УДК 517.956
ГРНТИ 27.31.15

https://orcid.org/0000-0002-0784-5183

Б.Д. КОШАНОВ [1,2], Б.Т. КИТАПБАЕВА [2]

[1] Казахский национальный педагогический университет имени Абая (Алматы, Казахстан),
[2] Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан)
e-mail: koshanov@list.ru , kitapbaeva@math.kz

О КОРРЕКТНЫХ СУЖЕНИЯХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Необходимость исследования краевых задач для эллиптических уравнений продиктована с многочисленными практическими приложениями при теоретическом изучении процессов гидродинамики, электростатики, механики, теплопроводности, теории упругости, квантовой физики. Распределения потенциала электростатического поля описываются с помощью уравнения Пуассона, а при исследовании колебаний тонких пластин малых прогибов возникают бигармонические уравнения.

Настоящая работа посвящена исследованию полигармонического уравнения, в том числе, построению функции Грина классической задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре и описанию корректных краевых задач для полигармонического оператора.

Существуют различные способы построения функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Для многих видов областей она построена в явном виде. А для задачи Неймана в многомерных областях построение функции Грина является открытой задачей.

Нахождение общих корректных краевых задач для дифференциальных уравнений всегда является актуальной задачей. В начале 80-х годов прошлого столетия Академиком НАН РК М.О. Отелбаевым и его учениками была построена абстрактная теория, которая позволяет описать все корректные сужения некоторого максимального оператора и отдельно - все корректные расширения некоторого минимального оператора, независимо друг от друга, в терминах обратного оператора.

В данной работе кратко изложена теория сужения и расширения операторов и описаны корректные краевые задачи для полигармонического оператора в многомерном шаре.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение, полигармонический оператор, задача Дирихле, корректные сужения оператора, корректные расширения оператора.

Б.Д. ҚОШАНОВ [1,2], Б.Т. КІТАПБАЕВА [2]

[1] Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті (Алматы, Қазақстан),
[2] Математика және математикалық модельдеу институты (Алматы, Қазақстан)
e-mail: koshanov@list.ru , kitapbaeva@math.kz

ПОЛИГАРМОНИЯЛЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ ТИЯНАҚТЫ ТАРЫЛУЫ ТУРАЛЫ

Эллиптикалық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу қажеттілігі гидродинамика, электростатика, механика, жылу өткізгіштік, серпімділік теориясы, кванттық физика процестерін теориялық тұрғыдан зерттеуде көптеген практикалық қосымшалардың түсіндіруімен тікелей байланысты. Электростатикалық өрістің потенциалының таралуы

Пуассон теңдеуі арқылы сипатталады, ал кішігірім ауытқулардың жұқа тақтайшаларының тербелістерін зерттеу кезінде бигармониялық теңдеулер туындайды.

Бұл жұмыс полигармониялық теңдеулерді зерттеуге арналған, оның ішінде көп өлшемді шарда полигармониялық теңдеу үшін классикалық Дирихле есебінің Грин функциясы құрылған және полигармониялық оператор үшін тиянақты қойылған шеттік есептерін сипаттауға арналған.

Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебінің Грин функциясын құрудың әр түрлі тәсілдері бар. Облыстардың көптеген түрлері үшін ол айқын түрде құрылған. Көпөлшемді облыстарда Нейман есебі үшін Грин функциясын құру осы күнге дейін ашық мәселе болып табылады.

Дифференциалдық теңдеулер үшін жалпы тиянақты қойылған шеттік есептерін табу әрқашанда өзекті мәселе болып табылады. Өткен ғасырдың 80-ші жылдарының басында Қазақстан Республикасы Ұлттық Ғылым академиясының академигі М. Өтелбаев пен оның шәкірттері абстрактылы теорияны құрды. Осы теорияның негізінде, бір-біріне тәуелсіз, кейбір максималды оператордың барлық тиянақты тарылуларын және кейбір минимал оператордың барлық тиянақты кеңейюлерін, кері оператордың терминінде (тұрғысынан), сипаттауға болатындыгы көрсетілді.

