  $0 < \alpha < 1, \beta > 0, 0 < \lambda < 1$  және  $f(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega})$ ,  $p = 0, 1, \dots$  болсын.

Онда  $B^{-(\alpha,\beta)} f(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega})$ .

**Дәлелдеуі.**  $\bar{\Omega}$  аймағында жататын, кез-келген  $x, y$  нүктелерді таңдап алайық.  $B^{-(\alpha,\beta)} f(x)$  функциясын  $h(x) = B^{-(\alpha,\beta)} f(x)$  деп белгілейік. Онда

$$\begin{aligned}
 |h(x) - h(y)| &\leq \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} |u(\tau^{1/\beta} x) - u(\tau^{1/\beta} y)| d\tau \leq \\
 &\frac{C |x-y|^\lambda}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\lambda/\beta-\alpha} d\tau \leq C |x-y|^\lambda.
 \end{aligned}$$

Бұл жерде және кейінгі есептеулерде  $C$  символымен мәндері өзгеріп отыратын тұрақтыны белгілейміз.

Егер  $i = (i_1, \dots, i_n)$  - мультииндекс және  $\partial_x^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$  болса, онда ұзындығы  $|i| \leq p$

болған кез-келген  $i$  және  $x, y \in \bar{\Omega}$  нүктелер үшін

$$|\partial_x^i h(x) - \partial_x^i h(y)| \leq \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{|i|/\beta-\alpha} |\partial_z^i u(z_x) - \partial_z^i u(z_y)| ds \leq C |x-y|^\lambda$$

теңсіздіктер орынды болады. Бұл жерде  $\partial_z^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_n^{i_n}}$ ,  $z_x = \tau^{1/\beta} x$ ,  $z_y = \tau^{1/\beta} y$ .

Олай болса,  $h(x)$  функциясы және  $|i| \leq p$  шартты қанағаттандыратын барлық  $i$  мультииндексстерге сәйкес келетін  $\partial^i h(x)$  функциялары  $C^\lambda(\bar{\Omega})$  класына тиісті болады. Сол себептен  $B^{-(\alpha,\beta)} f(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega})$ . Лемма дәлелденді.

Келесі лемма осы сияқты дәлелденеді.

**7-Лемма.** Егер  $0 < \alpha < 1, \beta > 0, 0 < \lambda < 1$  және  $f(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega})$ ,  $p = 1, 2, \dots$  болса, онда  $B^{\alpha,\beta} f(x) \in C^{\lambda+p-1}(\bar{\Omega})$ .



**4-Салдары.** Егер  $0 < \alpha < 1, \beta > 0, 0 < \lambda < 1$  және  $f(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega})$ ,  $p = 1, 2, \dots$  болса, онда  $|x|^{-2} B^{\alpha,\beta} [|x|^2 f](x) \in C^{\lambda+p-1}(\bar{\Omega})$ .

### 3. Негізгі есептерді зерттеу.

Бұл бөлімде біз 1 және 2- есептерге қатысты негізгі нәтижелерді баяндаймыз. Алдымен шешімнің жалғыз болуы туралы теореманы келтірейік.

**1-Теорема.** Егер 1 және 2- есептердің шешімдері бар болса, онда

1) 1- есептің шешімі жалғыз болады;

2) 2- есептің шешімі жалғыз емес. Егер  $u_1(x)$  және  $u_2(x)$  функциялары есептің кез-келген екі шешімі болса, онда  $u_1(x) - u_2(x) = C$  болады.

**Дәлелдеуі.**  $u(x)$  функциясы бір текті шарттармен берілген 1- есептің шешімі болсын делік. Осы жағдайда  $u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$  болатынын дәлелдейік.  $u(x)$  функциясына  $B^{\alpha,\beta}$  операторын қолданайықта, нәтижені  $v(x) = B^{\alpha,\beta} u(x)$  түрінде белгілейік. Егер соңғы теңдіке Лаплас операторын әсер еттірсек, онда  $\Delta v(x) = |x|^{-2} B^{\alpha,\beta} [|x|^2 \Delta u](x) = 0$  болады. Демек,  $v(x)$  функциясы  $\Omega$  аймағында Лаплас теңдеуінің шешімі, яғни гармониялық функция. Болжауымыз бойынша  $u(x)$  функциясы (1) және (2) шарттардың бір текті жағдайын қанағаттандырады. Онда  $v(x)|_{\partial\Omega} = B^{\alpha,\beta} u(x)|_{\partial\Omega} = 0$  шартыда орындалады. Олай болса,  $v(x)$  функциясы келесі  $\Delta v(x) = 0, x \in \Omega, v(x)|_{\partial\Omega} = 0$  Дирихле есебінің шешімі болғаны. Ал Дирихле есебінің шешімі жалғыз екендігін ескерсек, онда  $v(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$ . Басқаша айтқанда  $B^{\alpha,\beta} u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$ . Бұл теңдіктің екі жағына  $B^{-(\alpha,\beta)}$  операторын қолдансақ,  $u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$  теңдігі келіп шығады. Сонымен, 1- есептің шешімі жалғыз болады.

Айталық,  $u_1(x)$  және  $u_2(x)$  функциялары 2-есептің кез-келген екі шешімі болсын. Егер олардың айырымын  $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$  түрінде белгілесек, онда  $u(x)$  үшін 1- есептегі сияқты есептеулердің нәтижесінде  $B_*^{\alpha,\beta} u(x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$  түріндегі теңдікке келеміз. Бұл теңдікке  $B^{-(\alpha,\beta)}$  операторын қолдансақ, онда (6) формуладан

$$B^{-(\alpha,\beta)} B_*^{\alpha,\beta} u(x) \equiv 0 \Rightarrow u(x) - u(0) \equiv 0 \Rightarrow u(x) \equiv Const \Leftrightarrow u_1(x) - u_2(x) = C.$$

Теорема дәлелденді.

Ары қарай 1- есеп шешімінің бар болу мәселесін зерттейміз. Есептің шешімі бар болсын деп ұйғарайық. Егер  $v(x) = B^{\alpha,\beta} u(x)$  деп белгілесек, онда (7) – формуладан  $v(x)$  функциясы үшін келесі Дирихле есебін аламыз

$$-\Delta v(x) = F(x), x \in \Omega, v(x)|_{\partial\Omega} = g(x). \quad (10)$$

Мұнда  $F(x) = |x|^{-2} B^{\alpha,\beta} [|x|^2 f](x)$ .

Егер  $F(x)$  және  $g(x)$  жеткілікті тегіс функциялар үшін (10)-шеттік есептің шешімі әр қашанда бар, бірегей және ол (қараңыз, [14], 35 бет)

$$v(x) = \int_{\Omega} G(x, y) F(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} g(y) dS_y, \quad (11)$$

формуламен анықталады. Мұндағы  $G(x, y)$  (10)-есептің Грин функциясы.

$v(x) = B^{\alpha, \beta} u(x)$  теңдігіне  $B^{-(\alpha, \beta)}$  операторын қолдана отырып, (3) – формуланың бірінші теңдігінен  $u(x)$  функцияны бір мәнді түрде  $u(x) = B^{-(\alpha, \beta)} v(x)$  формула арқылы анықтаймыз. Егер  $v(x)$  функциясы 10-есептің шешімі болса, онда  $u(x) = B^{-(\alpha, \beta)} v(x)$  формуламен анықталған  $u(x)$  1- есептің (1) және (2) шарттарын қанағаттандырады. Шынында да, осы функцияға Лаплас операторын қолдансақ, онда (9)- теңдіктен

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\Delta B^{-(\alpha, \beta)} v(x) = |x|^{-2} B^{-(\alpha, \beta)} [|x|^2 F](x) = \\ &= |x|^{-2} B^{-(\alpha, \beta)} [|x|^2 F](x) = |x|^{-2} B^{-(\alpha, \beta)} [|x|^2 |x|^{-2} B^{\alpha, \beta} [|x|^2 f]](x) = \\ &= |x|^{-2} B^{-(\alpha, \beta)} [B^{\alpha, \beta} [|x|^2 f]](x) = |x|^{-2} |x|^2 f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Демек, (1)-теңдеу орындалады. (2)-шарттыңда орындалуын тексерейік:

$$D_r^{\alpha, \beta} u(x) \Big|_{\partial \Omega} = B^{\alpha, \beta} [B^{-(\alpha, \beta)} v(x)] \Big|_{\partial \Omega} = v(x) \Big|_{\partial \Omega} = g(x).$$

Сонымен біз  $u(x) = B^{-(\alpha, \beta)} v(x)$  функциясы 1- есептің (1) және (2) шарттарын формал түрде қанағаттандыратынын көрсеттік. Енді осы функцияның тегістік дәрежесін зерттейік. Егер  $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ ,  $0 < \lambda < 1$  болса, онда  $F(x) = |x|^{-2} B^{\alpha, \beta} [|x|^2 f](x)$  функция  $C^\lambda(\bar{\Omega})$  кеңістігіне тиісті болады. Онда,  $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial \Omega)$  үшін (10)-есептің шешімі  $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$  класқа тиісті (қараңыз, [15]). Олай болса, 7-лемманың нәтижесі бойынша есеп шешімі, яғни  $u(x) = B^{-(\alpha, \beta)} v(x)$  функциясы  $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$  класқа тиісті.

Сонымен біз келесі нәтижені алдық.

**2-Теорема.** Келесі  $0 < \alpha < 1, \beta > 0$ ,  $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ ,  $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial \Omega)$ ,  $0 < \lambda < 1$  шарттар орындалсын. Онда 1- есептің шешімі бар, жалғыз,  $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$  Гельдер класына тиісті және

$$u(x) = B^{-(\alpha, \beta)} v(x),$$

түрінде өрнектеледі. Бұл жерде  $v(x)$  функциясы (10)-есептің  $F(x) = |x|^{-2} B^{\alpha, \beta} [|x|^2 f](x)$  функциясына сәйкес келетін шешімі.

2- есеп үшін келесі нәже орынды.

**3-Теорема.** Келесі  $0 < \alpha < 1, \beta > 0$ ,  $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ ,  $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial \Omega)$ ,  $0 < \lambda < 1$  шарттар орындалсын. Онда 2- есептің шешімі бар болуы үшін

$$\int_{\Omega} f_{\alpha, \beta}(y) dy + (1 - \alpha) \beta \int_{\Omega} f_{\alpha, \beta}(y) dy + \int_{\partial \Omega} g(y) dS_y = 0, \quad (12)$$

теңдіктің орындалуы қажетті және жеткілікті, мұндағы  $f_{\alpha, \beta}(x)$  функциясы

$$f_{\alpha,\beta}(x) = |x|^{(\alpha-1)\beta-2} J_r^{1-\alpha,\beta} [|x|^2 f](x) \quad (13)$$

формуламен анықталады.

Егер есептің шешімі бар болса, онда бұл шешім  $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$  класына тиісті болады және

$$u(x) = C + B^{-(\alpha,\beta)} v(x)$$

түрінде өрнектеледі. Бұл жерде  $v(x)$  функциясы (10)-есептің  $F(x) = |x|^{-2} B^{\alpha,\beta} [|x|^2 f](x)$  функциясына сәйкес келетін және қосымша  $v(0) = 0$  шартты қанағаттандыратын шешімі.

**Дәлелдеуі.**  $u(x)$  функциясы 2- есептің шешімі болсын. Осы шешімге сәйкес келетін  $v(x) = B_*^{\alpha,\beta} u(x)$  функцияны қарастырайық. Егер (4) және (7) теңдіктерді есепке алсақ, онда  $v(x) = B_*^{\alpha,\beta} u(x)$  функция үшін

$$\Delta B_*^{\alpha,\beta} [u](x) = \Delta B^{\alpha,\beta} [u](x) - \Delta \left( \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} u(0) \right) = |x|^{-2} B^{\alpha,\beta} [|x|^2 f](x) \equiv F(x),$$

теңдеуді және  $v(x)|_{\partial\Omega} = B_*^{\alpha,\beta} u(x)|_{\partial\Omega} = D_r^{\alpha,\beta} u(x)|_{\partial\Omega} = g(x)$  шеттік шартты аламыз. Сонымен  $v(x)$  функциясы (10)-есептің шарттарын қанағаттандыратынын байқаймыз. Бұған қосымша, (4)-шарттан  $v(0) = 0$  теңдікте келіп шығады. Егер  $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$  және  $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$  болса, онда (10)- есептің шешімі бар және ол (11)-формуламен анықталады. Осы функция үшін  $v(0) = 0$  шарты қашан орындалатынын анықтайық. Егер  $n \geq 3$  болса (10)- есептің Грин функциясы келесі

$$G(x, y) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left[ |x-y|^{2-n} - \left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|^{2-n} \right],$$

түрде анықталады. Сондай-ақ, осы функцияның  $\frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu}$  нормал бағыттағы туындысы үшін

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} = -\frac{1}{\omega_n} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$$

теңдігі орынды. Бұл жерде  $\omega_n$  - бірлік сфера ауданы.

Ары қарай, (11)-теңдіктен

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \int_{\Omega} [|y|^{2-n} - 1] |y|^{-2} B^{\alpha,\beta} [|y|^2 f](y) dy + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} g(y) dS_y$$

нәтижеге ие боламыз. Егер

$$g_{\alpha,\beta}(y) = \frac{1}{(n-2)} [|y|^{2-n} - 1] |y|^{-2} B^{\alpha,\beta} [|y|^2 f](y)$$

деп белгілесек, онда  $v(0) = 0$  шарт орындалуы үшін қажетті және жеткілікті шарт келесі теңдікпен беріледі

$$\int_{\Omega} g_{\alpha,\beta}(y)dy + \int_{\partial\Omega} g(y)dS_y = 0 \quad (14)$$

[16] жұмыста  $g(x) = \left(r \frac{d}{dr} + 2\right) g_1(x)$  түрінде берілген функция үшін

$$\frac{1}{(n-2)} \int_{\Omega} [|x|^{2-n} - 1] g(x) dx = \frac{1}{(n-2)} \int_{\Omega} [|x|^{2-n} - 1] \left(r \frac{d}{dr} + 2\right) g_1(x) dx = \int_{\Omega} g_1(x) dx$$

теңдік дәлелденген. Онда (8) – теңдікті ескерсек

$$\int_{\Omega} g_{\alpha,\beta}(y)dy = \int_{\Omega} f_{\alpha,\beta}(y)dy + (1-\alpha)\beta \int_{\Omega} f_{\alpha,\beta}(y)dy$$

нәтиже келіп шығады. Олай болса, (14)-формуламен берілген шартты (12) –теңдік түрінде жазып алуға болады. Сонымен, 2-есептің шешімі бар болса (12) –шарт орындалуы қажетті екен. Осы шарт 2-есептің шешімі бар болуы үшін жеткілікте екендігін көрсетейік. Шынында да, егер  $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$  болса, онда  $F(x) = |x|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f](x)$  функциясы  $C^{\lambda}(\bar{\Omega})$  класына тиісті болады. Сонымен қатар  $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$  үшін (10)-есептің шешімі бар және (12)-шарт орындалғанда  $v(0) = 0$  теңдікте орындалады. Осы функция арқылы құрылған  $u(x) = C + B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)$  функцияны қарастырсақ, ол үшін

$$-\Delta u(x) = -\Delta[C] - \Delta B^{-(\alpha,\beta)}[v](x) = |x|^{-2} B^{-(\alpha,\beta)}[|x|^2 (-\Delta)v](x) =$$

$$|x|^{-2} B^{-(\alpha,\beta)}[B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f]](x) = f(x)$$

теңдік орынды. Бұған қосымша

$$\begin{aligned} D_{*r}^{\alpha,\beta} u(x) \Big|_{\partial\Omega} &= B_*^{\alpha,\beta} u(x) \Big|_{\partial\Omega} = B_*^{\alpha,\beta} [C + B^{-(\alpha,\beta)}v(x)] \Big|_{\partial\Omega} = B_*^{\alpha,\beta} [C] + B_*^{\alpha,\beta} [B^{-(\alpha,\beta)}v(x)] \Big|_{\partial\Omega} = \\ &= B_*^{\alpha,\beta} [B^{-(\alpha,\beta)}v(x)] \Big|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

шеттік шартта орындалады. Соңғы өрнек үшін

$$B_*^{\alpha,\beta} [B^{-(\alpha,\beta)}v(x)] = B^{\alpha,\beta} [B^{-(\alpha,\beta)}v(x)] - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} B^{-(\alpha,\beta)}[v](0).$$

Егер  $v(0) = 0$  шарт орындалса, онда  $B^{-(\alpha,\beta)}[v](0) = 0$  болады. Бұдан

$$D_{*r}^{\alpha,\beta} u(x) \Big|_{\partial\Omega} = B^{\alpha,\beta} [B^{-(\alpha,\beta)}v(x)] \Big|_{\partial\Omega} = v(x) \Big|_{\partial\Omega} = g(x).$$

Сонымен,  $u(x) = C + B^{-(\alpha, \beta)}[v](x)$  функциясы 2-есептің екі шартында қанағаттандырады екен. Бұл функцияның тегістігі 1-есептегі сияқты тексеріледі. Теорема дәлелденді.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетінің № AP09259137 грантымен қолдау тапты.

### ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D. On a new class of fractional operators // *Advances in Difference Equations*. –2017. –Vol. 2017, No.247. – P.1-16.
2. Kilbas A, Srivastava H.M, Trujillo J.J: *Theory and Application of Fractional Differential Equations*. –Amsterdam: Elsevier, 2006. – 512 p.
3. Карачик В.В. *Метод нормированных систем функций*. –Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 452 с.
4. Umarov S.R. Some boundary value problems for elliptic equations with a boundary operator of fractional order//*Doklady Mathematics*. – 1994. – Vol.48, No.3. – P.655 – 658.
5. Ashurov R.R. Fayziev Yu.E. On some boundary value problems for equations with boundary operators of fractional order // *International Journal of Applied Mathematics*. – 2021. – Vol. 34, No.2. – P. 283-295.
6. Vasil'eva N.V., Krasnoshchek, N.V. On the local solvability of the two-dimensional Hele-Shaw problem with fractional derivative with respect to time//*Siberian Advances in Mathematics*. – 2015. – Vol.25. – P.276 – 296.
7. Vasylyeva N. Local solvability of a linear system with a fractional derivative in time in a boundary condition// *Fractional Calculus and Applied Analysis*. – 2015. – Vol.18. – P. 982–1005.
8. Kirane M , Torebek B.T . On a nonlocal problem for the Laplace equation in the unit ball with fractional boundary conditions //*Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2016. – Vol.39, No.5. – P.1121 – 1128.
9. Krasnoschok M., Vasylyeva N. On a nonclassical fractional boundary-value problem for the Laplace operator// *Journal of Differential Equations*. – 2014. – Vol.257, No.6. – C.1814 – 1839.
10. Turmetov B., Nazarova V. On a generalization of the Neumann problem for the Laplace equation//*Mathematische Nachrichten*. – 2020. – Vol.293, No.1. – C.169 – 177.
11. Бицадзе А.В. К задаче Неймана для гармонических функций//*Докл. АН СССР*. – 1990. – Т.311, №1. – С.11 – 13.
12. Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения //*Дифференциальные уравнения*. – 1996. – Т.32, № 8. – С.1089 – 1092.
13. Turmetov B.K. On smoothness of a solution to a boundary value problem with fractional order boundary operator//*Siberian Advances in Mathematics*. – 2005. – Vol.15, No.2. – C.115 – 125.
14. Evans L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Soc., – 2010. – 749 p.
15. Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. – Berlin: Springer-Verlag GmbH, 2001. – 518 p.
16. Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order// *Boundary value problems*. – 2013. No. 93. – P.1 – 15.

### REFERENCES

1. Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D. On a new class of fractional operators // *Advances in Difference Equations*. –2017. –Vol. 2017, No.247. – P.1-16.

2. Kilbas A, Srivastava H.M, Trujillo J.J: Theory and Application of Fractional Differential Equations. –Amsterdam: Elsevier, 2006. – 512 p.
3. Karachik V.V Metod normirovannyh system funkicii [Method of normalized systems of functions]– Chrliabinsk: Izdatel'skii centr IUUrGU, 2014. – 452 p.
4. Umarov S.R. Some boundary value problems for elliptic equations with a boundary operator of fractional order//Doklady Mathematics. – 1994. – Vol.48, No.3. – P.655 – 658.
5. Ashurov R.R. Fayziev Yu.E. On some boundary value problems for equations with boundary operators of fractional order // International Journal of Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 34, No.2. – P. 283-295.
6. Vasil'eva N.V., Krasnoshchek, N.V. On the local solvability of the two-dimensional Hele-Shaw problem with fractional derivative with respect to time//Siberian Advances in Mathematics. – 2015. – Vol.25. – P.276 – 296.
7. Vasylyeva N. Local solvability of a linear system with a fractional derivative in time in a boundary condition// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2015. – Vol.18. – P. 982–1005.
8. Kirane M , Torebek B.T . On a nonlocal problem for the Laplace equation in the unit ball with fractional boundary conditions //Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2016. – Vol.39, No.5. – P.1121 – 1128.
9. Krasnoschok M., Vasylyeva N. On a nonclassical fractional boundary-value problem for the Laplace operator// Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol.257, No.6. – C.1814 – 1839.
10. Turmetov B., Nazarova V. On a generalization of the Neumann problem for the Laplace equation//Mathematische Nachrichten. – 2020. – Vol.293, No.1. – C.169 – 177.
11. Bicadze A.V. K zadache Neimana dlia gormonicheskikh funkicii [On the Neumann problem for harmonic functions] //Dokl. AN SSSR. – 1990. – T.311, №1. – C.11 – 13.
12. Turmetov B.H Ob odnoi kraevoi zadache dlia gormonicheskogo uravnenia [On a boundary value problem for a harmonic equation] //Differencialnye uravnenia. – 1996. – T.32, № 8. – C.1089 – 1092.
13. Turmetov B.K. On smoothness of a solution to a boundary value problem with fractional order boundary operator//Siberian Advances in Mathematics. – 2005. – Vol.15, No.2. – C.115 – 125.
14. Evans L. C. Partial Differential Equations. American Mathematical Soc., – 2010. – 749 p.
15. Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. – Berlin:Springer-Verlag GmbH, 2001. – 518 p.
16. Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order// Boundary value problems. – 2013. No. 93. – P.1 – 15.

**Х.А. МУРАТОВ<sup>1</sup>, Б.Х. ТУРМЕТОВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>магистрант Международного казахско-турецкого университета имени  
Ходжа Ахмета Ясауи

(Казахстан, Туркестан), E-mail: [87078220202h@gmail.com](mailto:87078220202h@gmail.com)

<sup>2</sup>доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий  
университет имени Ходжи Ахмеда Ясауи

(Казахстан, Туркестан), E-mail: [batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz](mailto:batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz)

**О СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ  
ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ**

**Аннотация.** В данной работе рассматриваются новые классы дифференциальных уравнений дробного порядка, связанные с производными Адамара. Эти уравнения обобщают известное уравнение теплопроводности для дробного показателя производной по времени. Для рассматриваемых уравнений изучены смешанные задачи с краевыми условиями Дирихле и Неймана. Для решения этих задач применяется метод Фурье. Получены две вспомогательные задачи относительно обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка и обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией. Изучены спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией. Для основных задач доказаны теоремы о существовании и единственности решений.

**Ключевые слова:** смешанная задача, дробная производная, инволюция, оператор Адамара, нелокальное уравнение, уравнение теплопроводности, условие Дирихле, условие Неймана.

**Х.А. Муратов<sup>1</sup>, Б.Х. Турметов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Қожа Ахмет атындағы халықаралық қазақ-түрік университетінің магистранты,  
(Қазақстан, Түркістан) E-mail: [87078220202h@gmail.com](mailto:87078220202h@gmail.com)

<sup>2</sup>физика-математика ғылымдарының докторы, профессор,

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан) E-mail: [batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz](mailto:batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz)

**Инволюциялы бөлшек ретті теңдеуі үшін аралас есептер туралы**

**Аңдатпа.** Бұл жұмыста бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің Адамар туындысымен байланысты жаңа кластары қарастырылады. Бұл теңдеулер әйгілі жылуөткізгіштік теңдеуінің уақыт бойынша туындының бөлшек көрсеткіштеріне жалпыламасы болып табылады. Қарастырылатын теңдеулер үшін Дирихле және Нейман шеттік шарттарымен берілген аралас есептер зерттелінген. Бұл есептерді шешу үшін Фурье әдісі қолданылады. Бөлшек ретті жай дифференциалдық теңдеулер және инволюциялы жай дифференциалдық теңдеулерге қатысты екі көмекші есептер алынған. Инволюциялы жай дифференциалдық операторлардың спектрлік қасиеттері зерттелінеді. Негізгі есептер үшін шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденген.

**Кілт сөздер:** аралас есеп, бөлшек туынды, инволюция, бейлокал теңдеу, Адамар операторы, жылу өткізгіштік теңдеуі, Дирихле шарты, Нейман шарты.

**Kh.A. Muratov<sup>1</sup>, B.Kh. Turmetov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University  
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: [87078220202h@gmail.com](mailto:87078220202h@gmail.com)

<sup>2</sup>doctor of physical and mathematical sciences, professor  
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University  
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: [batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz](mailto:batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz)

### On mixed problems for a class of fractional order equations with involution

**Abstract.** In this paper, we consider new classes of differential equations of fractional order related to Hadamard derivatives. These equations generalize the well-known heat conduction equation for the fractional exponent of the time derivative. For the equations under consideration, mixed problems with Dirichlet and Neumann boundary conditions are studied. The Fourier method is used to solve these problems. Two auxiliary problems are obtained for ordinary differential equations of fractional order and ordinary differential equations with involution. The spectral properties of ordinary differential operators with involution are studied. For the main problems, theorems on the existence and uniqueness of solutions are proved.

**Keywords:** mixed task, fractional derivative, involution, nonlocal equation, Hadamard operator, heat conduction equation, Dirichlet condition, the Neumann condition.

#### Введение

Обозначим  $Q = \{(t, x) : 0 < t < T, 0 < x < p\}$ , где  $p, T$  положительные действительные числа. Известно, что для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, (t, x) \in Q$$

основными начально-краевыми задачами являются задачи с граничными условиями Дирихле, Неймана и Робена. Все эти задачи считаются классическими и подробно описаны в учебниках по уравнениям математической физики (см. например, [1-3]).

Данная работа посвящена к исследованию смешанной задачи для уравнения дробного порядка с производными Адамара. Рассматриваемое нами уравнение является нелокальным обобщением уравнения теплопроводности включающий дробные значения производной по времени и является некоторым аналогом уравнений субдиффузии.

В дальнейшем для  $\alpha \in (m-1, m], m = 1, 2, \dots$  мы положим

$$D^\alpha y(t) = J^\alpha [\delta^m y] \equiv \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \left(\ln \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-m-1} \delta^m y(\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

где  $\delta = t \frac{d}{dt}$  и  $\delta^k = \delta \cdot \delta^{k-1}, k \geq 1$ ,  $J^\alpha$  - оператор интегрирования порядка  $\alpha > 0$  в смысле Адамара [4,5].

Для значений параметров  $\alpha \in (0, 1]$  и  $\beta > 0$  рассмотрим в  $Q$  следующее уравнение

$$t^{-\beta} D_t^\alpha u(t, x) = a_0 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 u(t, p-x)}{\partial x^2}, (t, x) \in Q, \quad (1)$$

где  $a_0, a_1$  некоторые действительные числа.



Если  $\alpha = 1, \beta = 1$ , то  $t^{-1} \left( t \frac{\partial}{\partial t} \right) u(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$ . Поэтому когда  $a_0 = 1, a_1 = 0$  мы получаем классическое параболическое уравнение, а в случае  $\alpha = 1, a_j \neq 0, j = 0, 1$  получается нелокальный аналог уравнения параболического типа. Следовательно, в общем случае уравнение (1) является дробным аналогом нелокального параболического уравнения.

В дальнейшем в исследуемых задачах мы находим регулярное решение, а именно функцию  $u(t, x)$  из класса  $C(\bar{Q})$ , обладающее свойством  $t^{-\beta} D_t^\alpha u(t, x), \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \in C(Q)$  и удовлетворяющее в области  $Q$  уравнению (1) в классическом смысле.

Основными задачами данной работы являются:

**Задача Д.** Для уравнения (1) необходимо найти регулярное решение, удовлетворяющее условия

$$u(0, x) = \varphi(x), 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, p) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где  $\varphi(x)$  - некоторые заданные функции.

**Задача Н.** Для уравнения (1) необходимо найти регулярное решение, для которой  $u_x(t, x) \in C(\bar{Q})$ , удовлетворяющее начальному условию (2) и краевым условиям

$$u_x(t, 0) = u_x(t, p) = 0, 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Отметим, что смешанные задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка с производными Капуто, Римана-Лиувилля, Хильфера, а также Джрбашьяна-Нерсесяна исследовались в работах [6-9]. Эти задачи для уравнению с производными Адамара в указанных постановках исследуются впервые.

При исследовании задач Д и Н используются метод разделение переменных. Применяя этот метод, для одномерных дифференциальных уравнений второго порядка с инволюцией мы получаем соответствующие спектральные задачи с условиями Дирихле и Неймана. Доказывается, что собственные функции этих задач совпадают с собственными функциями для классических задач. А соответствующие собственные значения зависят от коэффициентов участвующих в уравнении (1). Кроме того, по временной переменной получаем одномерную задачу типа Коши. Решение этой задачи представляется с помощью специальной функции Роя. Далее, используя полноту систем собственных функций вспомогательных задач, мы получаем явное представление решений исследуемых основных задач.

#### **Методы исследования**

**Спектральные задачи.** В этом разделе мы исследуем некоторые спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией.