Бұл жұмыста біз операторлардың тарылуы мен кеңею теориясын қысқаша келтіреміз және полигармониялық оператор үшін көп өлшемді шарда тиянақты қойылған шеттік есептерін сипаттаймыз.

Кілттік сөздер: полигармониялық теңдеу, полигармониялық оператор, Дирихле есебі, оператордың тиянақты тарылуы, оператордың тиянақты кеңеюі.

B.D. KOSHANOV[1,2], B.T. KITAPBAEVA[2]

[1]Abai Kazakh National Pedagogical University (Almaty, Kazakhstan),
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modelling (Almaty, Kazakhstan)
e-mail: koshanov@list.ru , kitapbaeva@math.kz

ON CORRECT RESTRICTIONS OF A POLYHARMONIC OPERATOR

The need to study boundary value problems for elliptic equations is dictated by numerous practical applications in the theoretical study of the processes of hydrodynamics, electrostatics, mechanics, heat conduction, elasticity theory, quantum physics. The distributions of the potential of the electrostatic field are described using the Poisson equation, and when studying the vibrations of thin plates of small deflections, biharmonic equations arise.

This work is devoted to the study of the polyharmonic equation, including the construction of the Green's function for the classical Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a multidimensional ball and the description of well-posed boundary value problems for the polyharmonic operator.

There are various ways of constructing the Green's function of the Dirichlet problem for the Poisson equation. For many types of areas, it is built explicitly. And for the Neumann problem in multidimensional domains, the construction of the Green's function is an open problem.

Finding general well-posed boundary value problems for differential equations is always an urgent problem. In the early 80s of the last century, Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan M. Otelbaev and his students constructed an abstract theory that allows one to describe all correct restrictions of some maximal operator and separately all correct extensions of some minimal operator, independently of each other, in terms of the inverse operator.

In this paper, we briefly outline the theory of restriction and extension of operators and describe well-posed boundary value problems for a polyharmonic operator in a multidimensional ball. Key words:

Key words: polyharmonic equation, polyharmonic operator, Dirichlet problem, correct restrictions of the operator, correct extensions of the operator.

Введение

Необходимость исследования краевых задач для эллиптических уравнений продиктована с многочисленными практическими приложениями при теоретическом изучении процессов гидродинамики, электростатики, механики, теплопроводности, теории упругости, квантовой физики [1]. Распределения потенциала электростатического поля описываются с помощью уравнения Пуассона. При исследовании колебаний тонких пластин малых прогибов возникают бигармонические уравнения.

Настоящая работа посвящена исследованию полигармонического уравнения, в том числе, построению функции Грина классической задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре и описанию корректных краевых задач для полигармонического оператора.

Существуют различные способы построения функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Для многих видов областей она построена в явном виде. А для задачи Неймана в многомерных областях построение функции Грина является открытой задачей. Для шара функция Грина внутренней и внешней задачи Неймана построена в явном виде только для двумерных и трехмерных случаев. В общем случае для многомерного шара явный вид функции Грина задач Неймана и Робена для уравнения Пуассона построены недавно в работах [2,3].

Отметим, что в последнее время возобновился интерес к построению в явном виде функций Грина классических задач. В работах [4-6] построена в явном виде функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре. В работе [7] с помощью гармонических функций Грина задач Дирихле, Неймана и Робена построены функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана и Робена в двумерном круге. Аналогичные результаты в классе неоднородных бигармонических и тригармонических функций в секторе были получены в работах [8-10]. Заметим также, что построению в явном виде функций Грина задачи Робена в круге, когда параметр в граничных условиях равен единице посвящена работы [11-13]. Результаты этих работ основаны на классической теории интегральных представлений для аналитических, гармонических и полигармонических функций на плоскости.

Нахождение общих корректных краевых задач для дифференциальных уравнений всегда является актуальной задачей. Абстрактная теория сужения и расширения операторов берет свое начало с работы Джон фон Нейман [14], в которой был описан метод построения самосопряженных расширений симметрического оператора и подробно разработана теория расширения симметрических операторов с конечными индексами дефекта. Многие задачи для дифференциальных уравнений в частных производных приводят к операторам с бесконечными индексами дефекта.

М.И. Вишик [15,16] рассмотрел расширения минимального оператора, отказавшись от его симметричности, и описал области определения расширения, обладающие теми или иными свойствами разрешимости. Свои результаты М.И. Вишик приложил к исследованию общих краевых задач для общих эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. Затем А.В. Бицадзе и А.А. Самарский [17] обнаружили корректную задачу, которая не содержится среди задач, описанных М.И. Вишиком.

Такого типа задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений изучались А.А. Дезином [18].

В начале 80-х годов прошлого столетия М.О. Отелбаевым и его учениками [19-21] была построена абстрактная теория, которая позволяет описать все корректные сужения некоторого максимального оператора и отдельно - все корректные расширения некоторого минимального оператора, независимо друг от друга, в терминах обратного оператора. Эта теория была распространена на случай банаховых пространств [22].

В данной работе кратко изложена теория сужения и расширения операторов и описаны корректные краевые задачи для полигармонического оператора в многомерном шаре.

1. Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре

Пусть m - натуральное число и в n - мерном шаре $\Omega = \{x : |x| < r\}$ рассмотрим **задачу Дирихле для полигармонического уравнения**

$$\Delta^m u(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial n_x^j} = \varphi_j(x), 0 \le j \le m-1, x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_y}$ - внешний нормаль $\partial\Omega$, и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial n_y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n_y)_k}{r} \frac{\partial}{\partial x_k},\ n_y \equiv \vec{n}_y = \{(n_y)_1, (n_y)_2, ..., (n_y)_n\},\ |n_y| = r.$$

Для удобства воспользуемся следующими обозначениями

$$|x-y|^2 = X^2(x,y) = X^2, \left|\frac{y}{r}\right|^2 \left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|^2 = Y^2(x,y) = Y^2,$$

$$\left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2\right)\left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2\right) r^2 = Z^2(x,y) = Z^2. \tag{3}$$

Классическое решение $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \bigcap C^{m-1}(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (1), (2) существует, единственно и оно представляется с помощью функции Грина $G_{2m,n}(x,y)$ в следующем виде [1]

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{2m,n}(x,y) f(y) dy +$$
$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^j G_{2m,n}(x,y) \cdot \Delta_y^{m-1-j} \varphi_j(y) - \Delta_y^j G_{2m,n}(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^{m-1-j} \varphi_j(y) \right] dS_y, \tag{4}$$

где функция Грина $G_{2m,n}(x,y)$ определяется из следующей теоремы.

Теорема 1 (Кальменов Т.Ш. и др.) *а) В случае нечетного n, а также при четных n, если $2m < n$ функция Грина задачи Дирихле (2.1), (2.2) представима в виде*

$$G_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}\left[X^{2m-n}-Y^{2m-n}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k}{k!}\left(m-\frac{n}{2}\right)...\left(m-\frac{n}{2}-k+1\right)Y^{2m-n-2k}Z^{2k}\right], \tag{5}$$

где

$$d_{2m,n}=\frac{1}{(m-1)!(2m-n)(2(m-1)-n)...(4-n)(2-n)}\cdot\frac{\Gamma(n/2)}{2^m\pi^{n/2}},$$ Γ - *гамма функция;*

b) В случае четного n *при* $2m\geq n$ *функция Грина представима в виде*

$$G_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}\left[X^{2m-n}\ln\frac{X^2}{Y^2}-Y^{2m-n}+\sum_{s=1}^{m-1}d_sY^{2m-n-2s}Z^{2s}\right], \tag{6}$$

где

$$d_{2m,n}=\frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)\cdot 2^{2m-1}\pi^{n/2}},\quad d_s=\sum_{\max\{s-n/2+1,0\}}^{\min\{m-n/2,s-1\}}\frac{(-1)^j}{s-j}C^j_{m-n/2}.$$

Надо также отметить, что в работах [7-10] построены функций Грина задач Дирихле, Неймана, Робина для бигармонических и полигармонических уравнений в круге, полукруге, полукольце, треугольнике и в других стандартных плоских областях. Результаты этих работ основаны на классической теории интегральных представлений для аналитических, гармонических и полигармонических функций на плоскости.