Пусть  $X_{D,n}(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right), \mu_n = \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2, n \in N$ . Известно [10], что  $X_n(x)$  является

полной ортонормированной системой в пространстве  $L_2(0, p)$  и удовлетворяют условиям следующей спектральной задачи

$$-X''(x) = \mu X(x), 0 < x < p, X(0) = X(p) = 0.$$

Так как для  $X_{D,n}(x)$  при всех  $0 < x < p, n \in N$  справедливы равенства

$$X_{D,n}(p-x) = (-1)^{n+1} X_{D,n}(x),$$

то

$$a_0 X_{D,n}''(x) + a_1 X_{D,n}''(p-x) = -(a_0 + a_1 (-1)^{n+1}) \mu_n X_{D,n}(x).$$

Если обозначим  $\lambda_{D,n} = (a_0 + a_1 (-1)^{n+1}) \mu_n, n \in N$ , то для системы  $X_{D,n}(x)$  имеем

$$a_0 X_{D,n}''(x) + a_1 X_{D,n}''(p-x) = -\lambda_{D,n} X_{D,n}(x).$$

Таким образом, система  $X_{D,n}(x)$  являются собственными функциями, а  $\lambda_{D,n}$  соответствующими собственными значениями спектральной задачи

$$a_0 X''(x) + a_1 X''(-x) = -\lambda X(x), 0 < x < p, \quad (5)$$

$$X(0) = X(p) = 0. \quad (6)$$

Так как  $X_n(x)$  является полной системой, то задача (5) -(6) других собственных функций не имеет.

Аналогично рассмотрим функции  $X_{N,k}(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \frac{k\pi x}{p}, k = 0, 1, \dots$ . Так как

$$X'_{N,k}(x) = -\frac{k\pi}{p} \sin \frac{k\pi x}{p},$$

то очевидно, что  $X'_{N,k}(0) = X'_{N,k}(p) = 0$ . Кроме того,

$$X''_{N,k}(x) = -\left(\frac{k\pi x}{p}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \frac{k\pi x}{p} \equiv -\left(\frac{k\pi x}{p}\right)^2 X_{N,k}(x).$$

и

$$X_{N,k}(p-x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \frac{k\pi(p-x)}{p} = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \frac{k\pi x}{p} = (-1)^k X_{N,k}(x).$$

Таким образом, элементы системы  $\{X_{N,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$  являются собственными функциями, а

$\lambda_{N,k} = (a_0 + (-1)^k a_1) \left(\frac{k\pi x}{p}\right)^2$  соответствующими собственными значениями спектральной задачи

$$a_0 X''(x) + a_1 X''(-x) = -\lambda X(x), 0 < x < p, X'(0) = X'(p) = 0.$$

Система  $\{X_{n,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$  является полной и ортонормированной в пространстве  $L_2(0, p)$ .  
Для  $a_0 + a_1(-1)^{n+1}$  справедливы равенства

$$a_0 + a_1(-1)^{n+1} = \begin{cases} a_0 + a_1, n = 2m - 1 \\ a_0 - a_1, n = 2m \end{cases}.$$

Введем обозначение  $\varepsilon_1 = a_0 + a_1, \varepsilon_2 = a_0 - a_1$ . В дальнейшем будем считать их положительными числами, т.е.  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ .

### Исследование основных задач

Исследуем задачу D. Если  $u(t, x)$  является решением задачи D, то по определению  $u(t, x) \in C(\bar{Q})$  и, следовательно,  $u(t, x) \in L_2(Q)$ . Тогда при каждом  $t \in [0, T]$  функция  $u(t, x)$  является элементом пространства  $L_2(0, p)$ . Следовательно, функцию  $u(t, x)$  можно представить в виде ряда по системе  $X_{D,k}(x)$ , а именно

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_{D,k}(x), \quad (7)$$

где  $u_k(t)$  коэффициенты, которые необходимо определить. Функцию  $\varphi(x)$  разлагаем в ряд Фурье по ортогональной системе  $X_{D,k}(x)$ , т.е. представим в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{D,k}(x),$$

где  $\varphi_k$  коэффициенты Фурье, которые можно определить равенствами

$$\varphi_k = \int_0^p \varphi(x) X_{D,k}(x) dx, k \geq 1.$$

Искомую функцию  $u(t, x)$  из равенства (7) подставляем в уравнении (1) и имеем

$$\begin{aligned} 0 &= t^{-\beta} D_t^\alpha u(t, x) - a_0 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial^2 u(t, p-x)}{\partial x^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\beta} D_t^\alpha u_k(t) X_{D,k}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) [a_0 X_{D,k}''(x) + a_1 X_{D,k}''(p-x)] = \sum_{k=1}^{\infty} [t^{-\beta} D_t^\alpha u_k(t) + \lambda_{D,k} u_k(t)] X_{D,k}(x). \end{aligned}$$

Тогда в силу полноты системы  $X_{D,k}(x)$  для всех значения  $k = 1, 2, \dots$ , получаем

$$t^{-\beta} D_t^\alpha u_k(t) + \lambda_{D,k} u_k(t) = 0, 0 < t < T.$$

Далее, из условия (2) задачи D имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{D,k}(x) = \varphi(x) = u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) X_{D,k}(x).$$

Следовательно, значения  $u_k(0)$  определяются равенствами  $u_k(0) = \varphi_k$ . Таким образом, для неизвестных коэффициентов  $u_k(t)$  получаем следующую систему задач Коши

$$t^{-\beta} D_t^\alpha u_k(t) + \lambda_{D,k} u_k(t) = 0, 0 < t < T, u_k(0) = \varphi_k. \quad (8)$$

Используя утверждение Леммы 4 из работы [11] находим, что единственное решение задачи (8) представляется в виде

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_{D,k})^i}{(i!)^\alpha \beta^{i\alpha}} t^{i\beta} \equiv \varphi_k R_\alpha \left( -\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right),$$

где  $R_\alpha(-z)$  называется функцией Роя (см. например, [12]).

Отсюда для решения задачи D получаем следующее представление

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k R_\alpha \left( -\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right) X_{D,k}(x). \quad (9)$$

По построению функция  $u(t, x)$  из равенства (9) формально удовлетворяет всем условиям задачи D. Остается исследовать необходимые нам гладкость функции  $u(t, x)$ . В работе [12] для функции  $R_\alpha(-z)$  получена следующая оценка

$$R_\alpha(-z) \leq \frac{1}{1+z}, z \geq 0, 0 < \alpha < 1.$$

В нашем случае данная оценки имеет вид

$$\left| R_\alpha \left( -\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right) \right| \leq \frac{1}{1 + \left| \frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right|}. \quad (10)$$

В частности, для всех  $t \geq 0$  верно неравенство

$$\left| R_\alpha \left( -\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right) \right| \leq 1.$$

Так как  $|X_{D,k}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{p}} \equiv M$ , то для функции  $u(t, x)$ , точнее для суммы ряда (9) имеет место неравенство

$$|u(t, x)| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|. \quad (11)$$

Далее, нам необходимо оценить коэффициенты  $\varphi_k$ . Если функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям:  $\varphi(x) \in C^2[0, p]$  и  $\varphi(0) = \varphi(p) = 0$ , то отсюда легко следует равенство

$$\varphi_k = \int_0^p \varphi(x) X_{D,k}(x) dx = -\left(\frac{p}{n\pi}\right)^2 \int_0^p \varphi''(x) X_{D,k}(x) dx.$$

Значит, оценивая сверху этот интеграл, получаем

$$|\varphi_k| \leq \frac{M}{k^2}.$$

Тогда используя неравенство (11), имеем

$$|u(t, x)| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса сумма ряда (9) принадлежит классу  $C(\bar{Q})$ , т.е.  $u(t, x) \in C(\bar{Q})$ . Исследуем гладкость функции  $t^{-\beta} D_t^\alpha u(t, x)$ . Если  $0 \leq x \leq p, t \geq \delta > 0$ , то для ряда представляющий функцию  $t^{-\beta} D_t^\alpha u(t, x)$  следующее равенство

$$t^{-\beta} D_t^\alpha u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k t^{-\beta} D_t^\alpha R_\alpha \left( -\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right) X_{D,k}(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \lambda_{D,k} R_\alpha \left( -\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right) X_{D,k}(x).$$

Отсюда используя оценку (10), имеем

$$\left| t^{-\beta} D_t^\alpha u(t, x) \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \lambda_{D,k} \frac{1}{1 + \left| \frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right|} \leq M \beta^\alpha \delta^{-\beta} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| < \infty.$$

Следовательно, для любого  $\delta > 0$  ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k t^{-\beta} D_t^\alpha R_\alpha \left( -\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha} t^\beta \right) X_{D,k}(x)$$

сходится равномерно в области  $0 \leq x \leq p, t \geq \delta > 0$  и его сумма представляет непрерывную функцию. Значит,  $t^{-\beta} D_t^\alpha u(t, x) \in C(Q)$ . Аналогично доказывается включение  $u_{xx}(t, x) \in C(Q)$ .

Сформулируем основное утверждение относительно задачи D.

**Теорема 1.** Пусть  $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0, a_0 \pm a_1 > 0, \varphi(x) \in C^2(\bar{Q})$  и выполняются условия  $\varphi(0) = \varphi(p) = 0$ . Тогда решение задачи D существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^p \varphi(\tau) X_{D,k}(\tau) d\tau \right) R_{\alpha} \left( -\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta} \right) X_{D,k}(x).$$

Для полного доказательства теоремы нам остается показать единственность решения. Предположим, что функция  $u(t, x)$  является решением однородной задачи D. Рассмотрим функцию  $u_k(t) = (u(t, x), X_{D,k}(x))$ . Применим к этой функции оператор  $t^{-\beta} D_t^{\alpha}$  и учитывая уравнения (1), а далее интегрированием по частям, имеем

$$\begin{aligned} t^{-\beta} D_t^{\alpha} u_k(t) &= (t^{-\beta} D_t^{\alpha} u(t, x), X_{D,k}(x)) = (a_0 u_{xx}(t, x) + a_1 u_{xx}(t, p-x), X_{D,k}(x)) = \\ &= a_0 (u_{xx}(t, x), X_{D,k}(x)) + a_1 (u_{xx}(t, p-x), X_{D,k}(x)) = (a_0 + (-1)^{k+1} a_1) \left( \frac{k\pi}{p} \right)^2 (u(t, x), X_{D,k}(x)) = \\ &= -\lambda_{D,k} (u(t, x), X_{D,k}(x)) = -\lambda_{D,k} u_k(t). \end{aligned}$$

Кроме того,  $u_k(0) = (u(0, x), X_{D,k}(x)) = 0$ . Таким образом, для функции  $u_k(t) = (u, X_{D,k})$  мы получили однородную задачу (8). Единственным решением этой задачи является функция  $u_k(t) = 0$ . Значит,  $(u(t, x), X_{D,k}(x)) = 0$ , т.е. функция  $u(t, x)$  ортогональна всем элементам системы  $X_{D,k}(x)$ . Далее, в силу полноты системы  $X_{D,k}(x)$ , получаем  $u(t, x) \equiv 0$ . Теорема доказана.

Задача N исследуется аналогичным образом.

Приведем без доказательства основное утверждение относительно задачи N. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0, a_0 \pm a_1 > 0, \varphi(x) \in C^2(\bar{Q})$  и выполняются условия  $\varphi'(0) = \varphi'(p) = 0$ . Тогда решение задачи N существует, единственно и представляется в виде

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^p \varphi(\tau) X_{N,k}(\tau) d\tau \right) R_{\alpha} \left( -\frac{\lambda_{N,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta} \right) X_{N,k}(x).$$

### **Заключение.**

В данной работе мы исследовали начально-краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений дробного порядка. В качестве краевых условий мы рассмотрели условия Дирихле и Неймана. Применяя метод Фурье, мы получили соответствующую спектральную задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией. Используя полноту систем собственных функций вспомогательных задач нам удалось построить явный вид решений основных задач.

Основной новизной исследуемых задач заключаются в том, что в рассматриваемых нами уравнениях использованы дробные производные в смысле Адамара. В случае целого

значения производной, как и операторы Римана-Лиувилля и Капуто этот оператор совпадает с обычным оператором дифференцирования целого порядка. Но, в отличие операторов Римана-Лиувилля и Капуто, ядро данного оператора определяется логарифмической функцией и поэтому порядок роста этой функции отличается от порядка степенной функции. Таким образом, мы можем утверждать, что рассматриваемые нами уравнения определяют новые классы уравнений субдиффузии. Соответственно, решения рассматриваемых задач будут обладать новыми качественными свойствами. Например, при больших значениях времени порядок убывания решений рассматриваемых задач отличаются от порядка убывания решений для классического уравнения теплопроводности. Такие же свойства решений наблюдаются при приближении точек объекта к границе, т.е. к граничным значениям. В данной статье для уравнения (1) мы исследовали задачи с условиями Дирихле и Неймана. В дальнейших исследованиях для уравнения (1) мы предполагаем рассматривать краевые условия типа Самарского-Ионкина, а также изучить нелокальные по времени задачи. Для этих предполагаемых задач соответствующие спектральные задачи еще не изучены.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP09259074 ).

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Evans LC. Partial differential equations. Vol. 19, Graduate studies in mathematics. Providence(RI): American Mathematical Society; 1998. 668 p.
2. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. Серия: Классический университетский учебник. -- М.: Московский Университет; Издание 2-е, испр. и доп., 2004 г. 416 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие. - 6-е изд., испр. и доп. - М.: Изд-во МГУ, 1999.
4. Kilbas A.A., Srivastava H.M, Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam 2006.
5. Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives. Advances in Difference Equations. – 2012. – No.142. – P.1 – 8.
6. Al-Salti N, Kirane M., Torebek B.T. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. – 2019. – Vol. 48, No.3. – P. 669 – 681.
7. Berdyshev A.S. , Kadirkulov B.J. On a nonlocal problem for a fourth-order parabolic equation with the fractional Dzhrbashyan–Nersesyan operator // Differential Equations. – 2016.– V. 52, No.1. – P. 121–127.
8. Kubica A., Yamamoto M. Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coefficients. Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2018.– V. 21. – P. 276–311.
9. Luchko Y., Yamamoto M. General time-fractional diffusion equation: some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2016.– V. 19, № 3, – P. 676 – 695.
10. Naimark M.A. Linear Differential Operators Part II, Ungar, New York, 1968 .
11. Turmetov B. Kh., Kadirkulov B. J. On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, No.1. – P. 249 – 262.
12. Boudabsa L., Simon Th. Some properties of the Kilbas–Saigo function // Mathematics. – 2021. – Vol.9, No.3. – P.1 – 24.
13. Le Roy E. Valeurs asymptotiques de certaines series procedant suivant les puissances

entres et positives d'une variable reelle// Darboux Bull. – 1899. – Vol.24. – P.245–268.

## REFERENCES

1. Evans LC. Partial differential equations. Vol. 19, Graduate studies in mathematics. Providence(RI): American Mathematical Society; 1998. 668 p.
2. Sveshnikov A.G., Bogoliubov A.N., Kravtsov V.V. Lektcii po matematicheskoi fizike [Lectures on mathematical physics]. Seria: Klassicheskii universitetskii uchebник. -- M.: Moskovskii Universitet; Izdanie 2-e, ispr. i dop., 2004 г. 416 p.
3. Tihonov A.N., Samarskii A.A. Uravnenia matematicheskoi fiziki: uchebnoe posobie. [Equations of mathematical physics: Textbook]. - 6-e izd., ispr. i dop. - M.: Izd-vo MGU, 1999.
4. Kilbas A.A., Srivastava H.M, Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam 2006.
5. Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives. Advances in Difference Equations. – 2012. – No.142. – P.1 – 8.
6. Al-Salti N, Kirane M., Torebek B.T. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. – 2019. – Vol. 48, No.3. – P. 669 – 681.
7. Berdyshev A.S. , Kadirkulov B.J. On a nonlocal problem for a fourth-order parabolic equation with the fractional Dzhrbashyan–Nersesyan operator//Differential Equations. – 2016.– V. 52, No.1. – P. 121–127.
8. Kubica A., Yamamoto M. Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coefficients. Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2018.– V. 21. – P. 276–311.
9. Luchko Y., Yamamoto M. General time-fractional diffusion equation: some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2016.– V. 19, № 3, – P. 676 – 695.
10. Naimark M.A. Linear Differential Operators Part II, Ungar, New York, 1968 .
11. Turmetov B. Kh., Kadirkulov B. J. On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, No.1. – P. 249 – 262.
12. Boudabsa L., Simon Th. Some properties of the Kilbas–Saigo function // Mathematics. – 2021. – Vol.9, No.3. – P.1 – 24.
13. Le Roy E. Valeurs asymptotiques de certaines series procedant suivant les puissances enteres et positives d'une variable reelle// Darboux Bull. – 1899. – Vol.24. – P.245–268.



**М.Э. БАЛТАБАЕВА<sup>1</sup>, Б.Х. ТУРМЕТОВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>магистрант Международного казахско-турецкого университета имени  
Ходжи Ахмеда Ясави

(Казахстан, Туркестан), E-mail: [mastura.baltabayeva@ayu.edu.kz](mailto:mastura.baltabayeva@ayu.edu.kz)

<sup>2</sup>доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий  
университет имени Ходжи Ахмеда Ясави

(Казахстан, Туркестан), E-mail: [batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz](mailto:batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz)

## **ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ РОБЕНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КРУГЕ**

**Аннотация.** В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости дробного аналога задачи Робена для уравнения Лапласа. В качестве граничного оператора рассматривается модифицированный оператор дробного дифференцирования в смысле Адамара. Краевые условия задаются в виде связи различных значений неизвестной функции в окружности. Задача решается с применением метода разложения Фурье. Для различных значений параметров участвующих в граничных операторах доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемой задачи.

**Ключевые слова:** задача Робена, дробный аналог, производная Адамара, инволютивное преобразование, единственность решения, существование решения.

**М.Э. Балтабаева<sup>1</sup>, Б.Х. Турметов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты,  
(Қазақстан, Түркістан), E-mail: [mastura.baltabayeva@ayu.edu.kz](mailto:mastura.baltabayeva@ayu.edu.kz)

<sup>2</sup>физика-математика ғылымдарының докторы, профессор  
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті  
(Қазақстан, Түркістан), E-mail: [batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz](mailto:batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz)

## **Инволюциялы бөлшек ретті жылуткізгіштік тендеуі үшін кейбір бастапқы- шеттік есептердің шешімділігі туралы**

**Аңдатпа.** Бұл жұмыста Лаплас тендеуі үшін Робен есебінің бөлшек ретті аналогының шешімділігі мәселесі зерттелінеді. Шекаралық оператор ретінде Адамар мағнасындағы модификацияланған бөлшек ретті дифференциалдау операторы қарастырылады. Шеттік шарттар белгісіз функцияның шеңбердегі әртүрлі мәндерінің байланысы түрінде беріледі. Есеп Фурьенің ажырату әдісін қолдану арқылы шешіледі. Шекаралық операторларда қатысатын параметрлердің әртүрлі мәндері үшін қарастырылатын есептің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденеді.

**Кілт сөздер:** Робен есебі, бөлшек аналогы, Адамар туындысы, инволютивтік түрлендіру, шешімнің бірегейлігі, шешімнің бар болуы.

**M.E. Baltabaeva<sup>1</sup>, B.Kh. Turmetov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University  
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: [mastura.baltabayeva@ayu.edu.kz](mailto:mastura.baltabayeva@ayu.edu.kz)

<sup>2</sup>doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khoja Akhmet Yassawi International  
Kazakh-Turkish University  
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: [batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz](mailto:batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz)

**On a generalization of the robin problem for the Laplace equation in the circle**

**Abstract.** In this paper, we study the solvability of the fractional analogue of the Robin problem for the Laplace equation. A modified fractional differentiation operator in the sense of Hadamard is considered as a boundary operator. Boundary conditions are given in the form of a connection between different values of the unknown function in a circle. The problem is solved using the Fourier expansion method. For various values of the parameters of the boundary operators involved, theorems on the existence and uniqueness of a solution to the problem under study are proved.

**Keywords:** Robin problem, fractional analog, Hadamard derivative, involutive transformation, uniqueness of solution, existence of solution.

**1. Введение.**

Введем следующие обозначения:  $\Omega = \{x \in R^2 : |x| < 1\}$ ,  $\partial\Omega = \{x \in R^2 : |x| = 1\}$ ,  $r = |x|$ ,  $\delta = r \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\varphi = \arctg(x_2 / x_1)$ . Далее, для любой гладкой функции  $u(r, \varphi)$  рассмотрим операторы

$$J^\alpha [u](r, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{u(s, \varphi)}{s} ds, (r, \varphi) \in \Omega, \alpha > 0 \\ J^0 [u](r, \varphi) = u(r, \varphi), \alpha = 0 \end{cases},$$

и

$$D^\alpha [u](r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s}\right)^{m-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds}\right)^m [u(s, \varphi)] \frac{ds}{s}, \alpha \in (m-1, m], m \geq 1.$$

Эти операторы были введены в работе Ж.Адамара [1] и в настоящее время называются соответственно интегралом и производной порядка  $\alpha$  в смысле Адамара. В дальнейшем введены различные обобщения операторов  $J^\alpha$  и  $D^\alpha$  (см. например, [2-4]). Заметим, что свойства и применение операторов  $J^\alpha$  и  $D^\alpha$  подробно описаны в работе [5]. Кроме того, к исследованию вопросов разрешимости краевых задач с производными Адамара обращены работы [6-9].

Приведем постановку задачи исследуемой в настоящей работе. С помощью отображений вида

$$S_0 x = x, S_1 x = (-x_1, x_2), S_2 x = (x_1, -x_2), S_3 x = (-x_1, -x_2)$$

для любой точки  $x = (x_1, x_2)$  пространства  $R^2$  сопоставим элементы того же пространства.

Эти отображения в полярной системе координат можно задать следующим образом:

$$S_1 x = (r \cos(\pi - \varphi), r \sin(\pi - \varphi)), S_2 x = (r \cos(\pi + \varphi), r \sin(\pi + \varphi)),$$

$$S_3 x = (r \cos(2\pi - \varphi), r \sin(2\pi - \varphi)).$$

Рассматриваемые отображения обладают свойствами

$$S_j^2 x = x, S_j^3 x = x, j = 1, 2, 3, S_1 S_2 x = S_3 x, S_1 S_3 x = S_2 x, S_2 S_3 x = S_1 x.$$

Известно [10], что для уравнения Лапласа одной из корректно поставленной задачей является третья краевая задача (задача Робена), т.е. задача следующего вида

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega, a \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + bu(x) = g(x), x \in \partial \Omega,$$

где  $\nu$  - вектор нормали к границе области  $\Omega$ ,  $a, b \in R$ .

В настоящей работе мы рассмотрим некоторое обобщение этой задачи для дробных значений граничных операторов.

Пусть  $m-1 < \alpha \leq m$  и  $a_j, j = 0, 1, 2, 3$  - действительные числа и  $x^* = Sx$ , где  $S$  один из отображений  $S_j, j = 1, 2, 3$ . Введем оператор

$$l_a[u](r, \varphi) = a_0 D^\alpha u(x) + a_1 D^\alpha u(x^*) + a_2 u(x) + a_3 u(x^*)$$

и в области  $\Omega$  рассмотрим следующую задачу

$$\Delta u(r, \varphi) = 0, (r, \varphi) \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$l_a[u](r, \varphi)|_{r=1} = g(\varphi), -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (1.2)$$

Решение этой задачи мы ищем в классе функций  $u(r, \varphi) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $D^\alpha[u](r, \varphi) \in C(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющую условиям (1.1) и (1.2) в классической постановке.

По предположению  $J^0[u](r, \varphi) = u(r, \varphi)$  и поэтому в случае значений  $\alpha = 1$  получаем

$$D[u](r, \varphi)|_{r=1} = r \frac{du(r, \varphi)}{dr} \Big|_{r=1} = \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial \nu} \Big|_{r=1}.$$

Тогда при  $\alpha = 1, a_0 = 1, a_2 > 0, a_1 = a_3 = 0$ , мы получаем классическую задачу Робена, которую мы привели выше.

Рассматриваемая нами задача относится к классу нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского [11], где краевые условия задачи задаются в виде связи значений искомой функции в различных точках границы. Отметим, что аналогичные задачи с отображениями типа инволюции исследовались в работах [12-14].

## 2. Свойства интеграла и производной Адамара в классе гладких функций.

Приведем некоторые известные свойства интеграла  $J^\alpha$  и производной  $D^\alpha$  доказанные в работе [5].

**Лемма 1.** Если  $H_k^{(1)}(r, \varphi) = r^k \cos k\varphi, k = 0, 1, \dots$ , и  $H_k^{(2)}(r, \varphi) = r^k \sin k\varphi, k = 1, 2, \dots$ , то имеют место равенства

$$J^\alpha [H_k^{(j)}](r, \varphi) = \frac{H_k^{(j)}(r, \varphi)}{k^\alpha}, k > 0, j = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$D^\alpha [H_k^{(j)}](r, \varphi) = k^\alpha H_k^{(j)}(r, \varphi), k = 0, 1, \dots, j = 1, 2. \quad (2.2)$$

**Лемма 2.** Если функция  $u(r, \varphi)$  в области  $\Omega$  удовлетворяет уравнению Лапласа, то

1)  $D^\alpha [u](r, \varphi)$  также удовлетворяет уравнению Лапласа в  $\Omega$  и выполняется равенство  $D^\alpha [u](0) = 0$ ;

2) при выполнении условия  $u(0) = 0$  функция  $J^\alpha [u](r, \varphi)$  также удовлетворяет уравнению Лапласа в  $\Omega$ .

**Доказательство.** Пусть в точках области  $\Omega$  для функции  $u(r, \varphi)$  выполняется равенство  $\Delta u(r, \varphi) = 0$ . Тогда, как известно из утверждения работы [15, стр. 330] она представима в виде ряда

$$u(r, \varphi) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{k,1} H_k^{(1)}(r, \varphi) + u_{k,2} H_k^{(1)}(r, \varphi)), \quad (2.3)$$

где  $u_0, u_{k,1}$  и  $u_{k,2}$  коэффициенты разложения ряда (2.3). При этом ряд в правой части равенства (2.3) для всех  $0 \leq r \leq \rho < 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$  сходится абсолютно и равномерно. Причем, если выполняется условие  $u(0) = 0$ , то необходимо выполнение условия  $\frac{u_0}{2} = 0$ .

Далее, если к равенству (2.3) с двух сторон применим оператор  $J^\alpha$ , то в силу равенства (2.1) получаем

$$J^\alpha [u](r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} (u_{k,1} H_k^{(1)}(r, \varphi) + u_{k,2} H_k^{(1)}(r, \varphi)).$$

Очевидно, что коэффициенты полученного ряда в правой части последнего равенства имеет такой же вид как и в представлении ряда (2.3). Так как  $k^{-\alpha} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то радиус сходимости этих двух рядов совпадают. Тогда сумма последнего ряда в области  $\Omega$  будет удовлетворять уравнению Лапласа. Аналогично, для функции  $D^\alpha [u](r, \varphi)$  получаем ряд

$$D^\alpha [u](r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha r^k (u_{k,1} \cos k\varphi + u_{k,2} \sin k\varphi).$$

Сходимость этого ряда и то, что его сумма удовлетворяет уравнению Лапласа доказывается аналогичным образом, как и в первом случае. Лемма доказана.