2. Корректные сужения и расширения дифференциальных операторов

Нахождение общих корректных краевых задач для дифференциальных уравнений является актуальной задачей. Абстрактная теория сужений и расширений операторов берет свое начало с работы Джон фон Нейман [14], в которой был описан метод построения самосопряженных расширений симметрического оператора и подробно разработана теория расширения симметрических операторов с конечными индексами дефектов. Многие задачи для дифференциальных уравнений в частных производных приводят к операторам с бесконечными индексами дефекта.

М.И. Вишик [15,16] рассмотрел расширения минимального оператора, отказавшись от его симметричности, и описал области определения расширения, обладающие теми или иными свойствами разрешимости. Свои результаты М.И. Вишик приложил к исследованию общих краевых задач для общих эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. Затем А.В. Бицадзе и А.А. Самарский [17] обнаружили корректную задачу, которая не содержится среди задач, описанных М.И. Вишиком. Такого типа задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений изучались А.А. Дезином [18].

В начале 80-х годов прошлого столетия М.О. Отелбаевым и его учениками [19-21] была построена абстрактная теория, которая позволяет описать все корректные сужения некоторого максимального оператора и отдельно - все корректные расширения некоторого минимального оператора, независимо друг от друга, в терминах обратного оператора. Эта теория была распространена на случай банаховых пространств [22] и удалось частично отказаться от линейности операторов. Причем согласно результатам М.Отелбаева задача А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [17] оказалась корректным сужением соответствующего максимального оператора. Приведем краткое содержание этой теории в случае гильбертовых пространств.

Пусть в гильбертовом пространстве H линейный оператор L с областью определения $D(L)$ и областью значения $R(L)$. Ядром оператора L назовем множество

$$KerL=\{f\in D(L):Lf=0\}.$$

Определение 1. Линейный замкнутый оператор $\hat{L}$ в гильбертовом пространстве H называется *максимальным*, если $R(\hat{L}) = H$ и $Ker\hat{L} \neq \{0\}$.

Определение 2. Линейный замкнутый оператор L_0 в гильбертовом пространстве H называется *минимальным*, если $\overline{R(L_0)} \neq H$ и существует ограниченный обратный оператор L_0^{-1} на $R(L_0)$.

Определение 3. Линейный замкнутый оператор L в гильбертовом пространстве H называется *корректным*, если существует ограниченный обратный оператор L^{-1} определенный на всем H.

Определение 4. Оператор L называется *сужением* оператора L_1 а оператор L_1 называется *расширением* оператора L и кратко пишут $L \subset L_1$ если

1) $D(L) \in D(L_1),$

2) $Lf = L_1 f, \forall f \in D(L).$

Определение 5. Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем *корректным сужением максимального оператора* $\hat{L}$ (*корректным расширением минимального оператора* L_0), если $L \subset \hat{L}$ $(L_0 \subset L)$.

Определение 6. Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем *граничным корректным расширением*, если L является одновременно корректным сужением максимального оператора $\widehat{L}$ и корректным расширением минимального оператора L_0, т.е. $L_0 \subset L \subset \hat{L}$.