Непосредственным применением отображений  $S_j x, j = 1, 2, 3$  и с учетом следующих элементарных равенств

$$\cos k(\pi - \varphi) = (-1)^k \cos k\varphi; \sin k(\pi - \varphi) = -(-1)^k \sin k\varphi;$$

$$\cos k(\pi + \varphi) = (-1)^k \cos k\varphi; \sin k(\pi + \varphi) = (-1)^k \sin k\varphi,$$

$$\cos k(2\pi - \varphi) = \cos k\varphi; \sin k(2\pi - \varphi) = -\sin k\varphi$$

доказывается следующее утверждение

**Лемма 3.** Пусть  $H_k^{(1)}(r, \varphi) = r^k \cos k\varphi, k = 0, 1, \dots$ , и  $H_k^{(2)}(r, \varphi) = r^k \sin k\varphi, k = 1, 2, \dots$ . Тогда справедливы следующие равенства

$$H_k^{(1)}(S_1x) \equiv H_k^{(1)}(r, \pi - \varphi) = (-1)^k H_k^{(1)}(r, \varphi), \quad (2.4)$$

$$H_k^{(2)}(S_1x) \equiv H_k^{(2)}(r, \pi - \varphi) = -(-1)^k H_k^{(2)}(r, \varphi), \quad (2.5)$$

$$H_k^{(1)}(S_2x) \equiv H_k^{(1)}(r, \pi + \varphi) = (-1)^k H_k^{(1)}(r, \varphi), \quad (2.6)$$

$$H_k^{(2)}(S_2x) \equiv H_k^{(2)}(r, \pi + \varphi) = (-1)^k H_k^{(2)}(r, \varphi), \quad (2.7)$$

$$H_k^{(1)}(S_3x) \equiv H_k^{(1)}(r, 2\pi - \varphi) = H_k^{(1)}(r, \varphi), \quad (2.8)$$

$$H_k^{(2)}(S_3x) \equiv H_k^{(2)}(r, 2\pi - \varphi) = -H_k^{(2)}(r, \varphi). \quad (2.9)$$

### 3. О единственности решения основной задачи

Докажем единственность решения исследуемой задачи. Предположим, что  $x^* = S_1x$  и пусть функция  $u(r, \varphi)$  является решением соответствующей однородной задачи (1.1)-(1.2). Положим

$$v(r, \varphi) = a_0 D^\alpha u(r, \varphi) + a_1 D^\alpha u(r, \pi - \varphi) + a_2 u(r, \varphi) + a_3 u(r, \pi - \varphi). \quad (3.1)$$

то применяя к этой функции оператор Лапласа, с учетом уравнение (1.1) и первого утверждения леммы 2, получаем

Если воспользуемся уравнением (1.1) и первым утверждением леммы 2, то после применения оператора Лапласа к функции  $v(r, \varphi)$  из равенства (3.1) следует

$$\Delta v(r, \varphi) = a_0 \Delta D^\alpha u(r, \varphi) + a_1 \Delta D^\alpha u(r, \pi - \varphi) + a_2 \Delta u(r, \varphi) + a_3 \Delta u(r, \pi - \varphi) = 0, (r, \varphi) \in \Omega.$$

В добавок к этому равенству из граничного условия (1.2) при однородном граничном условии получаем равенство

$$v(r, \varphi)|_{r=1} = a_0 D^\alpha u(r, \varphi) + a_1 D^\alpha u(r, \pi - \varphi) + a_2 u(r, \varphi) + a_3 u(r, \pi - \varphi)|_{r=1} = 0.$$

Итак, если  $u(r, \varphi)$  является решением задачи (1.1)-(1.2) в однородном случае, то функция  $v(r, \varphi)$  представима в виде (3.1) будет удовлетворять условиям задачи Дирихле

$$\Delta v(r, \varphi) = 0, (r, \varphi) \in \Omega; v(r, \varphi)|_{r=1} = 0. \quad (3.2)$$

Так как решение задачи (3.2) единственно, то  $v(r, \varphi) \equiv 0, (r, \varphi) \in \bar{\Omega}$ . Следовательно,

$$a_0 D^\alpha u(r, \varphi) + a_1 D^\alpha u(r, \pi - \varphi) + a_2 u(r, \varphi) + a_3 u(r, \pi - \varphi) \equiv 0, (r, \varphi) \in \bar{\Omega}. \quad (3.3)$$

Функция  $u(r, \varphi)$  является решением уравнения Лапласа в области  $\Omega$  и поэтому представима в виде ряда (2.3). Применим к этой функции оператор  $l_a[u](r, \varphi)$ . Тогда

$$\begin{aligned} l_a[u](r, \varphi) &\equiv a_0 D^\alpha u(r, \varphi) + a_1 D^\alpha u(r, \pi - \varphi) + a_2 u(r, \varphi) + a_3 u(r, \pi - \varphi) = \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} k^\alpha \left[ u_{k,1} H_k^{(1)}(r, \varphi) + u_{k,2} H_k^{(2)}(r, \varphi) \right] + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} k^\alpha \left[ u_{k,1} H_k^{(1)}(r, \pi - \varphi) + u_{k,2} H_k^{(2)}(r, \pi - \varphi) \right] + \\ &+ a_2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ u_{k,1} H_k^{(1)}(r, \varphi) + u_{k,2} H_k^{(2)}(r, \varphi) \right] + a_3 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ u_{k,1} H_k^{(1)}(r, \pi - \varphi) + u_{k,2} H_k^{(2)}(r, \pi - \varphi) \right]. \end{aligned}$$

Используя свойства (2.4) - (2.9) функций  $H_k^{(1)}(r, \varphi)$  и  $H_k^{(2)}(r, \varphi)$ , имеем

$$\begin{aligned} l_a[u](r, \varphi) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (a_0 + (-1)^k a_1) k^\alpha + a_2 + (-1)^k a_3 \right] u_{k,1} H_k^{(1)}(r, \varphi) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (a_0 - (-1)^k a_1) k^\alpha + a_2 - (-1)^k a_3 \right] u_{k,2} H_k^{(2)}(r, \varphi) = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Предполагая  $a_0 \pm a_1 \neq 0$  и выделяя четные и нечетные индексы в каждой из сумм  $I_1$  и  $I_2$ , получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (a_0 + (-1)^k a_1) k^\alpha + a_2 + (-1)^k a_3 \right] u_{k,1} H_k^{(1)}(r, \varphi) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (a_0 + a_1) (2m)^\alpha + a_2 + a_3 \right] u_{2m,1} H_{2m}^{(1)}(r, \varphi) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (a_0 - a_1) (2m-1)^\alpha + a_2 - a_3 \right] u_{2m-1,1} H_{2m-1}^{(1)}(r, \varphi) = \\ &= (a_0 + a_1) \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (2m)^\alpha + \frac{a_2 + a_3}{a_0 + a_1} \right] u_{2m,1} H_{2m}^{(1)}(r, \varphi) + \\ &(a_0 - a_1) \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (2m+1)^\alpha + \frac{a_2 - a_3}{a_0 - a_1} \right] u_{2m+1,1} H_{2m+1}^{(1)}(r, \varphi) = \end{aligned}$$

$$= (a_0 + a_1) \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (2m)^\alpha + A_+ \right] u_{2m,1} H_{2m}^{(1)}(r, \varphi) + (a_0 - a_1) \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (2m+1)^\alpha + A_- \right] u_{2m+1,1} H_{2m+1}^{(1)}(r, \varphi),$$

где обозначено

$$A_+ = \frac{a_2 + a_3}{a_0 + a_1}, A_- = \frac{a_2 - a_3}{a_0 - a_1}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (a_0 - (-1)^k a_1) k^\alpha + a_2 - (-1)^k a_3 \right] u_{k,2} H_k^{(2)}(r, \varphi) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (a_0 + a_1) (2m-1)^\alpha + a_2 + a_3 \right] u_{2m-1,2} H_{2m-1}^{(2)}(r, \varphi) + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (a_0 - a_1) (2m)^\alpha + a_2 - a_3 \right] u_{2m,2} H_{2m}^{(2)}(r, \varphi) = \\ &= (a_0 + a_1) \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (2m-1)^\alpha + \frac{a_2 + a_3}{a_0 + a_1} \right] u_{2m-1,2} H_{2m-1}^{(2)}(r, \varphi) + \\ &\quad + (a_0 - a_1) \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (2m)^\alpha + \frac{a_2 - a_3}{a_0 - a_1} \right] u_{2m,2} H_{2m}^{(2)}(r, \varphi) = \\ &= (a_0 + a_1) \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (2m-1)^\alpha + A_+ \right] u_{2m-1,2} H_{2m-1}^{(2)}(r, \varphi) + (a_0 - a_1) \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (2m)^\alpha + A_- \right] u_{2m,2} H_{2m}^{(2)}(r, \varphi). \end{aligned}$$

Исследуем суммы  $I_1$  и  $I_2$ . Так как  $l_a[u](r, \varphi) \equiv 0, (r, \varphi) \in \bar{\Omega}$  и  $a_0 \pm a_1 \neq 0$ , то при  $m \in \mathbb{N}$  для  $I_1$  и  $I_2$  имеют место равенства:

а) для коэффициентов суммы  $I_1$  имеем

$$\left[ (2m)^\alpha + A_+ \right] u_{2m,1} = 0, \left[ (2m+1)^\alpha + A_- \right] u_{2m+1,1} = 0, m \geq 0. \quad (3.4)$$

б) для коэффициентов суммы  $I_2$  имеем

$$\left[ (2m-1)^\alpha + A_+ \right] u_{2m-1,2} = 0, \left[ (2m)^\alpha + A_- \right] u_{2m,2} = 0, m \geq 1. \quad (3.5)$$

Заметим, что по предположению  $a_j \geq 0, j = 0, 1, 2, 3$ . Тогда  $A_+ \geq 0$ , а для  $A_-$  возможны случаи  $A_- \geq 0$  или  $A_- < 0$ . Поэтому при исследовании единственности решения задачи (1.1) - (1.2) возможны только следующие случаи.

1) если  $A_+ > 0, A_- > 0$ , то из равенств (3.4) и (3.5) следует  $u_{k,1} = 0, k \geq 0, u_{k,2} = 0, k \geq 1$ .

Тогда  $u(r, \varphi) = 0$  для всех  $(r, \varphi) \in \Omega$  и по непрерывности  $u(r, \varphi) = 0$  для всех  $(r, \varphi) \in \bar{\Omega}$ .

2) если  $A_+ = 0$  и  $A_- = 0$ , т.е.  $a_2 = a_3 = 0$ , то из равенств (3.4) и (3.5) следует

$$\begin{cases} (2m)^\alpha u_{2m,1} = 0, (2m+1)^\alpha u_{2m+1,1} = 0, m \geq 0 \\ (2m)^\alpha u_{2m,2} = 0, (2m-1)^\alpha u_{2m-1,2} = 0, m \geq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Решением системы (3.6) является  $m=0$ . Соответственно, в этом случае коэффициент  $u_0$  может быть отличным от нуля. Следовательно, в случае  $a_2 = a_3 = 0$  функция  $u(x) = Const$  будет решением однородной задачи (1.1) - (1.2).

3) если в формулах из (3.4) выполняются условия  $A_+ > 0$  и коэффициент  $A_-$  отлична от  $-(2m-1)^\alpha$  или  $-(2m)^\alpha, m \geq 1$ , то при всех  $k \geq 0$  имеем  $k^\alpha + A_+ > 0$ . Следовательно, в этом случае  $u_{k,1} = 0$  для всех  $k \geq 0$ . Для этих же  $A_+$  и  $A_-$  из формул (3.5) имеем  $(2m-1)^\alpha + A_+ > 0, u_{2m-1,2} = 0, (2m)^\alpha + A_- > 0, u_{2m,2} = 0, m \geq 1$ . Поэтому  $u(r, \varphi) = 0$  для всех  $(r, \varphi) \in \bar{\Omega}$ .

4) если для некоторого  $k \geq 1$  имеет место равенство  $k^\alpha + A_- = 0$ , т.е.  $A_- = -k^\alpha$ , то в формулах (3.4) или (3.5) соответствующие коэффициенты  $u_{k,1}$  могут обращаться в 0. Следовательно, в этих случаях функции вида  $u(r, \varphi) = H_k^{(j)}(r, \varphi), j=1,2$  будут решениями однородной задачи (1.1) - (1.2).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть в задаче (1.1)-(1.2) выполняются условия:  $a_j \geq 0, j=0,1,2,3, a_0 \neq a_1, A_+ = \frac{a_2 + a_3}{a_0 + a_1}, A_- = \frac{a_2 - a_3}{a_0 - a_1}$  и  $x^* = (-x_1, x_2)$ . Тогда, если решение задачи (1.1)-(1.2) существует, то справедливы следующие утверждения:

1) в случае  $a_2 = a_3 = 0 (A_+ = A_- = 0)$  решение задачи не единственное с точностью до постоянного слагаемого;

2) если  $A_+ > 0$  и  $A_-$  отлична от  $-k^\alpha, k \geq 1$ , то решение задачи единственно;

3) если для некоторого натурального числа  $k = k_0 \geq 1$  имеет место равенство  $A_- = -k_0^\alpha$ , то решение задачи единственно с точностью до функции вида  $H_{k_0}^{(j)}(r, \varphi), j=1,2$ .

#### 4. О существовании решения основной задачи

Далее, переходим к исследованию существования решения основной задачи. Для этого сначала мы рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\Delta w(r, \varphi) = 0, (r, \varphi) \in \Omega, D^\alpha w(1, \varphi) + cw(1, \varphi) = h(\varphi), -\pi < \varphi \leq \pi. \quad (4.1)$$

В работе [15] доказано следующее утверждение.

**Лемма 4.** Пусть  $c \geq 0$  и функция  $h(\varphi)$  является периодической и непрерывной на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Тогда справедливы следующие утверждения

1) если  $c > 0$ , то существует единственно решение задачи (4.1);

2) если  $c = 0$ , то задача (4.1) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется



условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) d\theta = 0. \quad (4.2)$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательства этого утверждения проводится сведением исследуемой задачи к интегральному уравнению Фредгольма.

Исследуем задачу (4.1) в случае  $c < 0$ . Предположим, что  $w(x)$  является решением задачи (4.1) и  $z(x) = D^\alpha w(x)$ . Тогда для функции  $z(x)$  получаем задачу

$$\Delta z(x) = 0, x \in \Omega, \quad (4.3)$$

$$z(x) + cJ^\alpha[z](x) = h(x), x \in \partial\Omega, \quad (4.4)$$

$$z(0) = 0. \quad (4.5)$$

Сначала исследуем единственность решения задачи (4.3) - (4.5).

**Лемма 5.** Пусть  $c < 0$  и решение задачи существует. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $c < 0$  и  $c \neq -k^{-\alpha}, k \geq 1$ , то решение задачи единственно;

2) если для некоторого  $k = k_0$  имеет место неравенство  $c \neq -k_0^{-\alpha}, k_0 \geq 1$ , то функции  $H_k^{(1)}(r, \varphi)$  и  $H_k^{(2)}(r, \varphi)$  будут решениями однородной задачи.

**Доказательство.** Пусть  $h(x) = 0$ . Если  $z(x)$  гармоническая функция, то функции  $z(x)$  и  $J^\alpha[z](x)$  также являются гармоническими в  $\Omega$ . Следовательно, функция  $z(x) + cJ^\alpha[z](x)$  является гармонической и удовлетворяет однородному условию Дирихле. В силу единственности решения задачи Дирихле имеем,  $z(x) + cJ^\alpha[z](x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$ . Представим функцию  $z(x)$  в виде ряда

$$z(r, \varphi) = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (z_{k,1} H_k^{(1)}(r, \varphi) + z_{k,2} H_k^{(2)}(r, \varphi)), \quad (4.6)$$

Заметим, что если выполняется условие (4.5), то необходимо выполнение равенства  $z_0 = 0$ . Тогда к ряду (4.6) можно применить оператор  $J^\alpha$ . Действуя этим оператором к ряду (4.6) имеем,

$$J^\alpha[z](r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} (z_{k,1} H_k^{(1)}(r, \varphi) + z_{k,2} H_k^{(1)}(r, \varphi)).$$

Следовательно,

$$z(r, \varphi) + cJ^\alpha[z](r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (k^{-\alpha} + c) (z_{k,1} H_k^{(1)}(r, \varphi) + z_{k,2} H_k^{(1)}(r, \varphi)) \equiv 0, (r, \varphi) \in \Omega.$$

Возможны всего два случая:

1) если  $c < 0$  и  $c \neq -k^{-\alpha}, k \geq 1$ , то  $z_{k,1} = z_{k,2} = 0$  для всех  $k \geq 1$  и тогда  $z(r, \varphi) \equiv 0, (r, \varphi) \in \bar{\Omega}$

2) если для некоторого  $k = k_0$  и  $c \neq -k_0^{-\alpha}, k_0 \geq 1$ , то коэффициенты  $z_{k_0,1}$  и  $z_{k_0,2}$  могут не обращаться в нуль для всех  $k \geq 1$  и тогда функции  $H_{k_0}^{(1)}(r, \varphi)$  и  $H_{k_0}^{(2)}(r, \varphi)$  будут решениями однородной задачи (4.3) - (4.5). Лемма доказана.

Далее, исследуем существования решения (4.3) - (4.5). Пусть  $h(x)$  непрерывная функция и

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{1-|x|^2}{|x-y|^2} - 1 \right] \mu(y) dS_y,$$

где  $\mu(y)$  - неизвестная функция. Очевидно, что для функции  $v(x)$  выполняется условие  $v(0) = 0$ ,  $v(x)|_{\partial\Omega} = \mu(x)$  и она является гармонической в  $\Omega$ . Тогда можно рассмотреть функцию  $z(x) = J^\alpha[v](x)$ . Функция  $z(x)$  удовлетворяет условиям (4.3) и (4.5). Подставляя функцию  $z(x) = J^\alpha[v](x)$  в условие (4.4), имеем

$$\begin{aligned} z(x) + cJ^\alpha[v](x)|_{\partial\Omega} &= \mu(x) + c \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \ln \frac{1}{\tau} \right)^{\alpha-1} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1-|\tau x|^2}{|\tau x - y|^2} - 1 \right) \mu(y) dS_y \right] \frac{d\tau}{\tau} = \\ &= \mu(x) + c \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \ln \frac{1}{\tau} \right)^{\alpha-1} \left[ \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1-\tau^2}{|\tau x - y|^2} - 1 \right) \right] \frac{d\tau}{\tau} \mu(y) dS_y = \\ &= \mu(x) + c \int_{\partial\Omega} P_\alpha(x, y) \mu(y) dS_y = h(x) \end{aligned}$$

где функция  $P_\alpha(x, y)$  определяется равенством

$$P_\alpha(x, y) = \frac{1}{\pi\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{\tau} \right)^{\alpha-1} \left[ \frac{1-\tau^2}{|\tau x - y|^2} - 1 \right] \frac{d\tau}{\tau}.$$

Таким образом, относительно неизвестной функции  $\mu(y)$  мы получили интегральное уравнение

$$\mu(x) + c \int_{\partial\Omega} P_\alpha(x, y) \mu(y) dS_y = h(x). \quad (4.7)$$

Если  $x, y \in \partial\Omega$ , то для  $|\tau x - y|^2$  имеем

$$|\tau x - y|^2 = |\tau x|^2 - 2(\tau x, y) + |y|^2 = |\tau|^2 - 2(x, \tau y) + 1 = |\tau y|^2 - 2(\tau y, x) + |x|^2 = |\tau y - x|^2.$$

Отсюда получаем, что функция  $P_\alpha(x, y)$  симметрична по  $x$  и  $y$ , т.е. ядро интегрального уравнения (4.7) является симметричным. В работе [9] доказано, что  $P_\alpha(x, y)$  при  $x, y \in \partial\Omega$  обладает свойством полярного ядра. Тогда для интегрального уравнения (4.7) справедливы альтернативы Фредгольма. Так как при выполнении условия 1) леммы 5 однородная задача соответствующая к (4.7) имеет только нулевое решение, то соответствующее союзное однородное интегральное уравнение также имеет только нулевое решение. Тогда в силу теоремы Фредгольма для любого  $h(x) \in C(\partial\Omega)$  решение интегрального уравнения (4.7) существует, единственно и принадлежит классу  $C(\partial\Omega)$ . Если выполняется условие 2) леммы 5, то однородная задача, соответствующая к (4.7) имеет не нулевые решения, а именно функции вида  $H_{k_0}^{(1)}(r, \varphi)$  и  $H_{k_0}^{(2)}(r, \varphi)$ . Тогда в силу теоремы Фредгольма для существования решения неоднородного уравнения (4.7) необходимо и достаточно выполнения условия ортогональности

$$\int_{\partial\Omega} h(x) H_{k_0}^{(j)}(x) dS_y = 0, j = 1, 2.$$

Сформулируем основное утверждение относительно задачи (1.1)-(1.2).

**Теорема 2.** Пусть в задаче (1.1)-(1.2)  $g(\varphi)$  непрерывная,  $2\pi$  периодическая функция,  $x^* = Sx$ , где  $S$  один из отображений  $S_j, j = 1, 2, 3$ , коэффициенты  $a_j$ , удовлетворяют условиям  $a_j \geq 0, j = 0, 1, 2, 3, a_0 \neq a_1$  и  $A_+ = \frac{a_2 + a_3}{a_0 + a_1}, A_- = \frac{a_2 - a_3}{a_0 - a_1}$ . Тогда

1) если  $a_2 = a_3 = 0 (A_+ = A_- = 0)$ , то для разрешимости задачи (1.1)-(1.2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) d\varphi = 0. \quad (4.8)$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого;

2) если  $A_+ > 0$  и  $A_-$  отлична от  $-k^\alpha, k \geq 1$ , то решение задачи существует и единственно;

3) если для некоторого  $k = k_0 \geq 1$  имеет место равенство  $A_- = -k_0^\alpha$ , то для разрешимости задачи (1.1)-(1.2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) H_{k_0}^{(j)}(r, \varphi) d\varphi = 0, j = 1, 2.$$

Решению задачи будет единственным с точностью до функции вида  $H_{k_0}^{(j)}(r, \varphi), j = 1, 2$ .

**Доказательство.** Пусть  $x^* = S_1 x$  и  $u(r, \varphi)$  - решение задачи (1.1) - (1.2). Обозначим

$$v(r, \varphi) = a_0 D^\alpha u(r, \varphi) + a_1 D^\alpha u(r, \pi - \varphi) + a_2 u(r, \varphi) + a_3 u(r, \pi - \varphi). \quad (4.9)$$

Легко показать, что функция  $v(r, \varphi)$  будет решением следующей задачи Дирихле

$$\Delta v(r, \varphi) = 0, (r, \varphi) \in \Omega, v(1, \varphi) = g(\varphi), -\pi < \varphi \leq \pi. \quad (4.10)$$

Для любого  $g(\varphi) \in C[-\pi, \pi]$  решение задачи (4.10) существует и единственно. Из равенства (4.9) после замены точек  $(r, \varphi)$  на  $(r, \pi - \varphi)$  следует

$$v(r, \pi - \varphi) = a_0 D^\alpha u(r, \pi - \varphi) + a_1 D^\alpha u(r, \varphi) + a_2 u(r, \pi - \varphi) + a_3 u(r, \varphi). \quad (4.11)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) + v(r, \pi - \varphi) &= a_0 D^\alpha [u(r, \varphi) + u(r, \pi - \varphi)] + a_1 D^\alpha [u(r, \varphi) + u(r, \pi - \varphi)] + \\ &+ a_2 [u(r, \varphi) + u(r, \pi - \varphi)] + a_3 [u(r, \varphi) + u(r, \pi - \varphi)] = \\ &= (a_0 + a_1) D^\alpha [u(r, \varphi) + u(r, \pi - \varphi)] + (a_2 + a_3) [u(r, \varphi) + u(r, \pi - \varphi)]. \end{aligned}$$

Если обозначим  $u^+(r, \varphi) = u(r, \varphi) + u(r, \pi - \varphi)$ , то для этой функции получаем задачу

$$\Delta u^+(r, \varphi) = 0, (r, \varphi) \in \Omega, D^\alpha u^+(1, \varphi) + A_+ u^+(1, \varphi) = g^+(\varphi), -\pi < \varphi \leq \pi, \quad (4.12)$$

где  $g^+(\varphi) = \frac{1}{a_0 + a_1} [g(\varphi) + g(\pi - \varphi)]$ .

Аналогично, для  $v(r, \varphi) - v(r, \pi - \varphi)$  имеем

$$v(r, \varphi) - v(r, \pi - \varphi) = (a_0 - a_1) D^\alpha [u(r, \varphi) - u(r, \pi - \varphi)] + (a_2 - a_3) [u(r, \varphi) - u(r, \pi - \varphi)]$$

Тогда для функции  $u^-(r, \varphi) = u(r, \varphi) - u(r, \pi - \varphi)$  получаем задачу

$$\Delta u^-(r, \varphi) = 0, (r, \varphi) \in \Omega, D^\alpha u^-(1, \varphi) + A_- u^-(1, \varphi) = g^-(\varphi), -\pi < \varphi \leq \pi, \quad (4.13)$$

где

$$g^-(\varphi) = \frac{1}{a_0 - a_1} [g(\varphi) - g(\pi - \varphi)], a_0 - a_1 \neq 0.$$

Итак, мы показали, что функции  $u^+(r, \varphi)$  и  $u^-(r, \varphi)$  удовлетворяют условиям задачи (4.1) с постоянной  $c = A_+$  и  $c = A_-$ . Если  $A_+ = A_- = 0$ , то по утверждению леммы 4 для разрешимости задач (4.12) и (4.13) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^+(\varphi) d\varphi = 0, \int_{-\pi}^{\pi} g^-(\varphi) d\varphi = 0.$$

Имеет место равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\pi - \varphi) d\varphi = \int_{-\pi}^0 g(\pi - \varphi) d\varphi + \int_0^{\pi} g(\pi - \varphi) d\varphi.$$

Так как  $g(\varphi)$  периодическая функция, то для первого интеграла в последнем выражении имеем

$$\int_{-\pi}^0 g(\pi - \varphi) d\varphi = \int_{-2\pi}^{-\pi} g(-\theta) d\theta = \int_{-\pi}^0 g(\varphi + 2\pi) d\varphi = \int_{-\pi}^0 g(\varphi) d\varphi$$

А для второго интеграла получаем

$$\int_0^{\pi} g(\pi - \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} g(\theta) d\theta.$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{-}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{a_0 - a_1} \int_{-\pi}^{\pi} [g(\varphi) - g(\pi - \varphi)] d\varphi = \frac{1}{a_0 - a_1} \int_{-\pi}^{\pi} [g(\varphi) - g(\varphi)] d\varphi = 0.$$

Значит, условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{-}(\varphi) d\varphi = 0$$

всегда выполняется. А условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{+}(\varphi) d\varphi = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) d\varphi = 0.$$

Таким образом, если  $A_{+} = 0$ , то решение задачи (4.12) существует тогда и только тогда, когда выполняется условие (4.8). Если  $A_{-} = 0$ , то решение задачи (4.13) существует для любой функции  $g(\varphi)$ . Так как  $u(r, \varphi) = \frac{1}{2} [u^{+}(r, \varphi) + u^{-}(r, \varphi)]$ , то при выполнении условия (4.8) решение задачи (1.1) - (1.2) существует.

Если  $A_{+} > 0$  и  $A_{-} < 0$  и  $A_{-} \neq -k^{-\alpha}$ , то из утверждений лемм 4 и 5 следует, что решение задач (4.12) и (4.13) существует для любой непрерывной функции  $g(\varphi)$ .

Если  $A_{-} < 0$  и для некоторого  $k = k_0$  выполняется равенство  $A_{-} = -k_0^{-\alpha}$ , то из утверждении леммы 5 следует, что решение задачи (4.13) существует тогда и только тогда

когда выполняется условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{-}(\varphi) H_{k_0}^{(j)}(r, \varphi) d\varphi = 0, j = 1, 2.$$

Исследуем это условие для случая  $j = 1$ . Используя представление функции  $g^{-}(\varphi)$  имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{-}(\varphi) H_{k_0}^{(1)}(r, \varphi) d\varphi = \frac{r^{k_0}}{a_0 - a_1} \int_{-\pi}^{\pi} [g(\varphi) - g(\pi - \varphi)] \cos k_0 \varphi d\varphi.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 g(\pi - \varphi) \cos k_0 \varphi d\varphi &= \int_{-2\pi}^{-\pi} g(-\theta) \cos k_0 (\pi + \theta) d\theta = \int_{-\pi}^0 g(\varphi + 2\pi) \cos k_0 (\pi - \varphi - 2\pi) d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^0 g(\varphi) \cos k_0 (\pi - \varphi) d\varphi = (-1)^{k_0} \int_{-\pi}^0 g(\varphi) \cos k_0 \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} g(\pi - \varphi) \cos k_0 \varphi d\varphi = \int_0^{\pi} g(\theta) \cos k_0 (\pi - \theta) d\theta = (-1)^{k_0} \int_0^{\pi} g(\theta) \cos k_0 \theta d\theta$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [g(\varphi) - g(\pi - \varphi)] \cos k_0 \varphi d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos k_0 \varphi d\varphi - (-1)^{k_0} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos k_0 \varphi d\varphi = \\ &= (1 - (-1)^{k_0}) \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos k_0 \varphi d\varphi = \begin{cases} 0, k_0 = 2m \\ 2 \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \cos k_0 \varphi d\varphi, k_0 = 2m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 g(\pi - \varphi) \sin k_0 \varphi d\varphi &= \int_{-2\pi}^{-\pi} g(-\theta) \sin k_0 (\pi + \theta) d\theta = \int_{-\pi}^0 g(\varphi + 2\pi) \sin k_0 (\pi - \varphi - 2\pi) d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^0 g(\varphi) \sin k_0 (\pi - \varphi) d\varphi = -(-1)^{k_0} \int_{-\pi}^0 g(\varphi) \sin k_0 \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} g(\pi - \varphi) \sin k_0 \varphi d\varphi = \int_0^{\pi} g(\theta) \sin k_0 (\pi - \theta) d\theta = -(-1)^{k_0} \int_0^{\pi} g(\theta) \sin k_0 \theta d\theta$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [g(\varphi) - g(\pi - \varphi)] \sin k_0 \varphi d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin k_0 \varphi d\varphi + (-1)^{k_0} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin k_0 \varphi d\varphi =$$
$$= (1 + (-1)^{k_0}) \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin k_0 \varphi d\varphi = \begin{cases} 0, k_0 = 2m - 1 \\ 2 \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \sin k_0 \varphi d\varphi, k_0 = 2m \end{cases}.$$

Таким образом, если выполняются условия 3) Теоремы, то решение задачи существует. Для остальных отображений  $x^* = S_j x, j = 2, 3$  задача исследуется аналогичным образом. Теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы 2 в случае  $\alpha = 1$  совпадает с результатами работы [16].

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP09259074).

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1892. – Vol. 8. – P. 101 – 186.
2. Butzer P.L., Kilbas A.A., Trujillo J.J. Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – Vol.269. – P.387-400.
3. Jarad F., Baleanu D., Abdeljawad A. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives // Advances in Difference Equations. – 2012. – Vol.2012, No.142. – P.1 – 8.
4. Kilbas A.A. Hadamard-type fractional calculus // Journal of the Korean Mathematical Society. – 2001. – Vol.38. – P.1191 – 1204.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M, Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.
6. Arioua Y., Benhamidouche N. Boundary value problem for Caputo-Hadamard fractional differential equations // Surveys in Mathematics and its Applications. – 2017. – Vol.12. – P.103 – 115.
7. Boutiara A., Benbachir M., Guerbaty K. Boundary value problem for nonlinear Caputo-Hadamard fractional differential equation with Hadamard fractional integral and anti-periodic conditions // Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics. – 2021. – Vol. 36, No. 4. – P.735 – 748.
8. Turmetov B.Kh. On the solvability of some boundary value problems for the inhomogeneous polyharmonic equation with boundary operators of the Hadamard type // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. P. 333–344.
9. Turmetov B.Kh., Koshanova M., Usmanov K. About solvability of some boundary value problems for Poisson equation in the ball conditions // Filomat. – 2018. – V. 32, No.3. – P. 939-946.
10. Evans LC. Partial differential equations. Vol. 19, Graduate studies in mathematics. Providence(RI): American Mathematical Society; 1998. 668 p.
11. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. – 1969. – Т.185, № 4. – С.739 – 740.
12. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentat. Math. – 1974. – V.17. – P.451 – 457.
13. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the

Poisson equation // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2020. – V. 50, No. 1. – P. 67 – 88.

14. Turmetov B. Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2022. – P. 1 – 15.

15. Turmetov B.Kh., Nazarova K.Dz. On a generalization of the Neumann problem for the Laplace equation// Mathematische Nachrichten. – 2020. – V. 293, No. 1. – P.169 – 177.

16. Turmetov B.Kh Generalization of the Robin Problem for the Laplace Equation // Differential equations. – 2019.– V.55, № 9. – P. 1134 – 1142.

## REFERENCES

1. Hadamard J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1892. – Vol. 8. – P. 101 – 186.

2. Butzer P.L. , Kilbas A.A., Trujillo J.J. Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – Vol.269. – P.387-400.

3. Jarad F., Baleanu D., Abdeljawad A. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives // Advances in Difference Equations. – 2012. – Vol.2012, No.142. – P.1 – 8.

4. Kilbas A.A. Hadamard-type fractional calculus // Journal of the Korean Mathematical Society. – 2001. – Vol.38. – P.1191 – 1204 .

5. Kilbas A.A., Srivastava H.M, Trujillo J.J.Theory and applications of fractional differential equations.Elsevier, Amsterdam, 2006.

6. Arioua Y., Benhamidouche N. Boundary value problem for Caputo-Hadamard fractional differential equations //Surveys in Mathematics and its Applications. – 2017. – Vol.12. – P.103 – 115.

7. Boutiara A., Benbachir M., Guerbati K. Boundary value problem for nonlinear Caputo-Hadamard fractional differential equation with Hadamard fractional integral and anti-periodic conditions // Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics. – 2021. – Vol. 36, No. 4. – P.735 – 748.

8.Turmetov B.Kh. On the solvability of some boundary value problems for the inhomogeneous polyharmonic equation with boundary operators of the Hadamard type // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. P. 333–344.

9.Turmetov B.Kh., Koshanova M., Usmanov K. About solvability of some boundary value problems for Poisson equation in the ball conditions // Filomat . – 2018. –V. 32, No.3. – P. 939-946.

10. Evans LC. Partial differential equations. Vol. 19, Graduate studies in mathematics. Providence(RI): American Mathematical Society; 1998. 668 p.

11. Bisadze A.V., Samarskii A.A. O nekotoryh prosteishih obobsheniakh lineinykh ellipticheskikh kraevykh zadach [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary value problems] // Doklady AN SSSR. – 1969. – T.185, № 4. – C.739 – 740.

12. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentat. Math. – 1974. – V.17. – P.451 – 457.

13. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2020. – V. 50, No. 1. – P. 67 – 88.

14. Turmetov B. Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2022. – P. 1 – 15.

15. Turmetov B.Kh., Nazarova K.Dz. On a generalization of the Neumann problem for the Laplace equation// Mathematische Nachrichten. – 2020. – V. 293, No. 1. – P.169 – 177.

16. Turmetov B.Kh Generalization of the Robin Problem for the Laplace Equation // Differential equations. – 2019.– V.55, № 9. – P. 1134 – 1142



**К.И. УСМАНОВ**

*кандидат физико-математических наук, доцент,  
Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави  
(Казахстан, Туркестан), E-mail: [kairat.usmanov@ayu.edu.kz](mailto:kairat.usmanov@ayu.edu.kz)*

**УСЛОВИЕ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ.**

**Аннотация.** При рассмотрении нелокальных краевых задач для функционально – дифференциальных уравнении, когда производная от искомой функции содержится в правой части, можно было бы воспользоваться резольвентой интегрального уравнения. Но, как известно резольвенту интегрального уравнения II рода типа Фредгольма, не всегда удается однозначно определить. В некоторых случаях можно воспользоваться свойствами ядра интегро-дифференциального уравнения. В данной работе рассмотрена нелокальная краевая задача для систем интегродифференциальных уравнении с инволюцией, когда ядро интегрального члена содержащее производную имеет частную производную. Используя свойства инволютивного преобразования, задача сводится к исследованию многоточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнении. К данной задаче был применен метод параметризации предложенный профессором Д.Джумабаевым. Вводятся новые параметры, и на основе этих параметров переходим к новым переменным. При переходе к новым переменным получаем начальные условия для исходного уравнения. С помощью данного условия можно определить решение полученной задачи Коши, а также системы линейных уравнений. Применяя теорию Фредгольма для решения полученных систем интегральных уравнении, т.е. однозначную разрешимость исследуемой задачи, сводим к обратимости матрицы, которая зависит от исходных данных. В качестве иллюстрации предложенного метода был продемонстрирован пример.

**Ключевые слова:** Краевая задача, метод параметризации, параметр, однозначная разрешимость, ядро.

**К.И. Усманов**

*физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент,  
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті  
(Қазақстан, Түркістан) E-mail: [kairat.usmanov@ayu.edu.kz](mailto:kairat.usmanov@ayu.edu.kz)*

**Функционалды-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін локальді емес шеттік есептің бірімәнді шешімділігінің шарттары**

**Аңдатпа.** Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін локальді емес шеттік есептерді шығарғанда, ізделінді функцияның туындысы оң жақта орналасқанда, интегралдық теңдеудің резольвентасын қолдануға болады. Бірақ, көбіне Фредгольмнің II типіндегі интегралдық теңдеудің резольвентасын әрқашан анықтау мүмкін емес. Кейбір жағдайларда, интегралдық-дифференциалдық теңдеудің өзегінің қасиеттерін пайдалануға болады. Бұл жұмыста, инволюциялы интегралдық - дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көп нүктелі шеттік есептің, туындысы бар интегралдық мүшесіндегі өзектің дербес туындысы болған жағдай қарастырылады. Инволюциялық түрлендірудің қасиеттерін пайдалана отырып, есеп интегралдық - дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көп

нүктелі шекаралық есептерді зерттеуге келтіріледі. Бұл есепке профессор Д.Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісі қолданылады. Жаңа параметрлер енгізіледі және осы параметрлер негізінде біз жаңа айнымалыларға өтеміз. Жаңа айнымалыларға көшу теңдеудің бастапқы шарттарын алуға мүмкіндік береді. Осының негізінде есептің шешімі арнайы Коши есебі және сызықтық теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі. Интегралдық теңдеулерді шешу әдістерін қолдана отырып, бастапқы есептің бірімәнді шешімділігі, бастапқы мәндерге тәуелді матрицаның қайтымдылығына келтіріледі. Ұсынылған әдістің иллюстрациясы ретінде мысал көрсетілді.

**Кілт сөздер:** Шеттік есеп, параметрлеу әдісі, функционалды – дифференциалдық теңдеулер, параметр, бірімәнді шешімділік, өзек.

**K.I. Usmanov**

*Candidate of physical- mathematical sciences, Associate professor,  
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University  
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: [kairat.usmanov@ayu.edu.kz](mailto:kairat.usmanov@ayu.edu.kz)*

### **A condition for the unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of functional-differential equations**

**Abstract.** When considering non-local boundary value problems for functional-differential equations, when the derivative of the desired function is contained in the right side, one could use the resolvent of the integral equation. But, as is known, the resolvent of an integral equation of the second kind of the Fredholm type cannot always be uniquely determined. In some cases, you can use the properties of the kernel of the integro-differential equation. In this paper, we consider a non-local boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution, when the kernel of the integral term containing the derivative has a partial derivative. Using the properties of an involutive transformation, the problem is reduced to the study of a multipoint boundary value problem for systems of integro-differential equations. The parameterization method proposed by Professor D. Dzhumabaev was applied to this problem. New parameters are introduced, and based on these parameters, we pass to new variables. When passing to new variables, we obtain the initial conditions for the initial equation. With the help of this condition, it is possible to determine the solution of the resulting Cauchy problem, as well as the system of linear equations. Applying the Fredholm theory to solve the obtained systems of integral equations, i.e. the unique solvability of the problem under study, we reduce to the reversibility of the matrix, which depends on the initial data. An example was shown as an illustration of the proposed method.

**Keywords:** parametrization method, parameter, boundary condition, unambiguous solvability, kernel.

#### **Введение**

Рассмотрим на  $[0, T]$  нелокальную краевую задачу

$$\frac{dx(t)}{dt} + A \cdot \frac{dx(\alpha(t))}{dt} = \int_0^T K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^T K_2(t, s)\dot{x}(s)ds + f(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^m B_i x(\theta_i) = d, \quad (2)$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

здесь  $K_1(t, s)$ ,  $K_2(t, s)$  непрерывны матрицы на соответствующих отрезках,  $f(t) \in C[0, T]$ ,  $d \in R^n$ ,  $A$  - некоторая постоянная матрица. Здесь  $\alpha(t)$  - изменяющий ориентацию гомеоморфизм  $\alpha: [0, T] \rightarrow [0, T]$  такой, что  $\alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)) = t$ . Такой гомеоморфизм, называют инволютивным преобразованием. На отрезке  $[0, T]$  в качестве такого преобразования можно рассмотреть гомеоморфизм  $\alpha(t) = T - t$ . Свойства инволютивных преобразований были рассмотрены в работах [1-5].

**Применение метода параметризации.**

Рассмотрим значения уравнения (1) в точке  $t = \alpha(t)$

$$\frac{dx(\alpha(t))}{dt} + A \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \int_0^T K_1(\alpha(t), s)x(s)ds + \int_0^T K_2(\alpha(t), s)\dot{x}(s)ds + f(\alpha(t)).$$

Из системы

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} + A \cdot \frac{dx(\alpha(t))}{dt} = \int_0^T K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^T K_2(t, s)\dot{x}(s)ds + f(t), \\ \frac{dx(\alpha(t))}{dt} + A \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \int_0^T K_1(\alpha(t), s)x(s)ds + \int_0^T K_2(\alpha(t), s)\dot{x}(s)ds + f(\alpha(t)). \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на матрицу  $-A$  с левой стороны, и складывая уравнения получим

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^T \tilde{K}_1(t, s)x(s)ds + \int_0^T \tilde{K}_2(t, s)\dot{x}(s)ds + \tilde{f}(t), \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^m B_i x(\theta_i) = d, \quad d \in R^n, \tag{4}$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

где  $\tilde{K}_1(t, s) = [I - A^2]^{-1} [K_1(t, s) - A \cdot K_1(\alpha(t), s)]$ ,  $\tilde{K}_2(t, s) = [I - A^2]^{-1} [K_2(t, s) - A \cdot K_2(\alpha(t), s)]$ ,  $\tilde{f}(t) = [I - A^2]^{-1} [f(t) - A \cdot f(\alpha(t))]$ .

Здесь условие обратимости матрицы  $[I - A^2]$  является существенным. Действительно рассмотрим следующую однородную краевую задачу с инволюцией  $a = 1$

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{dx(-t)}{dt} = \int_{-\pi}^{\pi} x(s)ds + \int_{-\pi}^{\pi} \dot{x}(s)ds, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

$$x(-\pi) - x(\pi) = 0.$$

Данная задача имеет решение  $x(t) = \cos(kt)$ . Получается, что однородная краевая задача имеет множество ненулевых решений. В случае  $a = -1$ , в качестве не нулевого решения можно взять функцию  $x(t) = \sin(kt)$ .

Предположим, что  $\frac{\partial K_2(t, s)}{\partial s}$  непрерывный, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T \tilde{K}_2(t, s) \dot{x}(s) ds &= \tilde{K}_2(t, s) x(s) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial \tilde{K}_2(t, s)}{\partial s} x(s) ds = \\ &= \tilde{K}_2(t, T) x(T) - \tilde{K}_2(t, 0) x(0) - \int_0^T \frac{\partial \tilde{K}_2(t, s)}{\partial s} x(s) ds. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3), (4) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^T K(t, s) x(s) ds + K_{20}(t) x(\theta_0) + K_{21}(t) x(\theta_m) + \tilde{f}(t), \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^m B_i x(\theta_i) = d, \quad d \in R^n, \quad (6)$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

где

$$K_{20}(t) = -\tilde{K}_2(t, 0),$$

$$K_{21}(t) = \tilde{K}_2(t, T),$$

$$\int_0^T K(t, s) x(s) ds = \int_0^T \tilde{K}_1(t, s) x(s) ds - \int_0^T \frac{\partial \tilde{K}_2(t, s)}{\partial s} x(s) ds. \quad (7)$$

К краевой задаче (5), (6) применяем метод параметризации [6-9], для этого берем натуральное число  $l \in \mathbb{N}$  и по нему производим разбиение:  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{m(l+1)} [t_{r-1}, t_r)$ , где

$$t_{i(l+1)+j} = t_{i(l+1)} + \frac{h_{i+1}}{l}, \quad h_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad j = \overline{1, l+1}. \quad \text{Обозначим} \quad h = \max \{h_1, h_1, \dots, h_m\},$$

$$\beta = \max_{t, s \in [0, T]} \|K(t, s)\|.$$

Пусть  $y_r(t)$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$  сужение функции  $x(t)$  на интервалы  $[t_{r-1}, t_r)$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$ , тогда нелокальную краевую задачу (5), (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy_r}{dt} &= \sum_{i=1}^{m(l+1)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, s) y_i(s) ds + K_{20}(t) y_1(t_0) + \\ &+ K_{21}(t) \lim_{t \rightarrow T-0} y_{m(l+1)}(t) + \tilde{f}(t), \quad [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, m(l+1)}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} B_i y_{j(l+1)+1}(t_{j(l+1)}) + B_m \lim_{t \rightarrow T-0} y_{m(l+1)}(t) = d, \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_p-0} y_p(t) = y_{p+1}(t_p), \quad p = \overline{1, m(l+1)-1}, \quad (10)$$

Значение функции в левых концах разбиения обозначим через  $\lambda_r$ , т.е.  $\lambda_r = y_r(t_{r-1})$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$ ,  $\lambda_{m(l+1)+1} = \lim_{t \rightarrow T-0} y_{m(l+1)}(t)$ . В  $t \in [t_{r-1}, t_r)$  сделаем замену переменных  $y_r(t) = v_r(t) + \lambda_r$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$ . Тогда полученную задачу (8) - (10) можно написать в виде

$$\frac{dv_r}{dt} = \sum_{i=1}^{m(l+1)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, s) [v_i(s) + \lambda_i] ds + K_{20}(t) \lambda_1 + K_{21}(t) \lambda_{m(l+1)+1} + \tilde{f}(t), \quad [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, m(l+1)}, \quad (11)$$

$$v_s(t_{s-1}) = 0, \quad s = \overline{1, m(l+1)}, \quad (12)$$

$$\sum_{i=0}^m B_i \lambda_{i(l+1)+1} = d, \quad (13)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow t_p-0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, m(l+1)}. \quad (14)$$

Используя начальные условия  $u_r(t_{r-1}) = 0$ ,  $r = \overline{1, m(l+1)}$  решение задачи Коши можем записать в виде интегральных уравнений

$$v_r(t) = \int_{t_{r-1}}^t \sum_{i=1}^{m(l+1)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau, s) v_i(s) ds d\tau + \int_{t_{r-1}}^t \sum_{i=1}^{m(l+1)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau, s) ds d\tau \lambda_i + \int_{t_{r-1}}^t K_{20}(\tau) d\tau \lambda_1 + \int_{t_{r-1}}^t K_{21}(\tau) d\tau \lambda_{m(l+1)+1} + \int_{t_{r-1}}^t \tilde{f}(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r). \quad (15)$$

Выберем  $l_0$  так, чтобы  $q(l_0) = \beta T \frac{h}{l_0} < 1$ . Тогда из оценки

$$\left\| \sum_{i=1}^{m(l+1)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, \tau) \int_{t_{i-1}}^{\tau} v_i(\tau_1) d\tau_1 d\tau \right\| \leq \beta T \frac{h}{l_0} \max_{t \in [0, T]} \|v_i(t)\|, \quad t \in [0, T] \quad (16)$$

следует, что для любого  $l \geq l_0$  уравнение (15) имеет единственное решение.

Множество всех  $l$ , при котором (15) имеет единственное решение назовем регулярным разбиением и обозначим через  $\Delta_l$ . Как видно из (16), что данное множество непусто.

Из (15) определив  $\lim_{t \rightarrow t_s-0} v_s(t)$ ,  $s = \overline{1, m(l+1)}$ , подставляя соответствующие им выражения в условия (13) получим систему уравнений, для определения неизвестных параметров  $\lambda_r$ .

$$Q(l)\lambda = -F(l) - G(v, l), \lambda \in R^{n(m(l+1)+1)}, \quad (17)$$

Из полученной замкнутой системы можно определить пару  $(\lambda, u[t])$ . Т.е. из системы (17) определим  $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{n(m(l+1)+1)}^{(0)}) \in R^{n(m(l+1)+1)}$ , далее подставив в уравнения (15) решим систему интегральных уравнений типа Фредгольма II рода, и т.д.

Из выше сказанных следует

**Теорема.** Пусть матрица  $[I - A^2]$  обратима. Тогда для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо чтобы матрица  $Q_*(l)$  была обратима при всех  $l \in \Delta_l$  и достаточно чтобы она была обратима при некотором  $l \in \Delta_l$ .

Для иллюстрации выше сказанного рассмотрим следующий пример.

На отрезке  $[0, 1]$  рассмотрим следящую трехточечную краевую задачу

$$\dot{x}(t) - 2\dot{x}(1-t) = \int_0^1 (3t+1)x(s) ds + 3 \int_0^1 (t+s)\dot{x}(s) ds - 3t - 1, \quad (17)$$

$$x(0) - 2x\left(\frac{1}{2}\right) + x(1) = 0. \quad (18)$$

Рассмотрив значения уравнения (17) в точке  $t^* = 1-t$

$$\dot{x}(1-t) - 2\dot{x}(t) = \int_0^1 (4-3t)x(s) ds + 3 \int_0^1 (1-t+s)\dot{x}(s) ds + 3t - 4, \quad (19)$$

Рассмотрим совместно системы уравнений (17), (19)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - 2\dot{x}(1-t) = \int_0^1 (3t+1)x(s) ds + 3 \int_0^1 (t+s)\dot{x}(s) ds - 3t - 1, \\ \dot{x}(1-t) - 2\dot{x}(t) = \int_0^1 (4-3t)x(s) ds + 3 \int_0^1 (1-t+s)\dot{x}(s) ds + 3t - 4. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на 2 и складывая с первым уравнением получим

$$\dot{x}(t) = \int_0^1 (t-3)x(s) ds + 3 \int_0^1 (t-3s-2)\dot{x}(s) ds - t + 3. \quad (20)$$

Интегрируем второй интеграл по частям

$$\int_0^1 (t-3s-2)\dot{x}(s) ds = (t-3s-2)x(s)\Big|_0^1 + 3 \int_0^1 x(s) ds = (t-5)x(1) - (t-2)x(0) + 3 \int_0^1 x(s) ds. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20) получим, и группируя соответствующие члены, краевую задачу (17),

(18) можно записать в виде

$$\dot{x}(t) = \int_0^1 tx(s) ds + (t-5)x(1) - (t-2)x(0) - t + 3, \quad (21)$$

$$x(0) - 2x\left(\frac{1}{2}\right) + x(1) = 0. \quad (22)$$

Отрезок  $[0,1)$  разобьем на две части  $[0,1) = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ . Сужение функции  $x(t)$  на интервал  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$  обозначим через  $x_1(t)$ , а на интервал  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$  через  $x_2(t)$ . Тогда краевую задачу (21), (22) можно записать в виде

$$\dot{x}_1(t) = \int_0^{1/2} tx_1(s) ds + \int_{1/2}^1 tx_2(s) ds + (t-5)\lim_{t \rightarrow 1} x_2(t) - (t-2)x_1(0) - t + 3, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad (23)$$

$$\dot{x}_2(t) = \int_0^{1/2} tx_1(s) ds + \int_{1/2}^1 tx_2(s) ds + (t-5)\lim_{t \rightarrow 1} x_2(t) - (t-2)x_1(0) - t + 3, \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \quad (24)$$

$$x_1(0) - 2x_2\left(\frac{1}{2}\right) + \lim_{t \rightarrow 1} x_2(t) = 0, \quad (25)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1/2} x_1(t) = x_2\left(\frac{1}{2}\right). \quad (26)$$

Введя параметры  $\lambda_1 = x_1(0)$ ,  $\lambda_2 = x_1(1/2)$ ,  $\lambda_3 = \lim_{t \rightarrow 1} x_2(t)$  и выполним замену  $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$ ,  $r = \overline{1,2}$ . Тогда краевую задачу (23) - (26) можно записать в виде

$$\dot{u}_1(t) = t \int_0^{1/2} u_1(s) ds + t \int_{1/2}^1 u_2(s) ds - \left(\frac{t}{2} - 2\right)\lambda_1 + \frac{t}{2}\lambda_2 + (t-5)\lambda_3 - t + 3, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad (27)$$

$$u_1(0) = 0, \quad (28)$$

$$\dot{u}_2(t) = t \int_0^{1/2} u_1(s) ds + t \int_{1/2}^1 u_2(s) ds - \left(\frac{t}{2} - 2\right)\lambda_1 + \frac{t}{2}\lambda_2 + (t-5)\lambda_3 - t + 3, \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \quad (29)$$

$$u_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (30)$$

$$\lambda_1 - 2\lambda_2\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_3 = 0, \quad (31)$$

$$\lambda_1 + \lim_{t \rightarrow 1/2} u_1(t) = \lambda_2, \quad (32)$$

$$\lambda_2 + \lim_{t \rightarrow 1} u_2(t) = \lambda_3, \quad (33)$$

Рассмотрим отдельно задачи Коши (27) – (30), они эквивалентны следующим интегральным уравнениям

$$u_1(t) = \frac{t^2}{2} \int_0^{1/2} u_1(s) ds + \frac{t^2}{2} \int_{1/2}^1 u_2(s) ds - \left( \frac{t^2}{4} - 2t \right) \lambda_1 + \frac{t^2}{4} \lambda_2 + \left( \frac{t^2}{2} - 5t \right) \lambda_3 - \frac{t^2}{2} + 3t, \quad t \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right), \quad (34)$$

$$u_2(t) = \left( \frac{t^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \int_0^{1/2} u_1(s) ds + \left( \frac{t^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \int_{1/2}^1 u_2(s) ds - \left( \frac{t^2}{4} - 2t + \frac{15}{16} \right) \lambda_1 + \left( \frac{t^2}{4} - \frac{1}{16} \right) \lambda_2 + \left( \frac{t^2}{2} - 5t + \frac{19}{8} \right) \lambda_3 - \frac{t^2}{2} + 3t - \frac{11}{8}, \quad t \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right). \quad (35)$$

Интегрируем обе части первое уравнение  $\left[ 0, \frac{1}{2} \right)$ , а второе соответственно на  $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right)$ . Тогда

$$\int_0^{1/2} u_1(s) ds = \frac{1}{48} \int_0^{1/2} u_1(s) ds + \frac{1}{48} \int_{1/2}^1 u_2(s) ds + \frac{23}{96} \lambda_1 + \frac{1}{96} \lambda_2 - \frac{29}{63} \lambda_3 + \frac{17}{48}, \quad (36)$$

$$\int_{1/2}^1 u_2(s) ds = \frac{1}{12} \int_0^{1/2} u_1(s) ds + \frac{1}{12} \int_{1/2}^1 u_2(s) ds + \frac{5}{24} \lambda_1 + \frac{1}{24} \lambda_2 - \frac{13}{24} \lambda_3 + \frac{7}{24}. \quad (37)$$

Введем обозначение

$$k_1 = \int_0^{1/2} u_1(s) ds, \quad k_2 = \int_{1/2}^1 u_2(s) ds$$

Тогда (36), (37) можно записать в виде

$$k_1 = \frac{1}{48} k_1 + \frac{1}{48} k_2 + \frac{23}{96} \lambda_1 + \frac{1}{96} \lambda_2 - \frac{29}{63} \lambda_3 + \frac{17}{48},$$

$$k_2 = \frac{1}{12} k_1 + \frac{1}{12} k_2 + \frac{5}{24} \lambda_1 + \frac{1}{24} \lambda_2 - \frac{13}{24} \lambda_3 + \frac{7}{24}.$$

или

$$\frac{47}{48} k_1 - \frac{1}{48} k_2 = \frac{23}{96} \lambda_1 + \frac{1}{96} \lambda_2 - \frac{29}{63} \lambda_3 + \frac{17}{48}, \quad (38)$$

$$-\frac{1}{12} k_1 + \frac{11}{12} k_2 = \frac{5}{24} \lambda_1 + \frac{1}{24} \lambda_2 - \frac{13}{24} \lambda_3 + \frac{7}{24}. \quad (39)$$

Матрица соответствующая правой части уравнения (38), (39)



$$A = \begin{pmatrix} \frac{47}{48} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{12} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

обратима и

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{44}{43} & \frac{1}{43} \\ \frac{4}{43} & \frac{47}{43} \end{pmatrix}.$$

Это означает что  $\Delta_1$  является регулярным разбиение для (34), (35). Подставляя соответствующие выражения для  $k_1$ ,  $k_2$  в правую часть (34), (35), получим

$$u_1(t) = 2t\lambda_1 + \frac{12}{43}t^2\lambda_2 - \left(\frac{6}{43}t^2 + 5t\right)\lambda_3 - \frac{6}{43}t^2 + 3t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad (40)$$

$$u_2(t) = (2t-1)\lambda_1 + \left(\frac{12}{43}t^2 - \frac{3}{43}\right)\lambda_2 - \left(\frac{6}{43}t^2 + 5t - \frac{109}{43}\right)\lambda_3 - \frac{6}{43}t^2 + 3t - \frac{63}{43}, \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \quad (41)$$

В (40), (41) переходя к пределу  $\lim_{t \rightarrow 1/2} u_1(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} u_2(t)$  и подставляя полученные выражения в краевые условия (32), (33), получим систему для определения параметров  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 - \frac{40}{43}\lambda_2 - \frac{109}{43}\lambda_3 = -\frac{63}{43}, \\ \lambda_1 + \frac{52}{43}\lambda_2 - \frac{155}{43}\lambda_3 = -\frac{60}{43}. \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -\frac{40}{43} & -\frac{109}{43} \\ 1 & \frac{52}{43} & -\frac{155}{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{63}{43} \\ -\frac{60}{43} \end{pmatrix}.$$

Матрица соответствующая правой части уравнения обратима и

$$Q_*^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{46}{3} & -\frac{43}{3} & \frac{43}{3} \\ \frac{67}{6} & -11 & \frac{65}{6} \\ 8 & -\frac{23}{3} & \frac{22}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда из системы определим  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda = 1_3$ . Подставляя полученные значения  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda = 1_3$  в (40), (41) получим  $u_1(t) = 0$ ,  $u_2(t) = 0$ . Така как,  $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$ ,  $r = \overline{1,2}$  и  $\lambda_3 = \lim_{t \rightarrow 1} x_2(t)$ , то  $x(t) = 1$ .

Из теоремы следует, что многоточечная краевая задача (17), (18) имеет единственное решение и  $x(t) = 1$ .

#### **Заключение**

В данной работе метод параметризации был применен для решения многоточечной краевой задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений с инволютивными преобразованиями. Введение параметров и удачная замена переменных разбивает задачу на две части: задачу Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений и систему линейных уравнений относительно введенных параметров. Применяя теорию интегральных уравнений, решение задачи сводится к обратимости матрицы, зависящей от исходных данных. Тем самым, установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи. Эффективность и точность метода продемонстрирована на наглядном примере. В дальнейшем предполагается применение метода параметризации к многоточечным краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений с дробными производными.

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан. AP09259137

#### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach. Amsterdam, Warszawa, 1973.
2. Wiener J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations. World Sci., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993.
3. Karapetyants N.K., Samko S.G. Equations with involution operators and their applications // Rostov-n / D. Publishing house of RSU -1988. 188 p.
4. Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Properties in  $L_p$  of root functions for a nonlocal problem with involution// Turk J Math. – 2019. - V.43. – P.393 - 401.

5. Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution// *Differential Equation*. -.2012. -Vol.48, No.8. -P.1112 - 1118.
6. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation// *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. -1989. - Vol.29, No. 1.- P.34-46.
7. Dzhumabaev D.S. A method for solving a linear boundary value problem for an integro-differential equation // *Jrn. Comp. Mat. and Mat. Phys.*, 2010. V. 50. No. 7. Pp. 1209-1221.
8. D. S. Dzhumabaev, “On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 294:2 (2016), 342-357
9. Dulat Dzhumabaev, “Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations”, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 41:4 (2018), 1439-1462

#### **REFERENCES**

10. Przeworska-Rolewicz D. *Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach*. Amsterdam, Warszawa, 1973.
11. Wiener J. *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*. World Sci., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993.
12. Karapetyants N.K., Samko S.G. *Equations with involution operators and their applications* // Rostov-n / D. Publishing house of RSU -1988. 188 p.
13. Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Properties in  $L_p$  of root functions for a nonlocal problem with involution// *Turk J Math*. – 2019. - V.43. – P.393 - 401.
14. Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution// *Differential Equation*. -.2012. - Vol.48, No.8. -P.1112 - 1118.
15. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation// *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. -1989. - Vol.29, No. 1.- P.34-46.
16. Dzhumabaev D.S. A method for solving a linear boundary value problem for an integro-differential equation // *Jrn. Comp. Mat. and Mat. Phys.*, 2010. V. 50. No. 7. Pp. 1209-1221.
17. D. S. Dzhumabaev, “On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 294:2 (2016), 342-357
18. Dulat Dzhumabaev, “Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations”, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 41:4 (2018), 1439-1462

## ФИЗИКА

УДК 62, 620.17

ГРНТИ 53.49.13

<https://doi.org/10.47526/2022-3/2524-0080.05>

**А.Р.ТАШМЕТОВ<sup>1</sup>, Н.А.ШЕКТИБАЕВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави,  
(Казахстан, Туркестан), E-mail: [akmal.tashmetov@ayu.edu.kz](mailto:akmal.tashmetov@ayu.edu.kz)

<sup>2</sup>PhD, старший преподаватель

Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави  
(Казахстан, Туркестан), E-mail: [nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz](mailto:nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz)

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕРМООБРАБОТКИ НА ДЕМПФИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ FE-MN И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОГРАММЕ COMSOL MULTYPHISICS

**Аннотация.** На сегодняшний день одной из важнейших проблем промышленного производства является снижение шума и вибрации. Для решения данной проблемы, сплавы подвергаются различным обработкам, для повышения демпфирующих свойств.

В этой статье речь идет о влиянии термообработки на демпфирующие свойства сплавов на основе Fe-Mn. Одной из основных преимуществ термической обработки является – повышение износостойкости материалов и сплавов. Термической обработке подвергают заготовки в том случае, если необходимо получить другие физико-химические свойства материалов.

В исследованиях по теме использовался метод конечных элементов. Метод конечных элементов основан на приближении непрерывной функции. Получается метод заключается в том, что разбивает участок на множество элементов, рассчитывая каждый из элементов, тем самым повышая точность расчета.

В результате исследований был получен сплав на основе Fe-Mn с более повышенными демпфирующими свойствами. Было проведено сравнение стандартной стали с образцом. А также была предоставлена имитационная модель на программе Comsol Multiphysics. Было определено напряженно-деформированное состояние образцов.

Результаты научных исследований могут быть использованы в области машиностроения.

**Ключевые слова:** Термическая обработка, сплав Fe-Mn, демпфирующие свойства, имитационная модель, эффект памяти формы, диссипативные свойства, тензор напряжений.

**А.Р. Ташметов<sup>1</sup>, Н.А. Шектибаев<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің  
магистранты,

(Қазақстан, Түркістан), E-mail: [akmal.tashmetov@ayu.edu.kz](mailto:akmal.tashmetov@ayu.edu.kz)

<sup>2</sup>PhD, аға оқытушы

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті  
(Қазақстан, Түркістан), E-mail: [nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz](mailto:nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz)

### FE-MN негізіндегі қорытпалардың демпферлік қасиеттеріне термоөңдеудің әсерін зерттеу және comsol multiphysics бағдарламасындағы имитациялық моделдеу

**Аңдатпа.** Бүгінгі таңда өнеркәсіптік өндірістің маңызды мәселелерінің бірі Шу мен дірілді азайту болып табылады. Бұл мәселені шешу үшін қорытпалар демпферлік қасиеттерін

арттыру үшін әртүрлі өңдеуден өтеді.

Бұл мақалада термиялық өңдеудің Fe-Mn негізіндегі қорытпалардың демпферлік қасиеттеріне әсері туралы айтылады. Термиялық өңдеудің негізгі артықшылықтарының бірі-материалдар мен қорытпалардың тозуға төзімділігін арттыру. Егер материалдардың басқа физика-химиялық қасиеттерін алу қажет болса, дайындамалар термиялық өңдеуден өтеді.

Тақырып бойынша зерттеулерде соңғы элементтер әдісі қолданылды. Ақырлы элементтер әдісі үздіксіз функцияны анықтауға негізделген. Бұл әдіс аймақты көптеген элементтерге бөліп, элементтердің әрқайсысын есептеп, есептеу дәлдігін арттырады.

Зерттеулер нәтижесінде Fe-Mn негізінде жоғары демпферлік қасиеттері бар қорытпа алынды. Стандартты болатты үлгімен салыстыру жүргізілді. Сондай-ақ, COMSOL Multiphysics бағдарламасында Имитациялық модель ұсынылды. Үлгілердің кернеулі күйі болды.

Ғылыми зерттеулердің нәтижелерін машина жасау саласында қолдануға болады.

**Кілт сөздер:** термиялық өңдеу, Fe-Mn қорытпасы, демпферлік қасиеттері, модельдеу моделі, жад пішінінің әсері, диссипативті қасиеттері, кернеу тензоры.

**A.R. Tashmetov<sup>1</sup>, N.A. Shektibaev<sup>2</sup>**

*<sup>1</sup>Master's student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University*

*E-mail: [akmal.tashmetov@ayu.edu.kz](mailto:akmal.tashmetov@ayu.edu.kz)*

*<sup>2</sup>PhD, senior lecturer, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University*

*E-mail: [nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz](mailto:nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz)*

### **Investigation of the effect of heat treatment on the damping properties of Fe-Mn-based alloys and simulation in the COMSOL Multiphysics program**

**Abstract.** To date, one of the most important problems of industrial production is the reduction of noise and vibration. To solve this problem, alloys are subjected to various treatments to increase damping properties.

This article deals with the effect of heat treatment on the damping properties of Fe-Mn-based alloys. One of the main advantages of heat treatment is an increase in the wear resistance of materials and alloys. The workpieces are subjected to heat treatment if it is necessary to obtain other physical and chemical properties of the materials.

The finite element method was used in the research on the topic. The finite element method is based on the application of a continuous function. It turns out that the method consists in dividing the plot into many elements, calculating each of the elements, thereby increasing the accuracy of the calculation.

As a result of the research, an alloy based on Fe-Mn with higher damping properties was obtained. A comparison of standard steel with a sample was carried out. And also a simulation model was provided on the Comsol Multiphysics program. There was definitely a stress-strain state of the samples.

The results of scientific research can be used in the field of mechanical engineering.

**Keywords:** Heat treatment, Fe-Mn alloy, damping properties, simulation model, shape memory effect, dissipative properties, stress tensor.

### **Введение**

Одной из актуальных проблем на сегодняшний день является снижение шума и вибрации в промышленном производстве. Исследователи со всего мира, подвергают сплавы различным обработкам, для повышения физико-химических свойств, а также для повышения демпфирующих свойств. Это и является одной из главных причин, почему я выбрал данную тему.

Как утверждал Александров Виктор Михайлович, в своей учебной пособии - “Термическая обработка – это процесс, при котором необходимый металл нагревают и выдерживают при определенной температуре, с последующим его охлаждением. В ходе этого процесса металл претерпевает изменения механических свойств.” [1]. Получается, при высокой температуре изменяется микроструктура металла, которая играет огромную роль в механических свойствах. Итоговый результат зависит от множества различных факторов.

Имитационное моделирование в программе “Comsol Multyphysics”. Современное программное обеспечение дает возможность имитационно моделировать физические процессы, которые позволяют более точно анализировать демпфирующие свойства сплавов, т.к. вычислительная возможность данных программных пакетов обширна. Одной из таких программ является COMSOL Multyphysics. Эта программа содержит в себе обширную часть пакетов. Данная программа при расчетах использует метод конечных элементов. Почему многие ведущие компании выбирают данную программу? Одной из главных причин является точность расчетов, а также широкий спектр возможностей. Данная программа рассчитывает все научные и инженерные задачи, которые основываются на использовании дифференциальных уравнениях в частных производных. С данным программным обеспечением можно расширить стандартные модели, для расчета связанных между собой физических явлений. Благодаря встроенным физическим режимам, коэффициенты задаются в виде понятных физических свойств и условий [2].

Программа COMSOL Multiphysics проводит расчеты, связанные с дифференциальным уравнением в частных производных методом численного приближения к самой функции. Так как компьютер не умеет работать с уравнениями. Такое приближение называется метод конечных элементов. Его название говорит о идее решения. Программой по требованию пользователя объем тела делится на части некоторого размера. По итогу получается тело, состоящее из большого количества элементов. Образующаяся сетка представляет собой форму тела. Каждая подобласть решается в своих границах и узлах. Каждый элемент имея соседей и общие границы позволяют решить поочередно для любого из них показатели. Используются различные аппроксимации. Каждая из них используется в своем конкретном случае. Применяются они для расчета различных инженерных явлений. Затрагивают многие области такие как звуковые процессы, реакции между веществами, диффузное разбавление веществ, взаимодействие между частицами магнитными полями, движение лучей света. Для каждой из них программа применит свои формулы. То есть она может решить задачи в зависимости от рассматриваемого явления [3].

Есть несколько схожих тем. Например в 2021 году, была выпущена статья на тему “Влияние термической обработки на мартенситное превращение и специфические свойства сплавов с памятью формы Fe-Mn-Si-Cr, обработанных методом интенсивной пластической деформации НШПТ”. В данной статье иностранные ученые исследовали способность некоторых сплавов запоминать свою форму при двух разных температурах называется эффектом памяти формы (SME), а соответствующие материалы называются сплавами с памятью формы (SMAs). Способность некоторых сплавов запоминать свою форму при двух разных температурах называется эффектом памяти формы, а соответствующие материалы называются сплавами с памятью формы. Эффект памяти форм определяется недиффузионным фазовым превращением первого порядка, называемым мартенситным превращением. При мартенситном превращении атомы перемещаются на расстояния, меньшие межатомных расстояний, и переходят из аустенитной фазы с высокой температурой и высокой симметрией (кубический тип) в мартенситную фазу с низкой температурой, с более низкой симметрией (тетрагональной, орторомбической, гексагональной). Сплавы NiTi, сплавы на основе Cu и Fe являются наиболее известными типами SMA. На основании их кристаллической структуры в аустенитной фазе они группируются в «β-тип» с объемно-центрированной кубической ячеистой структурой, их подклассом являются Ni-Ti, Co-Ni-Ga,

Cu-Zn-Al, Cu-Al-Ni и Ni-Mn-Ga, сплавы Гейслера Ni-Fe-Ga и « $\gamma$ -тип», с гранцентрированной кубической ячеистой структура, содержащая Fe-Mn и Fe-Mn-Si, FePd или FeNiCoTi. Среди них сплавы Fe-Mn с памятью формы обладают хорошей обрабатываемостью. Влияние термической обработки на месте на мартенситное превращение и удельные свойства сплавов Fe-Mn-Si-Cr с памятью формы, обработанных методом интенсивной пластической деформации. Мартенситное превращение сплавов Fe-Mn-Si показывает особое упругое мартенситное  $\gamma$ - $\varepsilon$  превращение, индуцированное напряжением, и его обратное  $\varepsilon$ - $\gamma$  превращение при последующем нагреве. Кроме того, помимо  $\varepsilon$ -мартенсита (гексагональная плотноупакованная - структура, вызванная напряжением),  $\alpha'$ -мартенсит (объемно-центрированной тетрагональная - структура) может появиться на пересечениях кристаллографических дефектов, вызванных пластической деформацией, такой как механические двойники, дефекты упаковки и полосы сдвига. Кроме того, согласно,  $\alpha'$ -мартенсит может образовываться в  $\varepsilon$ -мартенсите напряжения, в вероятном  $\gamma$ - $\varepsilon$ - $\alpha'$ -превращении, причем  $\varepsilon$ -мартенсит выступает промежуточной фазой для  $\alpha'$ -формирования. В последние годы большой интерес вызывает проектирование свойств материалов и следовательно, взаимосвязь между параметрами процесса и свойствами материалов требует большего понимания. Например, до конца не известно, какие физические процессы, происходящие при интенсивной пластической деформации твердых материалов, приводят к существенным изменениям типичных свойств сырья. Таким образом, были разработаны многочисленные методы для уточнения микроструктуры. Возможность управления размером зерен с помощью интенсивной пластической деформации открывает возможность управления  $\gamma$ - $\varepsilon$  мартенситным превращением в ферросплавах с памятью формы. Исследования показывают, что сверх-мелкозернистые сплавы с памятью формы на основе железа демонстрируют превосходную восстанавливаемую деформацию, что является более полезным в долгосрочных инженерных приложениях [4].

На протяжении многих лет бинарная система сплавов Fe-Mn была предметом обширных экспериментальных и теоретических исследований в рамках особого интереса к высокой демпфирующей способности, пластичности и упрочняющей способности этих сплавов, их магнитных свойств и возможности получения эффекта памяти формы в некоторых композициях. Упомянутые свойства сильно зависят от содержания Mn, и в свою очередь, составляющие фазы, которые могут быть одной или комбинацией гранцентрированной кубической аустенита ( $\gamma$ ), гексагональная плотно-упакованная  $\varepsilon$ -мартенсита ( $\varepsilon$ ) и объемно-центрированная кубическая мартенсит ( $\alpha'$ ). В связи с этим в некоторых исследованиях изучались микроструктура и свойства сплавов по составу для Fe - (11–17%) Mn, Fe - (17–23%) Mn и Fe - (16–36 %) Mn. Фундаментальные исследования для глубокого понимания фазы первого порядка и обратной фазы преобразований в этой системе ( $\gamma \rightleftharpoons \alpha'$ ,  $\gamma \rightleftharpoons \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightleftharpoons \alpha'$ ) было важно не только для настройки свойств бинарных сплавов Fe-Mn, но и для разработки сталей с высоким содержанием Mn, где Mn заменяет дорогие аустенитные стабилизирующие элементы, такие как Ni и Cr. Хотя большинство опубликованных работ связанные с литыми или деформируемыми сплавами, провели всестороннее исследование, направленное по порошковой металлургии бинарных сплавов Fe-Mn (4-40 Mn), которые можно сгруппировать по фазам превращения, микроструктуры и механических свойств, характера и особенностей разрушения, структурообразование при деформации и рекристаллизации, механизм энергии, диссипативные и демпфирующие свойства. За последние три десятилетия в области порошковой металлургии были проведены огромные исследования для включать Mn (0,5-4%) в качестве дешевого, но эффективного легирующего элемента при производстве спеченных конструкционных материалов частей (0,2-1,5% C), чтобы заменить дорогостоящие элементы, такие как никель и молибден, и добиться устойчивого и экономичное изготовление при промышленных условиях спекания. Добавление Mn было опробовано в различных формы, включающие смешанные,

ферромарганцевые, лигатурные и предсплавные порошки. Пока есть плюсы и минусы каждого метода, вопросы, на которые следует обратить внимание, обычно связаны со сжимаемостью порошка, возгонка и окисление Mn при спекании, диффузия и распределение Mn в Fe развитие матрицы и микроструктуры. Эти факторы во многом определяют успех производство и утилизация высококачественных марганецсодержащих сталей порошковой металлургии. Несмотря на значительное количество публикаций, посвященных свойствам и возможностям соединения Fe–30% Mn и аналогичные сплавы с высоким содержанием марганца для применения в биоразлагаемых имплантатах. В то время как несколько исследований касаются обработки порошковой металлургии сплава Fe-30% Mn и аналогичных составов, ни в одном из этих исследований не изучалась критическая характеристика сырьевых порошков таких как размер частиц порошка и его влияние на конечные свойства спеченных сплавов [5].

Вышеперечисленные результаты исследований, показывают широкий спектр возможностей по улучшению демпфирующих свойств сплавов.

Целью данной работы является, исследование влияния термообработки на демпфирующие свойства сплавов на основе Fe-Mn. А также определение напряженно-деформированного состояния образцов.

К задачам исследования относятся:

- исследование демпфирующих, физико-механических свойств сплавов на основе Fe-Mn;
- имитационное моделирование образцов в программе “Comsol Multiphysics”;
- Определение напряжения и статической деформации для образцов.

### **Методы исследования**

Предметом исследования являются сплавы на основе Fe-Mn.

Описание законов физики для задач, зависящих от пространства и времени, обычно выражается в терминах дифференциальных уравнений в частных производных (УЧП). Для подавляющего большинства геометрий и задач, эти в уравнении частных производных не могут быть решены аналитическими методами. Вместо этого может быть построена аппроксимация уравнений, обычно основанная на различных типах дискретизации. Эти методы дискретизации аппроксимируют уравнением частных производных, уравнениями численной модели, которые можно решить с помощью численных методов. Решение уравнений численной модели, в свою очередь, является аппроксимацией реального решения уравнения частного производного. Для вычисления таких приближений используется метод конечных элементов.

Глобальная система уравнений имеет известные методы решения и может быть рассчитана по начальным значениям исходной задачи для получения числового ответа.

На первом шаге выше уравнения элементов представляют собой простые уравнения, которые локально аппроксимируют исходные сложные уравнения, подлежащие изучению, где исходные уравнения часто являются уравнениями в частных производных. Для объяснения аппроксимации в этом процессе метод конечных элементов обычно вводят как частный случай метода Галеркина. Процесс на математическом языке, заключается в построении интеграла внутреннего произведения невязки и весовых функций и установке интеграла равным нулю. Проще говоря, это процедура, которая минимизирует ошибку аппроксимации путем подгонки пробных функций к уравнению частных производных. Остаток - это ошибка вызванная пробными функциями, а весовые функции - это функции полиномиальной аппроксимации, которые проецируют остаток. Процесс устраняет все пространственные производные от уравнения частных производных, тем самым локально аппроксимируя уравнения частных производных с помощью набора алгебраических уравнений для стационарных задач, набор обыкновенных дифференциальных уравнений для



нестационарных задач. Эти наборы уравнений являются уравнениями элементов. Они линейны, если базовое уравнение частных производных линейно, и наоборот. Системы алгебраических уравнений, возникающие в стационарных задачах, решаются с использованием методов численной линейной алгебры, а системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающие в задачах переходных процессов, решаются путем численного интегрирования с использованием стандартных методов, таких как метод Эйлера или метод Рунге - Кутты.

На втором шаге глобальная система уравнений генерируется из уравнений элементов путем преобразования координат локальных узлов поддоменов в глобальные узлы домена. Это пространственное преобразование включает в себя соответствующие корректировки ориентации, применяемые по отношению к базовой системе координат. Этот процесс часто выполняется программным обеспечением с использованием данных координат, сгенерированных из субдоменов.

В данной статье используется метод конечных элементов. Данный метод является численным методом решения задач прикладной физики. Метод широко используется в различных областях, начиная с гидродинамики и заканчивая электродинамикой. Метод конечных элементов используется в ряде инженерных программ. Причина, по которой многие используют данный метод, является точность измерений.

В ходе исследования была использована программа COMSOL Multiphysics. В качестве образца была использована пластина.

### **Результаты, анализ и обсуждение**

Исследуемый материал, из которого состоит пластина - сталь. Представляет собой соединение железа и углерода в различных соотношениях, формах частиц. При получении данный сплав имеет различные свойства в зависимости от содержания углерода и его формы. В ходе процесса изготовления примеси имеют место. Виды примесей могут быть постоянными или неизбежными [6].

При более высоком содержании Mn, он образует с Fe твердый раствор, увеличивающий твердость, прочность стали и не очень уменьшая пластичность. Поэтому, марганец делает сталь более твердой и устойчивой к износу (при высоком содержании) [7].

В связи с повышенными требованиями, возложенными на данный материал. Желательно выбрать из данной системы один из доступных вариантов. Так как на данный момент именно эта группа сплавов получила большее распространение. Материалы, получаемые в результате сплавления железа и марганца, имеют высокие требуемые характеристики относительно их веса. То есть отношение прочности к единице веса, а также пластичности к единице веса имеют показатели больше, чем подобные ему материалы в этой ценовой категории. То есть при малом весе обладают отличительным показателем деформации без разрушения, способности сопротивляться разрушению. При конструировании станин оборудования имеют хорошую демпфирующую возможность. При вибрациях способно гасить часть колебаний. К тому же имеют низкую себестоимость. При данных характеристиках суммарные затраты на его производство не превышает предполагаемой выгоды от использования материала. Ферромарганец широко используется на производствах транспорта, при изготовлении медицинских инструментов. При желании в зависимости от требуемых условий эти сплавы легируют алюминием, кобальтом, кремнием и другими [8].

Перед первым изготовлением рабочей модели, мы в условиях нынешнего времени можем предварительно решить задачу на прочность. Имея некоторые гипотезы, мы можем проверить их состоятельность при решении задачи процесса пластической деформации. Предположив, что спроектированная нами модель будет прочной, мы решаем краевую задачу пластической деформации. В ходе которой определяем напряженное и

деформированное состояние в момент времени. Мы рассчитаем возникшие напряжения. Эти расчеты будут вычислены через тензор напряжений и функциями линии движения некоторых точек тела. Имея простую задачу найти напряженное состояние балки, не составит труда решить ее на листе. Для более сложных конструкций потребуется много времени потраченное на вычисление. Их возможно решить вручную, однако это нецелесообразно. С развитием вычислительной техники эти задачи должны математически смоделированы в специальных программных обеспечениях [9].

Предел прочности - механическое напряжение, выше которого происходит разрушение материала. Иначе говоря, это пороговая величина, превышая которую механическое напряжение разрушит некое тело из конкретного материала. Следует различать статический и динамический пределы прочности. Также различают пределы прочности на сжатие и растяжение [10].

В исследовании в качестве эталона взяли Сталь 20ХНР. Микроструктура стали 20ХНР (0,16 % С; 0,7 % Мn; 0,9 % Ni; 0,8 % Cr; 0,002% В, ост. – Fe). Она представляет собой феррит с перлитной структурой.

Область применения: Крупные детали, работающие в условиях ударных нагрузок. Зубчатые колеса, червяки, валы-шестерни, кулачковые муфты, валики, пальцы, втулки и другие.

Микроструктура стали 1М (0,21% С; 0,8% Мn; 0,9% Cr; 0,5% Ni; 0,21% V; ост. – Fe).

Данные с таблицы 1 и таблицы 2, были взяты из ранее опубликованной работы (была предоставлена ссылка).

Таблица 1 – Влияние вида термической обработки на демпфирующие свойства исследуемых сталей [2].

В данной таблице представлены виды термической обработки, для исследуемых сталей. Отжиг выполняют путем нагрева металла до температуры фазовых превращений и последующего медленного охлаждения. Нормализацию применяют, как правило, для устранения в поковках крупнозернистой структуры, образовавшейся в результате вынужденного или случайного увеличения времени нахождения заготовок в печи или в случае окончанияковки при слишком высокой температуре. Закалкой называют операцию нагрева до температуры, на 30...70 ° С превышающей температуру перехода стали в аустенитное состояние, и охлаждения в воде, масле или другой среде с соответствующей для данной стали скоростью. Время выдержки при температуре закалки должно быть достаточным для завершения полного фазового превращения в металле.

Сталь	Внутреннее трение, Q					
	Вид термической обработки					
	Ковка	Отжиг	Нормализация	Закалка	Закалка, низкий отпуск	Закалка, высокий отпуск
20ХНР	0,0266	0,0201	0,0275	0,0322	0,0301	0,0293
1М	0,0401	0,0215	0,0322	0,0391	0,0310	0,0454

Как видно из таблицы 1, диссипативные свойства существенно зависят от вида термической обработки. Виды термической обработки (отжиг, нормализация, отпуск), аннигилирующие несовершенства кристаллической решетки, снижают демпфирующие свойства.

Таблица 2 - Критическая точка для исследуемых сталей [2].

Критические точки стали или точки Чернова - критические температуры, при которых происходит изменение, фазового состояния и структуры стали при нагреве или охлаждении её в твёрдом виде.

Сталь	Критическая точка, °С
20ХНР	790
1М	840

(20ХНР – стандартная сталь, 1М – образец)

Для расчета напряженно-деформированного состояния необходимо воспользоваться программой COMSOL Multiphysics.

Вводим необходимые данные нашей пластины:  $60 \times 20 \times 6$ . Далее задаем марку нашей стали, выбираем распределенную нагрузку на всю поверхность, выбираем закрепление по нижней плоскости. Давление равняется  $0,5$  кПа.

Результаты:

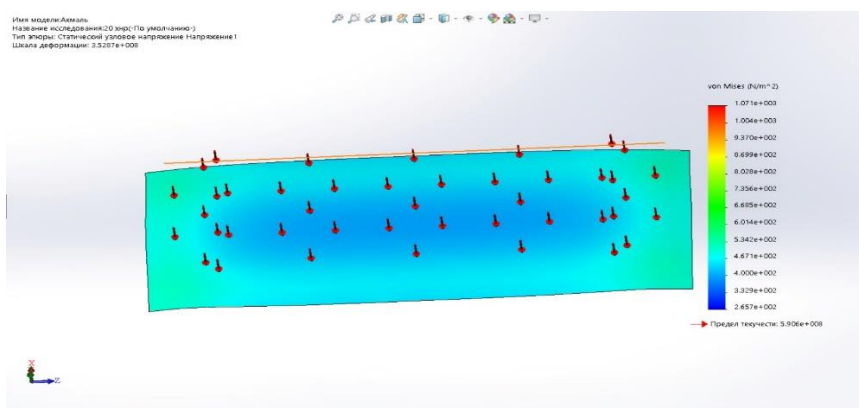


Рисунок 1 – Напряжение для стали 20ХНР

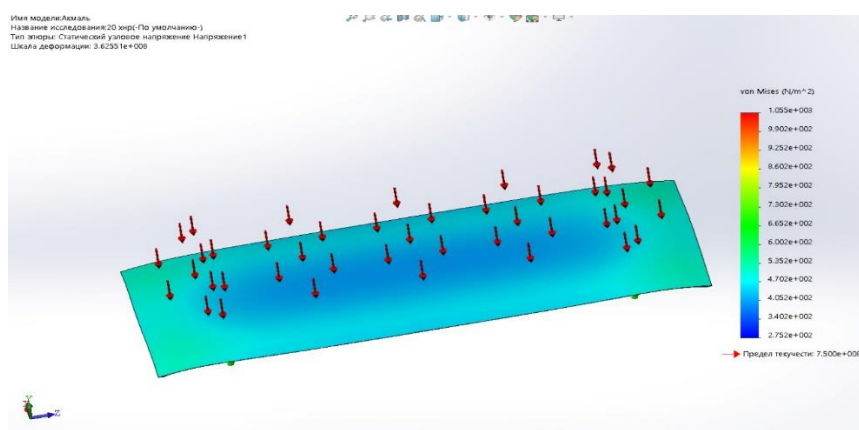


Рисунок 2 – Напряжение для образца 1М

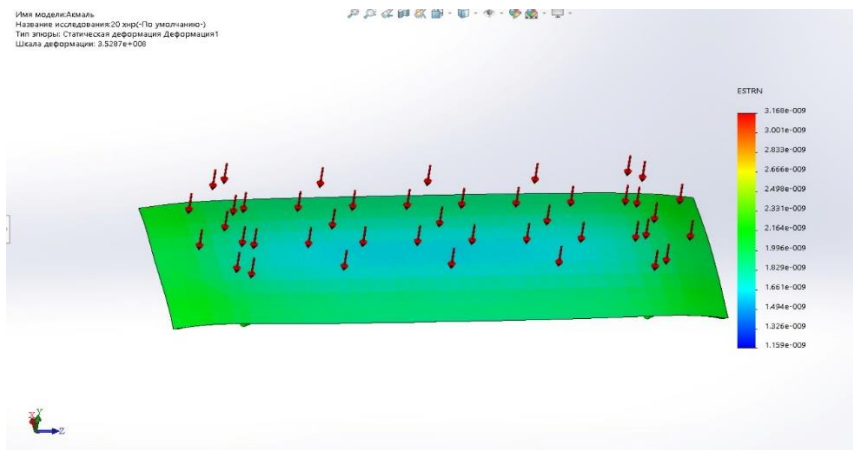


Рисунок 3 – Статическая деформация для стали 20ХНР

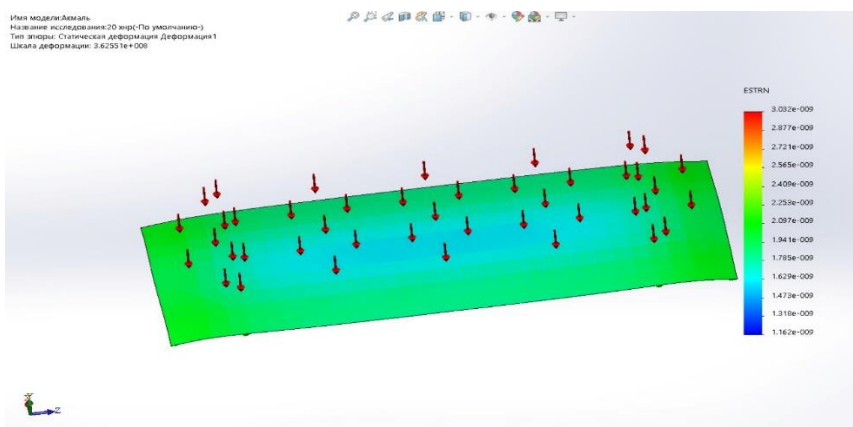


Рисунок 4 – Статическая деформация для образца 1М

Как видно по результатам предел текучести для стали 20ХНР равняется  $5,906e+008$ , а для образца 1М равняется  $7,500e+008$ . Так как предел текучести у образца 1М выше, образец 1М способна дольше находиться в напряженном состоянии.

### Заклучение

В настоящей работе были рассмотрены различные виды термообработки для сталей на основе Fe-Mn.

В ходе исследований для сравнения, были подобраны два вида сталей на основе Fe-Mn и были произведены расчеты на напряженно-деформированное состояние. Как видно по результатам – предел текучести у образца 1М больше, чем у стали 20ХНР. Это означает что, образец 1М способна дольше находиться в напряженном состоянии и противостоять стационарным и динамическим нагрузкам. Получается, что образец 1М устойчивее к стационарным и динамическим нагрузкам, чем образец из стали 20ХНР. Все расчеты были произведены в программе COMSOL Multiphysics. Новизна данной темы заключается в том,

что результаты данных образцов, доказали свою эффективность при стационарных и динамических нагрузках.

Результаты исследований могут быть использованы в отрасли машиностроения. А также возможна разработка нового образца стали 1М, но для этого необходимо пройти ряд испытаний. В целом результаты исследований показали положительный результат.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Александров В.М. Материаловедение и технология конструкционных материалов: Учебное пособие, часть 1. – Архангельск: САФУ, 2015. – 327 с.
2. Алиманова М.У. Разработка вибродемпфирующих сплавов на основе железа, легированных никелем, ванадием и бором: Диссертация. – Алматы: КазНТУ им. К.И.Сатпаева, 2013. – 131 с.
3. Оракбаев Е.Ж. Исследование и разработка эффективных систем управления процессом подземного выщелачивания: Диссертация. – Алматы: КазНТУ им. К.И.Сатпаева, 2017. – 102 с.
4. Гурау С., Гурау Г., Толеа Ф., Попеску Б., Бану М., Буджореану Л.Г. Влияние термической обработки на месте на мартенситное превращение и удельные свойства сплавов Fe-Mn-Si-Cr с памятью формы, обработанных методом интенсивной пластической деформации ВШПТ: Статья – Материалы, 2021. – 14 с.
5. Махди Дехестани, Кевин Трамбл, Хань Ван, Хайян Ван, Лия А.С. Влияние микроструктуры и термической обработки на механические свойства и коррозионное поведение сплав Fe-30Mn, полученный методом порошковой металлургии: Статья - Уэст-Лафайетт: Университет Пердью, 2017. – 42 с.
6. Заплатин В.Н., Сапожников Ю.И. и другие. Основы Материаловедения (металлообработка): Учебник – Москва: Издательский центр “Академия”, 2017. – 272 с.
7. Кушнер В.С. и др. Материаловедение: Учебник. – Омск: Издательство ОмГТУ, 2014. – 252 с.
8. Сунь Лиин Закономерности структурообразования и особенности мартенситного превращения в сплавах систем Mn-Cu и Fe-Mn: Диссертация. – Москва: НИТУ ‘МИСиС’, 2021. – 28 с.
9. Пузанов М.П. Исследование напряженно-деформированного состояния процесса листовой прокатки трансформаторной стали с учетом анизотропии свойств: Диссертация. – Екатеринбург: УФУ имени Б.Н.Ельцина, 2019. – 134 с.
10. Циммерман Р., Гюнтер К. Металлургия и материаловедение: Справочник - Москва: “Металлургия”, 1982. – 480 с.

### **REFERENCES**

1. Aleksandrov V.M. Materialovedeniye i tekhnologiya konstruksionnykh materialov: Uchebnoye posobiye, chast' 1 [Materials Science and Technology of Structural Materials: Textbook]. – Arkhangel'sk: SAFU, 2015. – 327 s. [in Russian]
2. Alimanova M.U. Razrabotka vibrodempfiruyushchikh splavov na osnove zheleza, legirovannykh nikel'em, vanadiyem i borom: Dissertatsiya [Development of vibration-damping iron-based alloys alloyed with nickel, vanadium and boron: Dissertation]. – Almaty: KazNTU im. K.I.Satpayeva, 2013. – 131 s. [in Russian]
3. Orakbayev Ye.ZH. Issledovaniye i razrabotka effektivnykh sistem upravleniya protsessom podzemnogo vyshchelachivaniya: Dissertatsiya [Research and development of effective

- systems for controlling the process of underground leaching: Dissertation] – Almaty: KazNTU im. K.I.Satpayeva, 2017. – 102 s. [in Russian]
4. Gurau S., Gurau G., Tolea F., Popescu B., Banu M., Budzhoreanu L.G. Vliyanie termicheskoy obrabotki na meste na martensitnoye prevrashcheniye i udel'nyye svoystva splavov Fe-Mn-Si-Cr s pamyat'yu formy, obrabotannykh metodom intensivnoy plasticheskoy deformatsii VSHPT: Stat'ya [The Effect of the In-Situ Heat Treatment on the Martensitic Transformation and Specific Properties of the Fe-Mn-Si-Cr Shape Memory Alloys Processed by HSHPT Severe Plastic Deformation] – Materialy, 2021 – 14 s. [in English]
  5. Zaplatin V.N., Sapozhnikov YU.I. i drugiye. Osnovy Materialovedeniya (metalloobrabotka): Uchebnik [Fundamentals of Materials Science (metalworking): Textbook] – Moskva: Izdatel'skiy tsentr “Akademiya”, 2017 – 272 s. [in Russian]
  6. Kushner V.S. i dr. Materialovedeniye: Uchebnik [Material Science: Textbook] – Omsk: Izdatel'stvo OmGTU, 2014 – 252 s. [in Russian]
  7. Sun' Liin Zakonomernosti strukturoobrazovaniya i osobennosti martensitnogo prevrashcheniya v splavakh sistem Mn-Cu i Fe-Mn: Dissertatsiya [Regularities of structure formation and features of martensitic transformation in alloys of Mn-Cu and Fe-Mn systems: Dissertation] – Moskva: NITU ‘MISiS’, 2021 – 28 s. [in Russian]
  8. Makhdi Dekhestani, Kevin Tramb, Khan' Van, Khayyan Van, Liya A.C. Vliyanie mikrostruktury i termicheskoy obrabotki na mekhanicheskiye svoystva i korrozionnoye povedeniye splav Fe–30Mn, poluchenny metodom poroshkovoy metallurgii: Stat'ya [Effects of microstructure and heat treatment on mechanical properties and corrosion behavior of powder metallurgy derived Fe–30Mn alloy: Dissertation] - Uest-Lafayyett: Universitet Perd'yu, 2017 – 42 s. [in English]
  9. Puzanov M.P. Issledovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya protsessa listovoy prokatki transformatornoy stali s uchetom anizotropii svoystv: Dissertatsiya [Study of the stress-strain state of the process of sheet rolling of transformer steel, taking into account the anisotropy of properties: Dissertation] – Yekaterinburg: UFU imeni B.N.Yel'tsina, 2019 – 134 s. [in English]
  10. Tsimmerman R., Gyunter K. Metallurgiya i materialovedeniye: Spravochnik [Metallurgy and Materials Science: A Handbook] - Moskva: “Metallurgiya”, 1982. – 480 s.

**Ж.К. АКАШЕВА<sup>1</sup>, Д.А. БОЛЫСБЕК<sup>2</sup>, Г.И. ИСАЕВ<sup>3</sup>, Б.К. АСИЛБЕКОВ<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>магистр, PhD-докторант Сатбаев Университеті

(Қазақстан, Алматы), Email: [zhibek\\_akasheva@mail.ru](mailto:zhibek_akasheva@mail.ru)

<sup>2</sup>магистр, PhD-докторант НАО «Қазақский национальный университет имени Аль-Фараби»

(Қазақстан, Алматы), Email: [bolysbek.darezhat@gmail.com](mailto:bolysbek.darezhat@gmail.com)

<sup>3</sup>Кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Биология» Международного казахско-турецкого университета имени Х.А. Ясауи,

(Қазақстан, Түркістан), Email: [gani.isayev@ayu.edu.kz](mailto:gani.isayev@ayu.edu.kz)

<sup>4</sup>PhD, заведующий НИЛ «Вычислительное моделирование и информационные технологии» НАО «Қазақский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатбаева»

(Қазақстан, Алматы), Email: [b.assilbekov@satbayev.university](mailto:b.assilbekov@satbayev.university)

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСТВОРЕНИЯ КАРБОНАТНЫХ ОБРАЗЦОВ КИСЛОТНЫМИ РАСТВОРАМИ**

**Аннотация.** В данной работе изучается взаимодействие 8 образцов карбонатного керна (одинакового размера, почти полностью состоящих из кальцита) с растворами, содержащие соляной кислоты с объемными концентрациями 12% и 18% при расходах раствора 1, 2, 4 и 8 мл/мин, соответственно. Во время фильтрационных исследований расход кислотных растворов неравномерно влиял на конечную проницаемость и поровый объем кислотных растворов, требуемых для их прорыва. В случае закачки раствора с концентрацией 12% для прорыва понадобилось в среднем почти на 20% больше кислотного раствора, чем в случае закачки раствора с концентрацией 18%, хотя в обоих случаях закачка осуществлялась при одинаковых расходах. Было установлено, что наибольшие приросты по проницаемости достигаются в основном при высоких расходах раствора. В случае закачки раствора с концентрацией 18% во время фильтрационных исследований для прорыва потребовались практически одинаковые поровые объемы раствора при всех расходах; также при увеличении расхода закачки наблюдался нарастающий прирост проницаемости.

Результаты лабораторных исследований могут быть полезны при проведении обработки призабойных зон скважин и закачке углекислого газа в больших масштабах для приблизительной оценки конечной проницаемости обрабатываемой зоны и необходимых объемов кислотных растворов.

**Ключевые слова:** растворение породы, расход кислотного раствора, минеральный состав, прирост проницаемости, кальцит, соляная кислота, закон Дарси.

**Ж.К. Акашева<sup>1</sup>, Д.Ә. Болысбек<sup>2</sup>, Г.И. Исаев<sup>3</sup>, Б.К. Асилбеков<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>магистр, Сатбаев Университетінің PhD-докторанты,

(Қазақстан, Алматы), Email: [zhibek\\_akasheva@mail.ru](mailto:zhibek_akasheva@mail.ru)

<sup>2</sup>магистр, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің PhD-докторанты,

(Қазақстан, Алматы), Email: [bolysbek.darezhat@gmail.com](mailto:bolysbek.darezhat@gmail.com)

<sup>3</sup>Техника ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті «Биология» кафедрасының меңгерушісі

(Қазақстан, Түркістан), Email: [gani.isayev@ayu.edu.kz](mailto:gani.isayev@ayu.edu.kz)

<sup>4</sup>PhD, Сатбаев Университеті «Есептік модельдеу және ақпараттық технологиялар» ФЗЛ меңгерушісі

(Қазақстан, Алматы), Email: [b.assilbekov@satbayev.university](mailto:b.assilbekov@satbayev.university)

### **Карбонатты үлгілерді қышқылды ерітінділермен ерітуді эксперименталды зерттеу**

**Аңдатпа.** Бұл жұмыста (өлшемдері бірдей дерлік, толығымен дерлік кальциттен тұратын) 8 карбонатты керн үлгілерінің 12% және 18% концентрациялы тұз қышқылы ерітінділерімен оның шығынының 1, 2, 4 және 8 мл/мин мөндерінде әрекеттесуі эксперименталды түрде зерттелді. Фильтрациялық зерттеулер кезінде қышқыл ерітінділерінің шығыны керн үлгілерінің ақырғы өткізгіштігі мен қышқылдың кернді жарып шығуына қажетті көлеміне біртекті әсер етті. 12% концентрациялы ерітіндіні айдау кезінде қышқылдың кернді жарып өтуіне қажетті қышқыл ертіндісінің көлемі 18% концентрациялы ерітіндіні айдауға қарағанда 20%-ға дерлік артық болды, дегенмен екі жағдайда да ерітінді бірдей көлемдік шығында айдалды. Өткізгіштіктің максималды ұлғаюы негізінен ерітіндінің жоғары шығынмен айдау кезінде қол жеткізілетіні анықталды. Фильтрациялық зерттеулер барысында 18% ерітіндіні айдау кезінде барлық шығындар үшін кернді жарып өту үшін бірдей дерлік қышқыл көлемі қажет болды, сонымен қатар қышқыл шығынының артуы өткізгіштіктің сатылап жоғарылауына алып келетіндігі байқалды.

Зертханалық зерттеулердің нәтижелері ұңғы айналасын өңдеуде және көмірқышқыл газын жер қабаттарына айдау кезінде ақырғы өткізгіштіктің мәнін және оған қажетті қышқыл ерітіндісінің көлемін шамалап анықтауда пайдалылуы мүмкін.

**Кілт сөздер:** тау жынысының еруі, қышқылды ерітіндінің шығыны, минералды құрам, өткізгіштіктің артуы, кальцит, тұз қышқылы, Дарси заңы.

**Zh.K. Akasheva<sup>1</sup>, D.A. Bolysbek<sup>2</sup>, G.I. Isaev<sup>3</sup>, B.B. Asilbekov<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>*MSc, PhD-student at Satbayev University*

*(Kazakhstan, Almaty), Email: [zhibek\\_akasheva@mail.ru](mailto:zhibek_akasheva@mail.ru)*

<sup>2</sup>*MSc, PhD-student at Al-Farabi KazNU*

*(Kazakhstan, Almaty), Email: [bolysbek.darezhat@gmail.com](mailto:bolysbek.darezhat@gmail.com)*

<sup>3</sup>*Candidate of technical sciences, head of department of Biology at Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, (Kazakhstan, Almaty), Email: [gani.isayev@ayu.edu.kz](mailto:gani.isayev@ayu.edu.kz)*

<sup>4</sup>*PhD, head of laboratory computational modeling and information technologies at Satbayev University, (Kazakhstan, Almaty), Email: [b.assilbekov@satbayev.university](mailto:b.assilbekov@satbayev.university)*

### **Experimental study of the dissolution of carbonate samples with acid solutions**

**Abstract.** In this paper, we study the interaction of eight carbonate core samples (the same size, almost entirely composed of calcite) with hydrochloric acid solutions with concentrations of 12% and 18% at solution flow rates of 1, 2, 4, and 8 ml/min, respectively. During flooding experiments, the flow rate of acid solutions unevenly affected the final permeability and breakthrough pore volumes. In the case of injection of a 12% HCl solution, an average of almost 20% more acid solution was required for a breakthrough comparing to the injection of a 18% HCl solution, although in both cases the injection was carried out at the same rates. It was found that the largest increases in permeability are achieved mainly at high flow rates of the solution. Speaking of the 18% HCl solution during flooding experiments, almost identical pore volumes of solution were required to breakthrough for all flow rates; also, with an increase in the injection rate, a progressive increase in permeability was observed.

The results of laboratory studies can be useful in the treatment of near wellbore zones and CO<sub>2</sub> sequestration on a large scale for an approximate assessment of the final permeability of the treated zone and the required volumes of acid solutions.

**Keywords:** rock dissolution, solution rate, mineral composition, permeability increase, calcite, hydrochloric acid, Darcy's law.



### **Введение**

Изучение растворения пород, особенно карбонатных пород по сей день является важной темой, т.к. успешность обработки призабойных зон скважины с целью повышения притока актуальным вопросом [1-5]. Кроме этого, в последнее время проблема улавливания и закачка углекислого газа в пласты карбонатных пород приобретает широкую актуальность в снижении выброса парниковых газов в атмосферу в котором также происходит процессы растворения карбонатных породы [6, 7].

В работе [1] было показано, что форма каналов растворения в первую очередь зависит от числа Дамколера при изучении процесса растворения образцов различного минерального состава и видов кислотных растворов. Авторы работ [2] изучили влияние параметров загрязненности пород на оптимальное условие закачки кислотных растворов с помощью численного моделирования и было показано, что с увеличением степени загрязненности пористой среды оптимальное число Дамколера снижается.

В работе [4] экспериментально изучается образования червоточин на гипсовых образцах. Авторы приводит степенную зависимости основных геометрических характеристик, такие как количество, общая площадь поверхности, объем и извилистость червоточин от расхода закачки воды. Показано, что с увеличением расхода воды вышеперечисленные характеристики растёт.

Работа [5] посвящена численному изучению влияния течения жидкостей в пористой среде, не подчиняющийся линейному закону Дарси на образование червоточин на основе закона Дарси-Форхгеймер. Показано, что при высоких расходах закачки растворов наблюдается более разветвленная структура червоточин и потребление большего порового объема закачиваемого раствора для прорыва.

Изменение структуры пористой среды и ее характеристики во время растворения доломитовых образцов при закачке  $\text{CO}_2$  было изучено в работе [6]. Авторы попытались найти закономерность изменения удельной площади поверхности от объема закачанного раствора. Для этого они использовали степенную закономерность и как результат дается изменение степени в зависимости от расхода закачиваемого раствора и извилистости образованных червоточин.

Анализ доступной литературы по тематике показывает, что связь между конечной проницаемостью (а также порового объема раствора) и расхода закачиваемого раствора мало изучена. Поэтому, изучение данного вопроса являлось целью настоящей статьи. Для этого были проведены лабораторные эксперименты на 8 карбонатных образцах диаметром около 3 см и длиной около 5 см, соответственно. Был использован широкий арсенал методов исследования: пробоподготовка, стандартные методы исследования фильтрационно-емкостных свойств, рентгенографический анализ минерального состава и фильтрационные исследования.

### **Материалы и методы исследования**

В целях проведения фильтрационных исследований были отобраны 8 образцов диаметром 3 см и длиной 5 см из керна карбонатного коллектора каменноугольной системы одного из месторождений Республики Татарстан. Данный выбор обусловлен с проведением комплексного исследования на образцах в научно-исследовательской лаборатории Казанского федерального университета. Эксперименты включали сканирование образцов до и после испытания образцов с помощью микрокомпьютерной томографии, что не имеется в Казахстане. Помимо самих образцов для определения минерального состава также были взяты шлейфы в процессе торцевания цилиндрических образцов. Выбуривание осуществлялось на специальном станке, оснащенном держателем керна (рис. 1а).

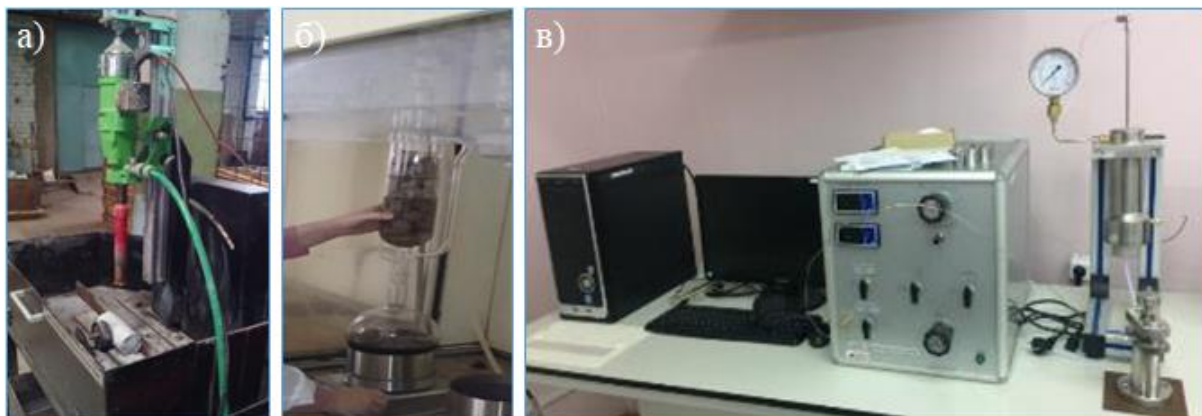


Рисунок 1 – Станок для выбуривания образцов (а), аппарат Сокслета (б) и порозиметр-пермеаметр газовый (в)

Очистка цилиндрических образцов керна от содержащихся в них нефти и битумов производилось в аппаратах Сокслета (рис. 1б) [8]. В качестве растворителей была использована спиртобензольная смесь. После очистки образцы высушивались в сушильном шкафу в течение суток при температуре  $105\pm 2^\circ\text{C}$  [9]. Определение пористости образцов производилось методом насыщения жидкостью. Проницаемость по газу была измерена газового порозиметра-пермеаметра (рис. 1в).

Определение минерального состава образцов проводилось на торцевых цилиндрах образцов методом рентгенографического анализа с использованием дифрактометра Bruker D2 Phaser (рис. 2а). Режимы измерений и регистрации: напряжение рентгеновской трубки – 30 кВ, ток 10 мА, шаг сканирования –  $0,02^\circ$ , скорость сканирования – 1 град/мин.

Проведение рентгенографического анализа включала в себя: а) предварительного осмотра образца; б) откалывание от образца представительной части; в) дробление образца и квартование; г) растирание в агатовой ступке в среде этиленгликоля; д) приготовление неориентированных препаратов методом притирания пасты в специальную кювету; е) рентгенографическая съемка препаратов на рентгеновском дифрактометре; ж) расшифровка данных анализа с использованием программного обеспечения DIFFRACplusEvaluationPackage и з) оформление результатов анализа и их интерпретация.

Количественный анализ образцов выполнялся с использованием программного обеспечения Toras методом полнопрофильного анализа по методу Ритвельда.

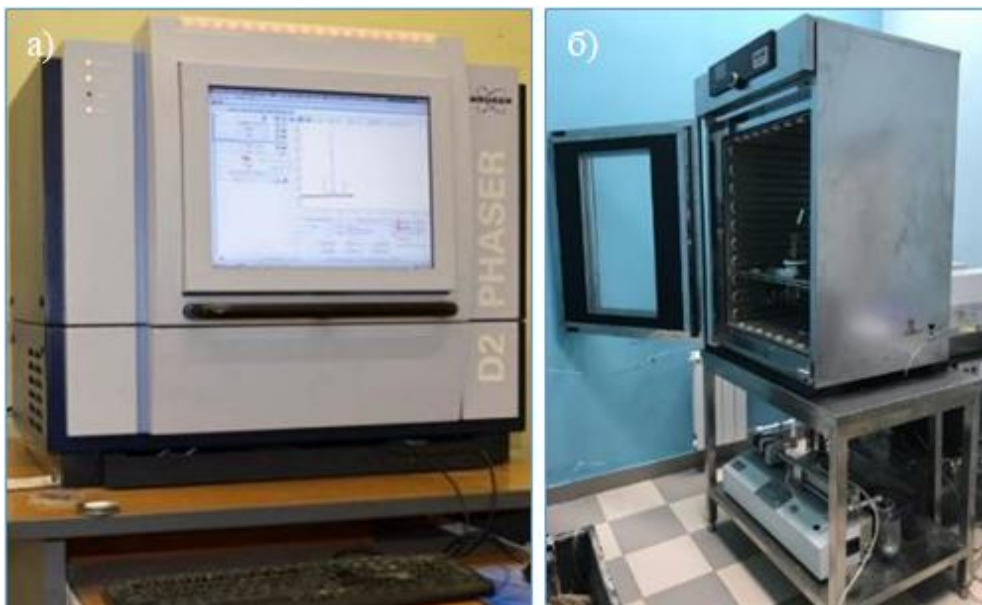


Рисунок 2 – Рентгеновский дифрактометр (а) и установка для исследования пород (б)

### **Методика проведения экспериментов**

Фильтрационные исследования растворов кислот проведены с помощью электронной установки для исследования горных пород Wille Geotechnik Y1000 с возможностью физического моделирования термобарических условий пласта (рис. 2б). Установка позволяет оценивать проницаемости моделей горной породы до и после взаимодействия с концентрированными растворами кислот и имеет следующие технические характеристики: максимальное поровое давление – 20 МПа, максимальное давление гидрообжима – 30 МПа, расходы закачки испытуемого флюида – 0,0001-100 мл/мин, максимальная рабочая температура – 100°C, диаметр образцов керна – 30 мм, 1 дюйм, 1,5 дюйма.

Закачка кислотных растворов проведены на основе методик, описанных в [10, 11] следующим образом:

- контейнеры заправлены испытуемыми флюидами: моделью пластовой воды и растворами кислот;
- образец загружается в резиновую манжету кернодержателя;
- система проверяется на герметичность при создании внутривыводного и гидростатического давления в блоке кернодержателя;
- блок кернодержателя и контейнеры с жидкостями нагреты до температуры 20 °С в термошкафе;
- устанавливается обжимное давление 3,0 МПа;
- образец насыщается моделью пластовой водой и выдерживается 12 часов в предполагаемых термобарических условиях пласта;
- через образец прокачивается модель пластовой водой и не менее чем на трех постоянных скоростях фильтрации производятся замеры перепада давления на торцах модели после их стабилизации;
- через образец прокачивается кислотный состав до момента ее прорыва и падения давления, означающего образование в образце фильтрационного канала;
- через образец снова прокачивается модель пластовой водой и не менее чем на трех постоянных скоростях фильтрации производятся замеры перепада давления на торцах модели после их стабилизации;
- данные эксперимента записываются в базу данных на жесткий диск компьютера;

– после каждого эксперимента давление сбрасывается, образец выгружается из блока кернодержателя, линии отбора-подачи жидкостей промываются.

В качестве модели пластовой воды использовался 2% раствор NaCl. В образцы были закачены кислотные растворы 12 и 18% соляной кислоты с расходами 1, 2, 4 и 8 мл/мин.

Проницаемость образца по воде рассчитывалась по уравнению линейного закона фильтрации Дарси:

$$K = \frac{\mu L Q}{\Delta P S'}$$

где  $K$  – проницаемость ( $\text{м}^2$ ),  $\mu$  – динамическая вязкость нефти при температуре эксперимента ( $\text{Па}\cdot\text{с}$ ),  $L$  – длина образца ( $\text{м}$ ),  $Q$  – объемный расход воды в единицу времени ( $\text{м}^3/\text{с}$ ),  $\Delta P$  – перепад давления на торцах образца ( $\text{Па}$ ),  $S$  – площадь поперечного сечения образца ( $\text{м}^2$ ).

Расчет порового объема кислотного состава до ее прорыва осуществлялся по формуле [10]:

$$PV_{bt} = \frac{V_a}{V_p}$$

где  $V_a$  – объем, прокаченный через образец кислоты до ее прорыва,  $V_p$  – объем эффективной пористости образца.

### **Результаты и их обсуждение**

В ходе стандартных исследований 8 образцов карбонатных пород были определены их открытая пористость и проницаемость по газу, которые представлены в табл. 1.

Определение минерального состава образцов является важным методом оценки количества карбонатных минералов (в основном кальцита и доломита) в составе горной породы, способных взаимодействовать с кислотными составами. Количественный минеральный состав образцов приведены в табл. 2. Результаты анализа показывают, что все изученные образцы практически сложены кальцитом. Лишь в нескольких образцах обнаружена небольшая доля кварца, не превышающая 1%.

Таким образом, все изученные образцы являются в высокой степени однородными по составу, что исключает влияние этого параметра при сравнении эффективностей взаимодействия образцов с кислотными составами.

Таблица 1 – Фильтрационно-емкостные свойства образцов

Номер образца	18	9	13	7	12	10	11	2
Длина, см	5,02	5,02	5,03	5,01	5,03	5,02	5,01	5,02
Диаметр, см	2,99	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,98	2,97
Пористость, %	11,16	20,67	20,04	20,92	18,34	19,02	19,58	20,62
Начальная проницаемость, мД	154	135	456	721	202	290	395	435
Расход раствора, мл/мин	1	2	4	8	1	2	4	8

Лабораторные тесты по линейной фильтрации кислотных растворов через образцы керна в контролируемых условиях являются основой понимания механизмов образования и роста червоточин, обеспечивающих наибольший приток флюидов из пласта. Результаты закачки кислотных растворов в 8 карбонатные образцы представлены на рис. 3-4.

Таблица 2 – Минеральный состав образцов, %

Номер образца	18	9	13	7	12	10	11	2
Кальцит, %	100	100	100	99	100	99	99	100
Доломит, %	-	-	-	-	-	-	-	-
Кварц, %	-	-	-	1	-	1	-	-

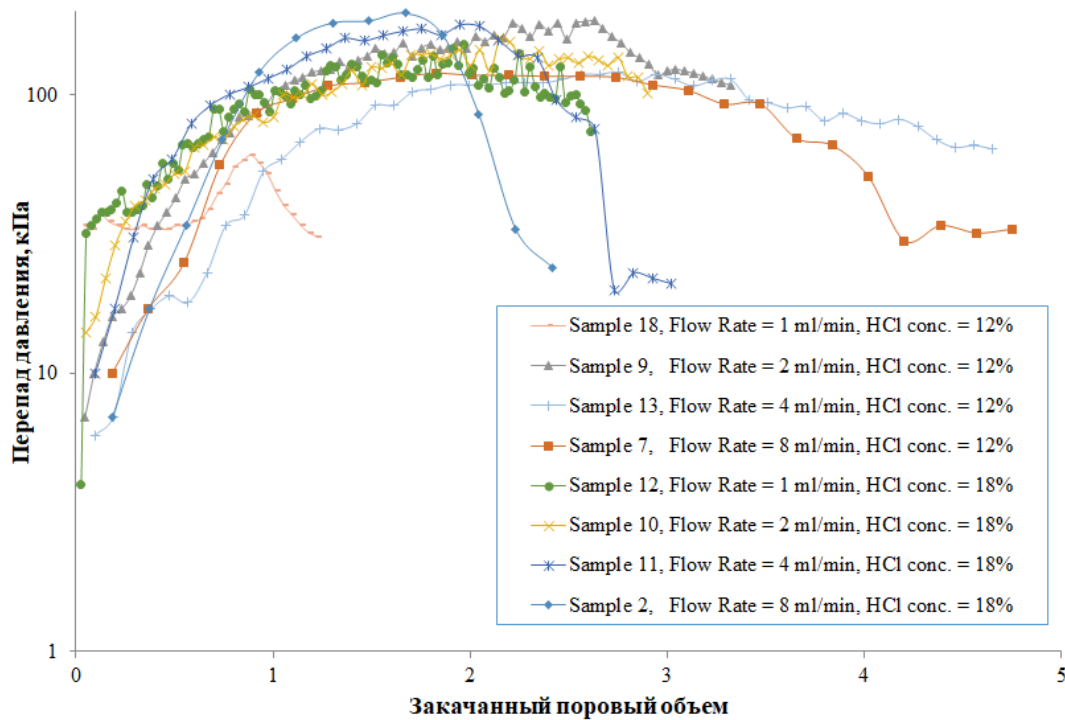


Рисунок 3 – Изменение перепада давления от прокаченного порового объема кислотных растворов

Индикаторная кривая, показывающая прорыв кислотного раствора для каждого образца показана на рис. 3. Самый быстрый и поздний прорывы произошли в 18 и 13 образцах при концентрации соляной кислоты 12% в общем растворе, у которых начальная проницаемость 154 и 459 мД, соответственно. Также можно заметить, что в случае закачки 18% раствора (образцы 12, 10, 11 и 2) прорыв происходит относительно быстрее чем в случае закачки 12% раствора (образцы 18, 9, 13 и 7) для всех значений расхода (см. табл. 1, рис. 4). Это показывает степень влияния концентрации соляной кислоты в общем растворе на процесс взаимодействия кислоты с карбонатной породой.

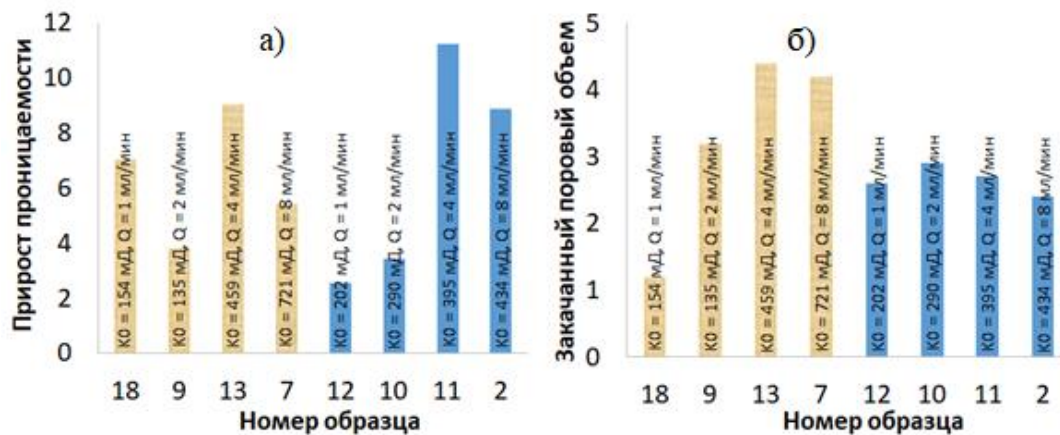


Рисунок 4 – Прирост проницаемости (а) и прокаченный поровый объем кислотных растворов (б) для каждого образца

Важным показателем при закачке кислотных растворов в карбонатные породы является увеличение абсолютной проницаемости обрабатываемой породы за счет растворения и какой объем кислоты потребуется для достижения данного прироста (рис. 4а и 4б). Из рис. 4а) видим, что отмечается существенное увеличение проницаемости образцов после закачки кислотного раствора от 4 до 11 раз в зависимости от расхода кислотных растворов. Наибольшие приросты (от 7 до 11 раз) наблюдается в обоих случаях закачки кислотного раствора, но при разных расходах. Например, если в случае 12% раствора наибольшие приросты получаются при расходах 1 и 4 мл/мин, то в случае 18% раствора это достигается при высоких расходах (т.е. при 4 и 8 мл/мин). Хотя практически одинаковый поровый объем кислотного раствора был закачан для всех расходов (рис. 4б) это привело к неравномерному, причем нарастающему приросту проницаемости образцов (синие столбцы на рис. 4а). Наоборот, при нарастающем поровом объеме кислотного раствора закачки 12% раствора наблюдается неравномерный прирост проницаемости. Все это указывает на то, что процесс растворения породы является комплексным и на его результат влияет совокупный фактор, такие как расход закачки, концентрация реагента в общем растворе, минеральный состав породы и т.д.

### Заклучение

В ходе проведенных исследований изучено взаимодействие карбонатных образцов с соответствующими кислотными растворами HCl. По результатам определения минерального состава все изученные карбонатные образцы на 99-100% сложены кальцитом. Результаты лабораторных тестов на образцах позволили выявить особенности влияния кислотных составов и параметров фильтрации на растворение карбонатных пород. Было наблюено неравномерное влияние расхода кислотных растворов на конечную проницаемость и поровый объем кислотных растворов, требуемых для прорыва. В случае закачки 12% раствора прорыв происходит быстрее чем в случае закачки 18% раствора в среднем почти на 20% хотя в обоих случаях расходы одинаковые. Наибольшие приросты в проницаемости достигается в основном при высоких расходах растворов. В случае закачки 18% раствора во всех опытах для прорыва понадобились практически одинаковые поровые объемы раствора хотя это привело к существенному приросту проницаемости с увеличением расхода закачки.

**Благодарность.** Данное исследование было проведено при поддержке Комитета Науки Министерства образования и науки Республики Казахстан в рамках проектов AP08052055 и AP09058419.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Christopher N. Fredd and H. Scott Fogler. Influence of Transport and Reaction on Wormhole Formation in Porous Media. *AIChE Journal*. Vol. 44, No. 9. 1998.
2. Turegeldieva K.A., Zhabbasbayev U.K., Assilbekov B.K., Zolotukhin A.B. (2016) Matrix acidizing modeling of near-wellbore with reduced reservoir properties (part 2), *Neftyanoe Khozyaystvo - Oil Industry*, 4: 108-110.
3. Colón C.F.J., Oelkers E.H., Schott J. (2004) Experimental investigation of the effect of dissolution on sandstone permeability, porosity, and reactive surface area, *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 68 (4):805-817. DOI: 10.1016/j.gca.2003.06.002.
4. Li, W., Einstein, H. H., & Germaine, J. T. (2019). An Experimental Study of Matrix Dissolution and Wormhole Formation Using Gypsum Core Flood Tests: 1. Permeability Evolution and Wormhole Geometry Analysis. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 124. <https://doi.org/10.1029/2018JB017238>.
5. Piyang Liu, Xiaoxia Ren, Liang Kong, Jun Yao. Three-dimensional simulation of acidizing process in carbonate rocks using the Darcy–Forchheimer framework. *Oil & Gas Science and Technology – Revue d'IFP Energies nouvelles*, Institut Français du Pétrole, 2020, 75, pp.48. 10.2516/ogst/2020035. hal-02899135.
6. Luhmann, Andrew J., Kong, Xiang-Zhao, Tutolo, Benjamin M., Garapati, Nagasree, Bagley, Brian C., Saar, Martin O., Seyfried Jr., William E., Experimental dissolution of dolomite by CO<sub>2</sub>-charged brine at 100°C and 150 bar: Evolution of porosity, permeability, and reactive surface area, *Chemical Geology* (2014), doi: 10.1016/j.chemgeo.2014.05.001.
7. Molins, S., D. Trebotich, G. H. Miller, and C. I. Steefel (2017), Mineralogical and transport controls on the evolution of porous media texture using direct numerical simulation, *Water Resour. Res.*, 53, 3645–3661, doi:10.1002/2016WR020323.
8. Иванов М. К. [и др.]. Петрофизические методы исследования керна / М. К. Иванов, Ю. К. Бурлин, Г. А. Калмыков, Е. Е. Карнюшина, Н. И. Коробова, Издательство Московского университета, 2008.
9. Петерсилье В. И., Проскурина В. И., Яценко Г. Г. Методические рекомендации по подсчету геологических запасов нефти и газа объемным методом / В. И. Петерсилье, В. И. Проскурина, Г. Г. Яценко, Москва-Тверь: ВНИГНИ, НПЦ «Тверьгеофизика», 2003.
10. Glasbergen G., Kalia N., Talbot M. The optimum injection rate for wormhole propagation: Myth or reality? 2009.
11. Антонов С. М. Взаимодействие вязких растворов HCl в карбонатных породах и их фильтрация в модели пласта / С. М. Антонов, Екатеринбург: : дис. ... канд. хим. наук: 02.00.04 / Тюменский государственный университет, 2017. 148 с.

## REFERENCES

1. Christopher N. Fredd and H. Scott Fogler. Influence of Transport and Reaction on Wormhole Formation in Porous Media. *AIChE Journal*. Vol. 44, No. 9. 1998.
2. Turegeldieva K.A., Zhabbasbayev U.K., Assilbekov B.K., Zolotukhin A.B. (2016) Matrix acidizing modeling of near-wellbore with reduced reservoir properties (part 2), *Neftyanoe Khozyaystvo - Oil Industry*, 4: 108-110.
3. Colón C.F.J., Oelkers E.H., Schott J. (2004) Experimental investigation of the effect of dissolution on sandstone permeability, porosity, and reactive surface area, *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 68 (4):805-817. DOI: 10.1016/j.gca.2003.06.002.
4. Li, W., Einstein, H. H., & Germaine, J. T. (2019). An Experimental Study of Matrix Dissolution and Wormhole Formation Using Gypsum Core Flood Tests: 1. Permeability Evolution

and Wormhole Geometry Analysis. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 124. <https://doi.org/10.1029/2018JB017238>.

5. Piyang Liu, Xiaoxia Ren, Liang Kong, Jun Yao. Three-dimensional simulation of acidizing process in carbonate rocks using the Darcy–Forchheimer framework. Oil & Gas Science and Technology – Revue d’IFP Energies nouvelles, Institut Français du Pétrole, 2020, 75, pp.48. 10.2516/ogst/2020035. hal-02899135.

6. Luhmann, Andrew J., Kong, Xiang-Zhao, Tutolo, Benjamin M., Garapati, Nagasree, Bagley, Brian C., Saar, Martin O., Seyfried Jr., William E., Experimental dissolution of dolomite by CO<sub>2</sub>-charged brine at 100°C and 150 bar: Evolution of porosity, permeability, and reactive surface area, Chemical Geology (2014), doi: 10.1016/j.chemgeo.2014.05.001.

7. Molins, S., D. Trebotich, G. H. Miller, and C. I. Steefel (2017), Mineralogical and transport controls on the evolution of porous media texture using direct numerical simulation, Water Resour. Res., 53, 3645–3661, doi:10.1002/2016WR020323.

8. Ivanov M. K [i dr.]. Petrofizicheskie metody issledovaniya kernovogo materiala. [Petrophysical methods of core material research] / M. K. Ivanov, Ю. К. Burlin, G. A. Kalmykov, E. E. Kornushina, N. I. Korobova, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 2008.

9. Petersilie V. I., Proskutina V. I., Yatsenko G. G. Metodicheskie rekomendatsii po podschetu geologicheskikh zasapov nefti i gaza obimnym metodom [Methodological recommendations for calculating geological reserves of oil and gas by the volumetric method] / V. I. Petersilie, V. I. Proskurina, G. G. Yatsenko, Moskva-Tver': VNIGNI, NPTC «Tver'geofizika», 2003.

10. Glasbergen G., Kalia N., Talbot M. The optimum injection rate for wormhole propagation: Myth or reality? 2009.

11. Antonov S. M. Vzaimodeistvie viazkih rastvorov HCl v korbanatnyh porodah i ih fil'traciya v modeli plasta [Interaction of viscous HCl solutions in carbonate rocks and their filtration in the reservoir model] / S. M. Antonov, Ekaterinburg: dis. ... kand. him. nauk: 02.00.04 / Tiumenskii gosudarstvennyi universitet, 2017. 148 p.



**А.Т. ПАЗЫЛ<sup>1</sup>, Н.А. ШЕКТИБАЕВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты

(Қазақстан, Түркістан), E-mail: [akerke.pazil@mail.ru](mailto:akerke.pazil@mail.ru)

<sup>2</sup>PhD, аға оқытушы

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан), E-mail: [nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz](mailto:nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz)

### « $\gamma - Mn - Cu$ ҚОРЫТПАЛАР ЖҮЙЕСІНІҢ ГЕТЕРОГЕНДІК ҚҰРЫЛЫМЫНЫҢ ФИЗИКА - МЕХАНИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН ЗЕРТТЕУ»

**Аңдатпа.** Адамзатты өндірістегі еңбектен босатып, технологиялық процестерді, механизмдерді машиналарды басқаруды автоматтандыратын, машина өндірісінің жаңа түрі – автоматтандыру заманы келді. Автоматтандыру кез-келген өндірістің тиімділігін арттырып қана қоймай үздік нәтижеге жетуге жол ашады.

Бұл мақалада  $\gamma - Mn - Cu$  қорытпалар жүйесінің гетерогендік құрылымының физика - механикалық қасиеттері қарастырылған.

Технологиялық үдерістерді автоматтандырылғанына, механикаландырылғанына немесе өңдеудің топтық әдісін қолданылатынына қарамастан, автоматтандырылған тораптарды баптау әрекеттері еңбекті көп қажетсінетін жұмыс болып қала береді және қол еңбегін пайдалану арқылы орындалады. Электр техникалық материалдар түрлерін, олардың қасиеттерін қарастыра отырып, олардың тиімді жақтарын ашып, өндіріс орындарында қолданамыз. Техникада түсті металдардың маңызы зор. Себебі олардың физикалық – механикалық қасиеттеріне қарай оларға сұраныс бар.

Ғылыми зерттеулерді жүргізу кезде база ретінде Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің физика кафедрасында жүргізілді. Ғылыми әдіс ретінде қорытпаларды қыздыру, балқыту, өңдеу, бағалау, талдау әдісі қолданылды.

Тәжірибелік зерттеулер 45-85 пайыз марганеці бар мыс қорытпаларына әртүрлі элементтермен легіріленген 50 және 60 пайыздық қорытпаларына және олардың 10ға дейінгі концентрациядағы комбинацияға жүргізілді. Жоғары дәлдікті алу үшін қайта-қайта өлшеулер жасалды. Металл материалдардағы экстремалды сыртқы әсерлер (күшті пластикалық деформация, жоғары қысым, температура, радиация, агрессивті орта) кезіндегі құрылымдық және фазалық өзгерістер зерттелді. Металл материалдардағы экстремалды сыртқы әсерлер (күшті пластикалық деформация, жоғары қысым, температура, радиация, агрессивті орта) кезіндегі құрылымдық және фазалық өзгерістер зерттелді.

**Кілт сөздер:** қыздыру, балқыту, марганец, мыс, қорытпа, концентрация, комбинация, легіріленген.

**A.T. Pazil<sup>1</sup>, N.A. Shektibaev<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Master's student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University

(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: [akerke.pazil@mail.ru](mailto:akerke.pazil@mail.ru)

<sup>2</sup>PhD, senior lecturer

Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University

(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: [nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz](mailto:nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz)

**Investigation of the physical and mechanical properties of the heterogeneous structure of the  
 $\gamma - Mn - Cu$  alloy system**

**Abstract.** The era of automation has come, a new type of machine production that frees people from work in production and automates technological processes, mechanisms and machine control. Automation not only increases the efficiency of any production, but also opens the way to achieve the best results.

This article deals with the physical and mechanical properties of the heterogeneous structure of the mortar system.

Regardless of whether technological processes are automated, mechanized, or group processing is used, automated site tuning activities remain labor-intensive and performed using manual labor. Considering the types of electrical technical materials, their properties, we reveal their advantages and use them in production facilities. Non-ferrous metals are very important in technology. Because there is a demand for them based on their physical and mechanical properties.

Scientific research was conducted at the Department of Physics of the International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmet Yasawi as a base. The method of heating, melting, processing, evaluation and analysis of alloys was used as a scientific method.

Experimental studies were carried out on copper alloys with 45-85% manganese, 50 and 60% alloys doped with various elements and their combination in concentrations up to 10. Repeated measurements were made to obtain high accuracy. Structural and phase changes in metallic materials during extreme external effects (strong plastic deformation, high pressure, temperature, radiation, aggressive environment) were studied. We studied structural and phase changes in metallic materials during extreme external influences (strong plastic deformation, high pressure, temperature, radiation, aggressive environment).

**Keywords:** heating, smelting, manganese, copper, alloy, concentration, combination, alloyed.

**А.Т. Пазыл<sup>1</sup>, Н.А. Шектибаев<sup>2</sup>**

*<sup>1</sup>Магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясауи*

*(Казахстан, Туркестан), E-mail: [akerke.pazil@mail.ru](mailto:akerke.pazil@mail.ru)*

*<sup>2</sup>PhD, старший преподаватель*

*Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясауи*

*(Казахстан, Туркестан), E-mail: [nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz](mailto:nurdaulet.shektibaev@ayu.edu.kz)*

### **Исследование физико-механических свойств гетерогенной структуры системы $\gamma - Mn - Cu$ - сплавов»**

**Аннотация.** Наступила эпоха автоматизации, нового вида машинного производства, освобождающего людей от труда на производстве и автоматизирующего технологические процессы, механизмы и управление машинами. Автоматизация не только повышает эффективность любого производства, но и открывает путь к достижению наилучших результатов.

В данной статье рассматриваются физико-механические свойства неоднородной структуры растворной системы.

Независимо от того, автоматизированы ли технологические процессы, механизированы или используется групповая обработка, автоматизированные мероприятия по настройке площадки остаются трудоемкими и выполняются с использованием ручного труда. Рассматривая виды электротехнических материалов, их свойства, выявляем их преимущества и используем в производственных объектах. Цветные металлы очень важны в технике. Потому что на них есть спрос, исходя из их физико-механических свойств.

Научные исследования проводились на базе физического факультета Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмета Ясауи. В качестве научного метода

использовался метод нагрева, плавления, обработки, оценки и анализа сплавов.

Экспериментальные исследования проводились на сплавах меди с 45-85 % марганца, 50 и 60 % сплавов, легированных различными элементами и их сочетаниями в концентрациях до 10. Для получения высокой точности проводились повторные измерения. Исследованы структурно-фазовые изменения в металлических материалах при экстремальных внешних воздействиях (сильная пластическая деформация, высокое давление, температура, радиация, агрессивная среда). Исследованы структурные и фазовые изменения в металлических материалах при экстремальных внешних воздействиях (сильная пластическая деформация, высокое давление, температура, радиация, агрессивная среда).

**Ключевые слова:** нагрев, плавка, марганец, медь, сплав, концентрация, сочетание, легированный.

### **Кіріспе**

Термосерпимді мартенситтік түрленуі бар қорытпалардың ішінде марганец мөлшері жоғары Mn-Cu жүйесінің қорытпалары ерекше орын алады. Бұл қорытпалар жүйесі ұзақ уақыт бойы зерттеушілердің назарын аударып келеді, себебі оларда жоғары демпферлік қабілеттің өте сирек үйлесімі және физикалық және механикалық қасиеттердің жақсы үйлесімі бар. Mn-Cu жүйесінің қорытпаларында термосерпимділік белгілері бар мартенситті түрлендірумен бірге жүреді. Өртүрлі типтегі фазалық ауысулардың мұндай үйлесуі фазалық түрлендірулердің өз механизмінде және кинетикасында да, функционалдық қасиеттердің көрінісінде де жаңа сапалық белгілерге әкеліп соғады, бұл сөзсіз үлкен ғылыми және практикалық қызығушылық тудырады. Осы орайда шет ел ғалымдары К.Сугимотоның еңбектерінің арқасында Е.З. Винтайкина, В.А. Удовенко бұл қорытпалардың құрылымының қалыптасуы туралы көптеген материалдар жинақтап үлгерді, бірақ қазіргі уақытта марганец-мыс қорытпаларында магниттік құрылымдық ауысу туралы нақты түсінік жоқ. Бұл Mn-Cu қорытпаларын жаңа перспективті функционалдық қорытпалар ретінде толық пайдалануға мүмкіндік бермейді. Бұл менің осы мақалаға тақырып ретінде таңдауымның басты себебі Mn-Cu қорытпаларын жаңа перспективалық материалдар ретінде қолдану оларда болып жатқан фазалық және құрылымдық өзгерістерді егжей-тегжейлі зерттеу және олардың физикалық табиғатын анықтау нәтижесінде ғана мүмкін болады. Бұл құрылымдық және физикалық талдаудың заманауи әдістерін тарту және дамыту арқылы жүйелі зерттеулерді қажет етеді. Бұл жағдайда мартенситті даму процесінде тікелей құрылымдық өзгерістердің кинетикасын қадағалауға мүмкіндік беретін әдістер, ең алдымен механикалық спектроскопия әдістері маңызды болып табылады. Серпимсіз эсерлердің жоғары сезімталдығы мен таңдамалылығына байланысты олардың кең ақпараттық мүмкіндіктері фазалық түрлену механизмдерін зерттеуде сәтті қолданудың кілті болып табылады. Ішкі үйкеліс әдісін қолданудың негізі шетелдік және отандық авторлардың (В.С.Постников, Дж.Делорме, В.Н.Белько) еңбектерінде жасалған фазалық серпимсіздік теориясы болып табылады. Ең өзекті мәселелердің қатарында энергия шашырауының температуралық, амплитудалық спектрлерін талдау, олардың пайда болуына әртүрлі механизмдердің үлесін анықтау және мартенситтік түрлену кезінде серпимсіздіктің көріну заңдылықтарын ашу мәселесі қалып отыр. Соңғысын түсіндіру үшін бірқатар модельдер ұсынылды (Дж.Делорм, Г.Гремо, Ю.Н. Ванг, В.Деджонге), алайда олардың ешқайсысын әмбебап деп санауға болмайды, өйткені ол бір немесе екі қорытпада сыналған. Бұл үлгілерді сынау үшін зерттелетін материалдардың ауқымын кеңейту қажет. Бұл жаңа эксперименттік мәліметтерді жинақтауды ғана емес, сонымен қатар процестерге қатысатын механизмдерді теориялық талдауды қажет етеді [1].

Фазалық ауысу аймағындағы Mn-Cu жүйесінің қорытпалары серпимсіз және серпимді қасиеттердің аномальді жағынан сипатталады. Марганец-мыс қорытпаларындағы көптеген зерттеулерге қарамастан, әдебиеттерде бұл аномалияларды толық ешкім зерттеген жоқ, ұсынылған жұмыстардың көпшілігі нақты мәселелермен айналысады. Бұл құбылыстар

олардың модельдік бейнелерге сәйкестігі тұрғысынан талданбаған. Сонымен қатар, Mn-Cu жүйесінің қорытпаларындағы серпімді және серпімсіз әсерлерді түсіндірудің әзірленген тәсілдерін қолдану жаңа эксперимент нәтижелерінің модельдік тұжырымдамаларға сәйкестігін тексеруге ғана емес, сонымен қатар табиғаты және табиғаты туралы құнды ақпарат алуға мүмкіндік береді [2].

Жұмыстың мақсаты Mn-Cu жүйесінің жоғары марганецті қорытпаларының физика-механикалық қасиеттерін қалыптастыру және магниттік құрылымдық түрлендіру дамуының негізгі заңдылықтарын белгілеу болды. Алынған нәтижелермен төменде көрсетілді

- Mn-Cu жүйесінің жоғары марганецті қорытпаларындағы магниттік құрылымдық түрленудің табиғаты мен параметрлерін зерттеу үшін серпімді және серпімсіз әсерлердің кешенді талдауын қолдану мүмкіндігі расталды

- VT фаза максимумына сыртқы факторлардың әсерін талдау негізінде оның түзілуі термосерпімді мартенситтік трансформацияға байланысты екендігі көрсетілді

- тікелей мартенситті түрлендіруді жүзеге асыру кезінде магниттік компоненттің мартенситке дейінгі серпімді және серпімсіз әсерлерге қосқан үлесі анықталды;

- никельмен және хроммен легирлеу кезінде Mn80-Cu20 қорытпасында мартенситті түрлендірудің параметрлері мен түрінің өзгеруі анықталды;

- Mn-Cu жүйесінің қорытпаларындағы түзілу механизмінің өзгеруіне сәйкес келетін алдын ала ығысу критикалық деформациясының мәні анықталды [3].

Қазіргі жағдайдағы ғылым-техникалық прогресстің негізі ретінде жаңа перспективті материалдарды жетілдіру мен өндіріске ендіру болып табылады. Осы жолда негізгі үш бағытты таңдап алуымыз керек.

- Белгілі алапта эффективті қолданыстағы, традициялық материалдарды жетілдіру. Бұл бағытқа конструкциялық және инструментальдық болаттардың қасиеттерін жақсарту, магниттік жазбалардың тығыздығын арттыру үшін магнитке қатты материалдар қасиетін комплексті түрде оптимизациялау, жартылай өткізгіштік кремний материалдарынан жасалатын құралдардың көлемін кішірейту технологиясын одан ары дамыту т.т.

- Қазіргі кезде қолданыстағы материалдардың орнын алмастыратын традициялық емес материалдарды жасау. Мысалы ретінде конструкциялық материалдар ретінде қолданыстағы пластикалық және керамикалық материалдар, резистивті және магнитке жұмсақ материал ретінде аморфты қорытпаларды қолдану, техниканың әртүрлі алабында композициялық материалды ендіру .

- Қолданыстағыдан негізінде өзгеше техникалық тоқтам үшін, сапа жағынан жаңа бұрын соңды болмаған материалдарды жасап шығару. Мысал үшін электрлік және магниттік жүйедегі жаңа буын ойлап табу үшін жоғары температурадағы асқан өткізгіштікті қолдану, оптикалық компьютер үшін микрондық жартылай өткізгіштік лазерлер жасау тағы да басқа көптеген жаңа техниканың жетістігін пайдалану [4].

### **Әдістемелік бөлім**

Зерттеу жұмысының нысаны ретінде гетерогенді Mn-Cu қорытпалары таңдалынып алынды. Зерттеу жұмысы Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық Қазақ-Түрік университетінің Физика кафедрасы зертханасында жасалды.

Ғылыми әдіс ретінде қорытпаларды қыздыру, балқыту, өңдеу, бағалау, талдау әдісі қолданылды.

Mn85-Cu45 жүйесінің қорытпалары термиялық өңдеуден кейін кең температура диапазонында (-100 + 300 °C) жоғары диссипативті қасиеттерді көрсетеді (макс 80-10<sup>4</sup>h-100-10<sup>4</sup> кезінде  $y = 3,5 \cdot 10^{-4}$ ). Mn-Cu жүйесінің ескірген қорытпаларындағы энергияның шығындалу деңгейі релаксацияның және фазалық табиғаттың ішкі үйкеліс максимумдарының суперпозициясына байланысты А<sup>^</sup> нүктесінде табылып, реакцияға түседі. Қорытпаның құрамы және термиялық өңдеу режимі бойынша өзгеріп, төмен

температуралар жағынан - жиілікке байланысты жоғарылады. Мартенситтік фазадағы энергияның шығындалу механизмі белгіленді: деформация амплитудаларының диапазонында энергия диссипациясы дислокациялар мен әлсіз түйреуіш ақауларының өзара әрекеттесуіне байланысты 0,0067 есе жоғары мәнге өзгеріске ұшырады.

Mn-Cu жүйесінің қорытпалары ТAF нүктесінен жоғары температура диапазонында магниттік емес табиғаттың элинварлық қасиеттерін көрсетеді. Барлық зерттелген Mn-Cu қорытпаларындағы элинвариат интервалының ұзындығы 230-260 °C тең. Бұл аралықтағы серпімділік модулінің температуралық коэффициенті 7,3 0 °C көрсетті. Элинвариаттық интервалдың температуралық жағдайы термиялық өңдеу режимімен бақыланды. Mn-Cu жүйесінің қорытпаларындағы пішінді есте сақтау әсерінің параметрлері анықталды. Легірлеудің ШОБ сипаттамаларына елеусіз әсер етуі барлық зерттелетін қорытпалардағы пішінді өзгерту механизмдерінің ортақтығын көрсетеді. Mn-Cu жүйесінің зерттелген қорытпаларының түзілуіне сырғанау деформациясының елеулі үлесі анықталды және деформация механизмінің өзгеруіне және қалпына келмеген деформацияның жинақталуының басталуына сәйкес алдын ала деформацияның  $\nu_{k1}$  сыни дәрежелері анықталды [5].

Жұмыста зерттелген Mn-Cu негізіндегі қорытпалар жүйесінің тізімі 1 – кестеде берілген.

Алдын ала рафиндалған марганец пен электролитикалық мыстарды ашық индукциядағы пештегі криолит шылағының астында қос элемент қорытпасы қорытылып слиткаға құйылды. Осы айтылған әдіс бойынша қорытпаны алу құрамы есептелініп алынған қорытпалардың құрамына жақын болады, бұл жағдайда мәжбүрліктен енген C, S, P қоспалар үлесінің әрқайсысы 0,01-0,03% дан аспайды.

Кесте 1. Зерттелінген Mn-Cu негізіндегі қорытпалар жүйесінің құрамы

№ пп	Қорытпаның шартты белгісі	Марганец, %	Мыс, %
1	25Г75Д	25	75
2	30Г70Д	30	70
3	35Г65Д	35	65
4	40Г60Д	40	60
5	45Г55Д	45	55
6	55Г45Д	55	45
7	60Г40Д	60	40
8	65Г35Д	65	35
9	70Г30Д	70	30
10	75Г25Д	75	25
11	80Г20Д	80	20
12	85Г15Д	85	15

Тазалатылған құймалар сутунка мен прутокқа прокатталды. Сутунканы қыздырып, қызған прокатка әдісімен (700-8500С) қалыңдығы 6 мм болатын жалпақ материал алынды. Mn-Cu құйылған қорытпа дендритті ликвацияға бейім келеді. Ол дендритті ликвациядан құтылудың бірден бір жолы қорытпаны гомогендік қыздырудан өткізу керек. Гомогендік қыздыру температурасы фазалық диаграмманың жоғары температуралық  $\gamma$ - алабының жоғарғы шекарасына келуі керек, ал оның уақыты 20 сағаттан кем болмауы керек. Бұл [6] жұмыстардың мәліметі бойынша осы температура мен уақыттардағы гомогендей құрамы бойынша теңестіруге алып келеді және құрылымның ақауын «емдейді», бұл өз кезегінде  $\alpha$  – марганецтің бөлініп шығуына кедергі жасайды [7].

Қорытпалардың құрамы химиялық анализ бойынша балқытуға берілген тапсырысқа сәйкес келеді. Алынған құймалар құрамы бойынша мүмкіндігінше біркелкі болған, ол мәнге құйманың әртүрлі жерінен алынған қорытпа торының периодының мәліметінен білуге болады. Текстураға байланысты үлгінің бағытталған кесіндісін гониометрикалық ұстағышы бар электроискралық қондырғыда алынды.

Барлық қорытпаларды алар алдында олардың құрамын, түрлі механикалық, термомеханикалық және термиялық әсерлердің барысында қорытпаларда тек  $\gamma$  – фаза қалыптасуы, яғни барлық технологиялық өзгерістерде ешқандай  $\alpha$  – фазаға өзгермейтіндей, барлық өзгерістер  $\gamma$  – фазаның төңірегінде өтуі қажет.

Қорытпа кристалының микроқұрылымын зерттеу әдісі:

Қарастырылып отырған жоғарғы демпферлік қасиеті бар қорытпалардың кристалдық және магниттік құрылымын кристалқұрылымдық анализді тікелей, нейтронографиялық, рентгенографиялық әдістермен зерттеп қорытпа құрылымдары туралы мәліметтерді алып, электронмикроскопиялық зерттеу толық қарастырылмаған. Сол бағытта жұмыс істеу үшін, қойылған мақсатымызға жету үшін микроструктуралық зерттеулерді электрондық микроскопта жүргізу керек. Сонымен қатар нейтронографиялық зерттеуде бірқатар кемшіліктер болады, ол ең алдымен, спектр интенсивтілігінің анықтау қасиетінің төмендігі, мен алғашқы нейтрон шоқтарының интенсивтілігінің аздығы болып келеді. Оның үстіне фазалық құрамы мен жұқа кристалдық құрылымын әдеттегіше рентгенографиялық әдісті қолданады [8].

Осының бәрі жоғары демпферлік қасиеті бар қорытпалардың құрылымының қалыптасуы мен демпферлік қасиетінің арасындағы байланысты көрсетіп бере алмайды. Осы сияқты мақсатқа жету жолындағы мәселені шешу үшін, яғни демпферлік қорытпалардың проблемаларын шешу барысында мартенсит фазасының морфологиясын зерттеу керек, сонымен қатар деформацияға түскен құрылымның ерекшеліктерін зерттеу жарық өтетін электронды микроскопты қолдану әдісін пайдалануды қажет етеді. Бұл әдіс материалдың құрылымын көрнекі етіп демпферлік механизмді түсіндіруге тиынақты қорытынды жасап өз үлесін қосады.

Электронномикроскопиялық зерттеу әдісі:

Қорытпалардың жұқа микроқұрылымдарын зерттеу, сонымен қатар қорытпалардағы түрлі деформациялық, термомеханикалық және термиялық сыртқы, ішкі әсерлердің қорытпа қасиеттеріне тигізетін өзгерістерін жарықты өткізетін (просвечивающей) үдеткіш кернеуі 120 кВ болатын Tesla BS – 540 электронды микроскоппен жүргізілді. Бұл жерде жарық өріс пен қараңғылау өрістер әдісін қолданып (әртүрлі рефлексте оның ішінде қосарланатын) көрініс пайдаланылды.

Электронномикроскопиялық зерттеу үшін электроискралық қондырғыда қалыңдығы 0,2 миллиметр болатын жұқа фальга дайындап кесілді, ол фальга алдымен 0,1 миллиметрге дейін наждақ қағазында шлифовка жасалды. Түбегейлі жұқартуды ( $\text{H}_3\text{PO}_4 + \text{Cr}_2\text{O}_3$ ) «қара элоктролитте» электролиттік әдіспен 15 милливольт кернеуде жұқа бөліктері көрінгенше (50-150 нанометр қалыңдыққа дейін), электрон шоқтары оңай өтетіндей етіп жасалды.

Демпферлік қасиетті өлшеу әдісі:

Қорытпалардың демпферлік қасиетін зерттеу, олардың тербелістерінің логарифмдік декрементін өлшей арқылы орындалады. Ол, тербелістің логарифмдік декременті кері иілетін маятник тәрізді өлшегіш қондырғыда орындалады. 1 - суретте көрсетілген.

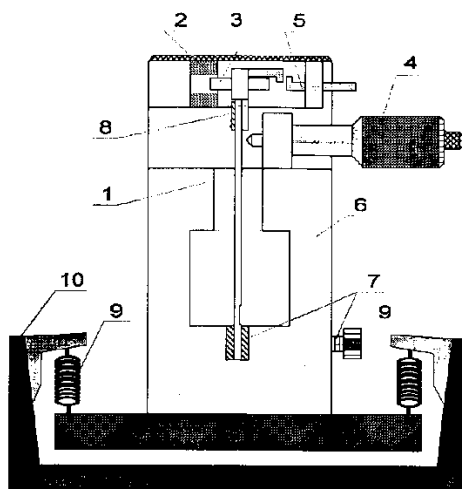
Жұмыс бөлігінің алабында көп есе кішірейтілген инерция моментінің кескіні бар сыналған материал үлгісі (1) өте берік магнитті емес болаттан жасалған (7) үлгі бекітуші арқылы салмақты плита негізіне (6) серпімді ілулі элементке (9) қатаң бекітілген. Үлгінің екінші ұшына магнит емес материал (8) арқылы тұрақты магнит (3) бекітілген.

Материалдың демпферлік қасиеті үлгінің (1) өшетін еркін тербеліс спекторын анализ жасау арқылы анықталады. Тербелістің бастапқы деформация амплитудасы үлгінің жұмыс

бөлігінің майысу шамасының берілуімен анықталады, ол үлгінің бос бөлігінің иілуін микрометрлік винт (4) арқылы анықталынады. Жұмыс бөлігінің сыртқы талшығының салыстырмалы ұзару мәнін күрделі кескінді консальды бекітілген арқалықтың иілу теңдеуі арқылы есептелген, сонан соң оны жұмыс бөлігіне тензодатчикті жабыстыру арқылы экспериментальды тексерген [9].

Тербелісті тіркеу үшін шексіз индукциялық датчикті қолданған. Ол датчик индуктивті (2) катушкадан және тұрақты (3) магниттен тұрады. Үлгіні майыстырып оны фиксатормен бекітіледі. Сонан соң оны жіберуші механизммен жібереді, басында магнит бекітілген үлгі жіберілгеннен соң еркін тербеліске түседі, тербелістегі тұрақты магнит катушкада индукцияланған электр қозғаушы күшін тудырады индукциялық ток магниттің қозғалыс жылдамдығына пропорционал болады да координатаның туындысы ретінде сипатталынады. Осы индукция тогының өзгерісін, информация, ақпарат ретінде автоматты түрде қабылдап нәтижені алғашқы өңдеуін персоналды компьютер базасында жасалады. Өлшенілетін катушкадан ишарат (сигнал)  $\Phi - 4223$  аналого-цифрлық түрлендірушінің кірісіне келіп түседі. Жеке компьютер мәліметтерді жинап, сол мәлімет бойынша тербеліс амплитудасын жедел түрде анықтап материалдың демпферлік қасиетін анықтап береді [10].

Нәтижені шығарып берудің салыстырмалы қателігі 1-3% - дан аспайды. Автоматтандырылған жүйе материалдың демпферлік қасиетін  $4 \times 10^{-5} - 1.5 \times 10^{-3}$  тербеліс амплитуда мен 20-50 Гц жиілік диапазондарында анықтауға (үлгінің өзінің жиілігі серпімділік модулі мен геометриясымен анықталады) мүмкіндігі бар.



Сурет 1. Кері иілетін маятник әдісімен демпферлік қасиетті зерттейтін қондырғының сызбасы ( 1 – үлгі, 2 – индуктивтілік катушқасы, 3 – тұрақты магнит, 4 – микрометрлік винт, 5 – жіберуші механизм, 6 – ауыр магниттелмейтін плитка, 7 – үлгіні бекітуші, 8 – магнитті бекітуші, 9 – серпімді ілулі элемент, 10 – негізі).

Москвадағы қара металдар орталық ғылыми зерттеу институтындағы металдар физикасы және материалтану институтының ғылыми зерттеу лабораториясындағы қондырғылар жұмысы осы бағытта жүріп отыр, бізге өзіміздің істейтін жұмысымыздың қайсыбірі қолдан келмеген жағдайда көмекке келеді, материалдың демпферлік қасиетін анықтап береді. Нәтижені шығарып берудің салыстырмалы қателігі 1-3% - дан аспайды. Автоматтандырылған жүйе материалдың демпферлік қасиетін  $4 \times 10^{-5} - 1.5 \times 10^{-3}$  тербеліс амплитуда мен 20-50 Гц жиілік диапазондарында анықтауға (үлгінің өзінің жиілігі серпімділік модулі мен геометриясымен анықталады) мүмкіндігі бар [11].

## **Нәтижелер, талдау және талқылау.**

Mn-Cu қорытпалар жүйесін төменгі температурада, яғни мартенситті өзгеріс үрдісінің басталу температурасынан жоғары температурада, жіберетін болсақ, яғни металофизика тілінде қартайтсақ, олардың демпферлік қасиетіне әсері үлкен болады. Осы құбылыстың бар болуына ең ықтимал себебі ол Mn-Cu қорытпалар диаграмма күйінде метастабильді қатпарлану алабының әсері.

Бұл жерден көретініміз марганецтің құрамы 35% - ді құраған қорытпалардың өзінде жоғарғы демпферлік қасиет байқалады. Бұл жерде ең қызықтысы, жоғарғы демпферлік қасиетті көрсететін концентрациялық алап ГЦТ құрылымды құрап қалыптастыратын концентрациялық алаппен сәйкес келмейді ( $СМпкр = 50\%$ ). Сонымен, төменгі температурада қыздырылған қорытпаларда, жоғарғы температурадан шыныққан қорытпаларға қарағанда, серпімді тербеліс энергиясының жоғарғы деңгейде ыдырауы (өшу мағынасында), тетрагональды мартенсит алабы мен кубтық фазаларда орын алады [12].

Төменгі температурада қыздыру уақытын 4 – 6 сағатқа дейін ұзартсақ демпферлік қасиеттің, үлгінің тербелісінің логарифмдік декременті өседі, яғни демпферлік қасиет өседі, бірақ тербелістің орта және жоғары амплитуда алабында демпферлік қасиет амплитудаға тәуелді болмайды.

Қорытпалардың демпферлік қасиетінің өсу деңгейі, төменгі температурада қыздыру уақытын 8 – 12 сағат болғанға дейін өсіп отырады, да барлық зерттелініп жатқан деформация амплитуда диапазонында демпферлік қасиеттің амплитудаға тәуелділігі байқалады.

Соңында, төменгі температурада қыздырудың соңғы сатысында қорытпалардың демпферлік қасиеті төмендейді, бірақ амплитудаға тәуелділік сипаты сақталады. Тәжірибеде байқалатыны, демпферлік қасиеттің төменгі температурада қыздыру уақытына тәуелділігінің күрделі сипаты, Mn-Cu қорытпалар жүйесін төменгі температурада қыздыру барысында құрылымдық күйі анағұрлым өзгеріске ұшырайтындығын көрсетеді, сонымен қатар тек құрылымның сандық сипаты ғана емес, оның өзінің типтік түрі де үлкен өзгеріске ұшырайды.

Тәжірибелік зерттеулер 45-85% марганеці бар қос мыс қорытпаларына, әртүрлі элементтермен легіріленген 50 және 60% марганеці мыс қорытпаларына және олардың 10%-ға дейінгі концентрациядағы жеке комбинацияларына жүргізілді. Фазалық түрлендірулердің құрылымы мен температураларын зерттеу кезінде марганец-мыс қорытпалары, жарық және электронды микроскопия, рентгендік дифракция және рентген-спектрлік микроанализ, электронды парамагниттік резонанс, магниттік сезімталдық, дилатометрия, электр кедергісі және калориметрия әдістері қолданылды.

Марганец-мыс қорытпаларының демпферлік қабілеті 20 °C температурада (2-5)-10<sup>-6</sup> және (0,1-1,1)-10<sup>-3</sup> деформация (салыстырмалы ығысу) амплитудаларында еркін сөндірілетін тербеліс әдісімен анықталды, және температура диапазоны 0 °C-тан +200 °C-қа дейін. Қорытпалардың механикалық қасиеттері бөлме температурасында зерттелді.

Марганец-мыс қорытпаларының амплитудаға тәуелсіз демпфингіне легірлеудің әсері зерттелді және амплитудаға тәуелсіз демпферлік аймақта қос марганец-мыс қорытпаларының демпферлік қабілетіне әртүрлі элементтердің айтарлықтай әсер етпейтіні көрсетілді. Марганецтің титан, ванадий, интерметалдық фазаларының циркониймен, хроммен қосындылары төмендейтіні және марганец-мыстың у-қатты ерітіндісінің ыдырауын тездететін германий мен галлийдің легірлеуші элементтерінің демпферлік қабілетін арттыратыны көрсетілген. амплитудаға тәуелді демпферлік аймақтағы марганец-мыс қорытпалары. Титан, ванадий, цирконий, хром легіріленген элементтердің амплитудалық аймақтарда 20 °C (табиғи қартаю) қартаю уақытында марганец-мыс қорытпаларының жоғары демпферлік қабілетінің төмендеуін баяулататыны және тұрақтандыратыны



анықталды. тәуелсіз және амплитудаға тәуелді демпферлік және марганец-мыс қорытпаларының демпферлік қабілетін тұрақтандыру механизмі осы элементтермен ұсынылған [13].

Өңдеудің қосымша түрлері: гомогенизациялау жасыту, термиялық цикл, суықпен өңдеу, жасанды ескіру марганец-мыс қорытпаларының табиғи қартаю кезінде жоғары демпферлік қабілетін сақтауға ықпал етпейтіні анықталды. Екілік және легирленген марганец-мыс қорытпаларының магниттік өту температуралары электронды парамагниттік резонанс (ЭПР) әдісімен зерттелді. Марганецке бай аймақтардың антиферромагнетизмі 45-80% марганецпен мыс қорытпаларының мартенситтік түрленуімен байланысты екені анықталды.

### **Қорытынды**

Бұл жұмыста физикалық металлургияның заманауи әдістері қолданылды, Mn-Cu жүйесінің қорытпаларындағы магниттік құрылымдық ауысу механизмі зерттелді. Серпімді және серпімді емес эсерлерді жан-жақты талдау негізінде фазалық ауысудың даму кезеңдері мен параметрлері белгіленеді. Никельмен және хроммен легирлеудің магнитқұрылымдық ауысу типі мен параметрлеріне және Mn85-Cu45 қорытпасының функционалдық қасиеттеріне әсері анықталды. Диссипативті, элинварлық қасиеттердің және пішінді есте сақтау эффектіннің және оларға термиялық өңдеу режимдерінің әсері мен көрінісінің температуралық интервалдары анықталады. Жүргізілген тәжірибелік зерттеулердің жиынтығы магниттік құрылымдық ауысу механизмі туралы бұрыннан бар идеяларды кеңейтеді және Mn-Cu жүйесінің қорытпаларының функционалдық қасиеттерінің сипаттамалары туралы жаңа мәліметтер береді. Жалпы жұмыстан мынадай қорытындылар жасалды.

Механикалық спектроскопия әдістерін қолдану арқылы Mn85-Cu45, Mn85-Cu17-Cr3, Mn85-Cu17-Ni3 қорытпаларындағы магниттік құрылымдық ауысудың температуралық диапазонында серпімділік константаларының аномальді төмендеуімен жүретін ішкі үйкелістің фазалық максимумдары табылды. Ішкі үйкеліс пен серпімділік константаларының температуралық тәуелділіктерін өлшеу арқылы алынған мәліметтерді салыстыру және құрылымдық зерттеу әдістерінің нәтижелері серпімділік константаларының минимумдарының температуралары кері мартенситтің тура және соңы басының нүктелеріне сәйкес келетінін расталды. Ішкі үйкелістің фазалық максимумының аддитивтілігі белгіленеді және оның құрамдас бөліктері ажыратылады: өтпелі, тепе-теңдік (V1 фон O1 б. Температураны тұрақтандыру жағдайында 2 Гц жиілікте және  $f$  жиілікте  $\sim 800$  Гц, максималды VT VT тепе-теңдік және фондық құрамдастарын қамтиды;  $T \propto f^0$  герц жиілік диапазонында - барлық үш компонент. Ішкі үйкелістің оқшауланған компоненттерінің мартенситті табиғаттың серпімсіз эсерлерінің жасалған үлгілеріне сәйкестігі көрсетілген.  $Q''/T$  ауысу компонентінің  $m/c_0$  аз мәндер диапазонында күрделі параметрге белгіленген бөлшектік-рационалды тәуелділігі Г.Гремонның феноменологиялық моделіне сәйкес келеді және бір мезгілде арасындағы тепе-теңдікпен байланысты. мартенситтік трансформациядан және кернеудің релаксациясынан туындаған тордың деформациясының жүретін процестері. Таңдалған құрамдас бөліктерге және тұтастай алғанда ішкі үйкелістің фазалық максимумына сыртқы факторлардың (тербеліс жиілігі, температураның өзгеру жылдамдығы, деформация амплитудасы, изотермиялық ұстау уақыты) әсерін жан-жақты талдау оны серпімді емес эсер ретінде түсіндіруге мүмкіндік берді. термосерпімді мартенситтік түрленуіне байланысты.

Mn-Cu жүйесінің қорытпаларында Ms жоғары температура диапазонында мартенситке дейінгі күшті құбылыстар анықталды, олар классикалық термосерпімді мартенситтік түрленуі бар қорытпаларға тән емес –  $1\epsilon$ -әсерінің үлкен мәні (38-ге дейін) (%) және T0 және TAF (20 -35 °C) температураларының айтарлықтай айырмашылығы. Магнит өрісінің түсуі ( $H=2,5-104$  А/м) мартенге дейінгі эсерлердің температуралық диапазонының кеңеюіне

әкеледі. Ішкі үйкелістің таңдалған магниттік компоненті Ms-TAF интервалында. Алынған нәтижелер Mn-Cu жүйесінің қорытпаларындағы магниттік құрылымдық түрлендірудің даму механизмі туралы заманауи идеяларға сәйкес келеді. Тетрагональды бұрмаланулардың пайда болуын бастайтын, Ms температурасынан жоғары жергілікті аймақтарда антиферромагниттік реттіліктің қалыптасуы құрылымды мартенситті түрлендіруге дайындайды. Mn85-Cu45 қорытпасының легірленуі магниттік құрылымдық ауысудың түрі мен параметрлеріне әсер етеді: никельді легирлеу (4%-ға дейін) екінші ретті фазалық ауысу белгілерін күшейтеді, ал хромды легирлеу (3%) бірінші ретті күшейтеді. фазалық ауысу. Хромды және әсіресе никельді енгізу d-фазасын тұрақтандырады және магниттік құрылымдық өзгерістер температурасының 104-37 ° C-қа ығысуына әкеледі. Никельді енгізу (4%-ға дейін) Mn85-Cu45 және Mn85-Cu17-Cr3 қорытпаларымен салыстырғанда мартенсит ішілік шекараларды ауыстыру үшін қажетті критикалық кернеуді төмендетеді.

Марганецке бай гомогенді Mn-Cu қорытпалар жүйесіндегі ерекше физикалық қасиеттің пайда болуы, яғни жоғарғы демпферлік және псевдосерпімділік сияқты, Mn атомдарының магнит моменттерінің антиферромагнитті реттелуімен, сипаты жағынан термосерпімді мартенсит өте жақын, ГЦК ↔ ГЦТ өзгерістердің өтуімен тығыз байланысқан үрдістің өтуінен болады.

Жоғары температуралық ГЦК фазаға тән сипат, ол T<sub>кр</sub> температураға жақындаған сайын реттелмеген тетрагональдық (бұрмалану) дәреженің шамасы өсіп отыратындығында. Тетрагональдық дәреженің (бұрмаланудың) центрі ретінде тетрагональды өзгеріске салыстырғанда өзінің тұрақтылығын жоғалтқан, өлшемі 1-2 нм болатын локальды алаптардың болуы. Қайсыбір тетрагональдық бұрмалану алаптарының локальды ось бағыттары ГЦК кристалл торының кубының үш ось бағытымен бағыттас болу ықтималдығы бірдей болады.

Бұл сияқты алаптардың матрицамен когерентті байланыста болу, кристалдарда статикалық ығысу толқындары пайда болуына алып келеді: кума толқындар векторы [100] бағытта болады да, көлденең толқындар векторы [110] бағытта, ал поляризация векторы [110] бағытпен бағыттас болады. Статикалық ығысу толқындарымен қатар динамикалық ығысу толқындары да, жылулық ығысу толқындары да болады, еске сала кететіні, серпімді анизотропияның әсерінен толқындар векторы [110] мен поляризация векторы [110] бағыттары айқын байқалады.

Mn-Cu қорытпаларды құрылымы  $\gamma$  -болатын алабынан шынықтырғанда, марганецтің үлесі 80% -дан жоғары қорытпаларда үй температурасында осьтер қатынасы  $c/a < 1$  болатын ГЦТ құрылымы пайда болады. Бұл мартенсит фазасының құрылымы термосерпімді мартенсит өзгеріске түсетін қорытпалар құрылымына сипаттас болады. Қорытпада екі ығысу механизмінің негізінде, бастапқы ГЦК торға {110} параллель жазықтықтармен қосарланған шекарамен шектесетін жұқа және күрделі қосармен қосарланған құрылымдар қалыптасады. Бұл қосарланған құрылымның басқа құрылымнан ажырата алатын ерекшелігі, ол ығысу теориясына сүйенгендегідей күрделі мазаикалық құрылым қосарларының ішінде бір емес екі қосарлану жүйесі барлығында. Осының нәтижесінде кристалдардағы қосарлық шекаралардың бекітілуі әр түрлі болып келеді: сәйкессіздік дислокациясымен қатаң бекітілген шекаралармен қатар мазаика блоктарымен түйіскеннен пайда болатын бастау бекітілген шекаралар да кездеседі. Бастау бекітілген шекаралардың көлемдік үлесі ГЦК → ГЦТ өзгерісінің концентрациялық шекарасына жақындаған сайын өсе түседі.

ГЦК → ГЦТ өзгерісінің шекарасынан өткенде қорытпалардың демпферлік қасиеті өте жылдам артады (секірмелі түрде десе де болады), еске сала кететіні, ГЦК → ГЦТ өзгеріс аймағында демпферлік қасиет максимал мәнді болады. Сонымен демпферлік қасиет ГЦТ фазада өтетін үрдістермен тығыз байланысқан болады. Қорытпалардағы ГЦК фазалардағы реттелмеген тетрагональдық бұрмаланудың (искажений) болудың демпферлік қасиетке әсері шамалы болады.

Шыныққан жоғарғы марганец қорытпаларында демпферлік механизм төменде көрсетілген жағдайларда болады.

Мазаикалық қосар субструктуралардың гистерезистік қайта құрылуы

Сәйкессіздік дислокациясымен бекітілген қосарланатын дислокацияның тербелмелі қозғалысы

Сәйкессіздік дислокациясынан ажыратылу нәтижесіндегі қосарлық шекаралардың гистерезистік қозғалысынан болады.

### **ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**

1. Структура, физико-механические свойства и применение литейных кремний - марганцовистых бронз. Лисовский В.А., Лисовская О.Б., Предин К.С., 2012, Вятский государственный университет.
2. Курдюмов Г.В. Бездиффузионные мартенситные превращения в сплавах / Г.В. Курдюмов // ЖТФ.-1979.-Т.18.-№8.-С. 999-1025.
3. Ройтбурд А.Л. Современное состояние теории мартенситных превращений. В кн.: Несовершенства кристаллического строения и мартенситные превращения. М., 2002.-С.7-32.
4. Ройтбурд А.Л. Теория формирования гетерофазной структуры при фазовых превращениях в твердом состоянии / А.Л. Ройтбурд // Успехи физ. Наук.- 2007.-Т.113.-Вып.1.-С. 105-128.
5. Ройтбурд А.Л. Особенности развития фазовых превращений в кристаллах. В кн.: Проблемы современной кристаллографии. М., 1975.- С. 345369.
6. Курдюмов Г.В. Превращения в железе и стали / Курдюмов Г.В., Утевский Л.М., Энтин Р.М.- М.: Наука, 1997.-238 с.
7. Christian J.W. Theory of transformation in metals and alloys.- Pergamon Press.-2005.-973 p.
8. Nishijama Z. Martensitic transformation.- Acad, press. 2010.-467 p.
9. Варлимонт Х. Мартенситные превращения в сплавах на основе меди, серебра и золота/ Х. Варлимонт, Л. Дилей М.: Наука, 2000.-208 с.
10. Лысак Л.И. Физические основы термической обработки стали / Л.И. Лысак, Б.И.Николин.- Киев: Техника, 2005.-304 с.
11. Ройтбурд А.Л. Мартенситные превращения / А.Л. Ройтбурд, Э.И. Эстрин.// Итоги науки и техники. Металловедение и термическая обработка.-ВИНИТИ, 1998.-С.5-102.
12. Коваль Ю.Н. Управление характеристиками мартенситных превращений в металлах и сплавах / Ю.Н. Коваль // Структура реальных металлов. -Наукова думка, 2011.- С. 132-159.
13. Хачатурян А.Г. Некоторые вопросы теории фазовых превращений в твердом теле / А.Г. Хачатурян // ФТТ.-2004.-№8.-С.2709-2717.

### **REFERENCES**

1. Struktura, fiziko-mekhanicheskiye svoystva i primeneniye liteynykh kremniy - margantsovistykh bronz. Lisovskiy V.A., Lisovskaya O.B., Predin K.S., 2012, Vyatskiy gosudarstvennyy universitet.
2. Kurdyumov G.V. Bezdiffuzionnyye martensitnyye prevrashcheniya v splavakh / G.V. Kurdyumov // ZHTF.-1979.-Т.18.-№8.-S. 999-1025.
3. Roytburd A.L. Sovremennoye sostoyaniye teoreticheskikh preobrazovaniy. V kn.: Nesovershenstva kristallicheskogo stroitel'stva i martensitnyye preobrazovaniya. M., 2002.-S.7-32.
4. Roytburd A.L. Teoriya formirovaniya geterofaznoy struktury pri fazovykh prevrashcheniyakh v tverdom sostoyanii / A.L. Roytburd // Uspekhi fiz. Nauk.- 2007.-Т.113.-Vyp.1.-S. 105-128.
5. Roytburd A.L. Osobennosti razvitiya perekhodnykh prevrashcheniy v kristallakh. V kn.: Problemy sovremennoy kristallografii. M., 1975.- S. 345369.
6. Kurdyumov G.V. Prevrashcheniya v stali i stali Kurdyumov G.V., Utevskiy L.M., Entin P.M.- M.: Nauka, 1997.-238 s.

7. Kristian Dzh.V. Teoriya prevrashcheniya v metallakh i splavakh.- Pergamon Press.-2005.-973 s.
8. Nishiyama Z. Martensitnoye prevrashcheniye.- Izd-vo akad. 2010.-467 s.
9. Varlimont X. Martensitnyye prevrashcheniya v splavakh na osnove medi, serebra i zolota/ X. Varlimont, L. Diley M.:Nauka, 2000.-208 s.
10. Lysak L.I. Fizicheskiye stali osnovy termicheskoy obrabotki / L.I. Lysak, B.I.Nikolin.- Kiyev: Tekhnika, 2005.-304 s.
11. Roytburd A.L. Martensitnyye Prevrashcheniya / A.L. Roytburd, E.I. Estrin.// Itogi nauki i tekhniki. Metallovedeniye i termicheskaya obrabotka.-VINITI, 1998.-S.5-102.
12. Koval' YU.N. Upravleniye ozhidayemyimi martensitnymi prevrashcheniyami v metallakh i splavakh / YU.N. Koval' // Struktura obnaruzhennykh metallov. -Naukova dumka, 2011.- S. 132-159.
13. Khachatryan A.G. Nekotoryye voprosy teorii prevrashcheniy v tverdom tele / A.G. Khachatryan // FTT.-2004.-№8.-S.2709-2717.

МАЗМҰНЫ

---

**МАТЕМАТИКА**

---

<b>ОРМАН Б.Б.</b> <b>ТУРМЕТОВ Б.Х.</b> Пуассон теңдеуі үшін кейбір шеттік есептердің шешімділігі туралы	6-21
<b>МУРАТОВ Х.А.</b> <b>ТУРМЕТОВ Б.Х.</b> Инволюциялы бөлшек ретті теңдеуі үшін аралас есептер туралы	22-31
<b>БАЛТАБАЕВА М.Э.</b> <b>ТУРМЕТОВ Б.Х.</b> Инволюциялы бөлшек ретті жылуөткізгіштік теңдеуі үшін кейбір бастапқы-шеттік есептердің шешімділігі туралы	32-47
<b>УСМАНОВ К.И.</b> Функционалды-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін локальді емес шеттік есептің бірімәнді шешімділігінің шарттары	48-58
<b>ФИЗИКА</b>	
<b>ТАШМЕТОВ А.Р.</b> <b>ШЕКТИБАЕВ Н.А.</b> Fe-Mn негізіндегі қорытпалардың демпферлік қасиеттеріне термоөңдеудің әсерін зерттеу және COMSOL Multyphysics бағдарламасындағы имитациялық моделдеу	59-69
<b>АКАШЕВА Ж.К.</b> <b>БОЛЫСБЕК Д.Ә.</b> <b>ИСАЕВ Г.И.</b> <b>АСИЛБЕКОВ Б.К.</b> Карбонатты үлгілерді қышқылды ерітінділермен ерітуді эксперименталды зерттеу	70-79
<b>ПАЗЫЛ А.Т.</b> <b>ШЕКТИБАЕВ Н.А.</b> « $\gamma - Mn - Cu$ қорытпалар жүйесінің гетерогендік құрылымының физика - механикалық қасиеттерін зерттеу»	80-91
<b>МАЗМҰНЫ</b>	92-94

---

СОДЕРЖАНИЕ

---

**МАТЕМАТИКА**

---

<b>ОРМАН Б.Б.</b> <b>ТУРМЕТОВ Б.Х.</b>	О разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Пуассона	6-21
<b>МУРАТОВ Х.А.</b> <b>ТУРМЕТОВ Б.Х.</b>	О смешанных задачах для одного класса уравнений дробного порядка с инволюцией	22-31
<b>БАЛТАБАЕВА М.Э.</b> <b>ТУРМЕТОВ Б.Х.</b>	Об одном обобщении задачи Робена для уравнения Лапласа в круге	32-47
<b>УСМАНОВ К.И.</b>	Условие однозначной разрешимости нелокальных краевых задач для систем функционально-дифференциальных уравнений	48-58
<b>ФИЗИКА</b>		
<b>ТАШМЕТОВ А.Р.</b> <b>ШЕКТИБАЕВ Н.А.</b>	Исследование влияния термообработки на демпфирующие свойства сплавов на основе Fe-Mn и имитационное моделирование в программе COMSOL Multyphysics	59-69
<b>АКАШЕВА Ж.К.</b> <b>БОЛЫСБЕК Д.А.</b> <b>ИСАЕВ Г.И.</b> <b>АСИЛБЕКОВ Б.К.</b>	Экспериментальное исследование растворения карбонатных образцов кислотными растворами	70-79
<b>ПАЗЫЛ А.Т.</b> <b>ШЕКТИБАЕВ Н.А.</b>	Исследование физико-механических свойств гетерогенной структуры системы $\gamma - Mn - Cu$ - сплавов»	80-91
<b>СОДЕРЖАНИЕ</b>		92-94

---

CONTENT

---

**MATHEMATICS**

---

**ORMAN B.B.**  
**TURMETOV B.Kh.**  
On the solvability of some boundary value problems for the Poisson equation 6-21

---

**MURATOV Kh.A.**  
**TURMETOV B.Kh.** 22-31  
On mixed problems for a class of fractional order equations with involution

---

**BALTABAEVA M.E.**  
**TURMETOV B.Kh.**  
On a generalization of the robin problem for the Laplace equation in the circle 32-47

---

**USMANOV K.I.**  
A condition for the unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of functional-differential equations 48-58

---

**PHYSICS**

---

**TASHMETOV A.R.**  
**SHEKTIBAEV N.A.**  
Investigation of the effect of heat treatment on the damping properties of Fe-Mn-based alloys and simulation in the COMSOL Multiphysics program 59-69

---

**AKASHEVA ZH.K.**  
**BOLYSBEK D.A.**  
**ISAEV G.I.**  
**ASYLBEKOV B.B.**  
Experimental study of the dissolution of carbonate samples with acid solutions 70-79

---

**PAZIL A.T.**  
**SHEKTIBAEV N.A.**  
Investigation of the physical and mechanical properties of the heterogeneous structure of the  $\gamma - Mn - Cu$  alloy system 80-91

---

**CONTENT** 92-94

---

**Қ.А.ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК  
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРЛАРЫ  
(МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ)**

***Редакцияның мекен-жайы:***

*161200, Қазақстан Республикасы, Түркістан қаласы,  
Б. Саттарханов даңғылы, 29В, ректорат, 404 бөлме.*

*Байланыс тетіктері: 8(725-33)6-38-26(19-60)*

*e-mail: [ayu-habarlari@ayu.edu.kz](mailto:ayu-habarlari@ayu.edu.kz)*

*Ғылыми редакторлар:*

*Қошанова М.Д., Досымов Е., Жунисов Н.М.*

*Жауапты хатшы: Әбдіханова Ж.*

*Техникалық редактор: Көшербаев Т.*

**Жарияланған мақала авторларының пікірі  
редакция көзқарасын білдірмейді.**

**Мақала мазмұнына автор жауап береді.**

**Қолжазбалар өңделеді және авторларға қайтарылмайды.**

**Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік  
университетінің хабарлары**

**(математика, физика, информатика сериясы) журналына  
жарияланған материалдарды сілтемесіз көшіріп  
басуға болмайды.**

30.09.2022 ж. баспаға жіберілді

*Журнал Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің  
«Тұран» баспаханасында көбейтіледі.*

*Қағаздың пішімі: 70x100 Қағазы офсеттік А4. Офсеттік басылым.*

*Шартты баспа табағы 7,06. Таралымы 110 дана. Тапсырыс 145.*