Теорема 2. (Отелбаев М.О и др.) *Пусть $\hat{L}$ максимальный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, L - известное корректное сужение оператора $\hat{L}$ и K - произвольный линейный ограниченный в H оператор, удовлетворяющий следующему условию*

$$R(K) \subset Ker\hat{L}. \tag{7}$$

Тогда оператор L_K^{-1} определенный формулой

$$L_K^{-1} f = L^{-1} f + Kf, \forall f \in H, \tag{8}$$

является обратным к некоторому корректному сужению L_K максимального оператора $\hat{L}$, т.е. $L_K \subset \hat{L}.$

Обратно, если L_1 некоторое корректное сужение максимального оператора $\hat{L}$ то существует линейный ограниченный в H оператор K_1, удовлетворяющий условию (7), такой, что выполняется равенство

$$L_1^{-1} f = L^{-1} f + K_1 f, \forall f \in H.$$

Как правило, трудно описать ядро максимального оператора. Поэтому часто следующая теорема 3 более эффективна, чем теорема 2.

Теорема 3. (Отелбаев М.О и др.) *Пусть $\widehat{L}$ - максимальный оператор, L_ϕ - известное корректное сужение $\widehat{L}$ и K - непрерывный оператор, действующий из H в $D(\widehat{L})$ область определения оператора $\widehat{L}$. Тогда оператор L_K^{-1} определяемый формулой*

$$L_K^{-1} f = L_\phi^{-1} f + (\mathrm{E} - L_\phi^{-1}\hat{L})Kf \tag{9}$$

является обратным к некоторому корректному сужению $\widehat{L}$ *т.е.* $L_K \subset \hat{L}$.

Обратно, любое корректное сужение оператора $\hat{L}$ *представимо в виде (9) с некоторым оператором* K

Далее эта теорема будет применена для полигармонического оператора.

3. Корректные краевые задачи для полигармонического оператора в многомерном шаре

В данном пункте $\Omega = \{x \in R^n : |x| < r\}$. Выберем область определения максимального оператора $\widehat{L}$

$$D(\hat{L}) = W_2^{2m}(\Omega)$$

На $D(\hat{L})$ области определения определим оператор $\widehat{L}$ по формуле

$$\hat{L}u = \Delta^m u, \quad \forall u \in D(\hat{L}).$$

Напомним, что область значении максимального оператора

$$R(\hat{L}) = L_2(\Omega),$$

а $Ker\hat{L}$ его ядро не является тривиальным.

В предыдущем разделе было доказано, что краевая задача Дирихле для полигармонического уравнения

$$L_\phi u := \{u : \Delta_x^m u(x) = f(x), x \in \Omega, \ \frac{\partial^j u(x)}{\partial n_x^j} = 0, \ 0 \le j \le m-1, \ x \in \partial\Omega\}$$

имеет единственное решение $u(x)$ при любом $f \in L_2(\Omega)$, которое имеет интегральное представление

$$L_\phi^{-1} f = u(x) = \int_\Omega G_{2m,n}(x,y) f(y) dy, \tag{10}$$

где $G_{2m,n}(x,y)$ - функция Грина задачи Дирихле из (5) (или (6)).

Заметим, что нулевые краевые условия Дирихле для полигармонического уравнения эквивалентны следующим краевым условиям для того же уравнения.

Теорема 4. *Для любого* $f \in L_2(\Omega)$ *функция* $u(x)$, *задаваемая формулой (10), является решением краевой задачи:*

а) *при* $m = 2p$

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{11}$$

$$u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial}{\partial n_x} u(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \Delta_x u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0, ..., \Delta_x^{p-1} u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial}{\partial n_x} \Delta_x^{p-1} u(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0; \tag{12}$$

b) при $m = 2p+1$

$$u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial}{\partial n_x} u(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \Delta_x u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0, ..., \frac{\partial}{\partial n_x} \Delta_x^{p-1} u(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \Delta_x^p u(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Лемма 1. *Для любого* $h \in W_2^{2m}(\Omega)$ *справедливо представление*

$$(E-L_{\phi}^{-1}\hat{L})h(x)=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\cdot\Delta_y^{m-1-j}h(y)-\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^{m-1-j}h(y)\right]dS_y. \quad (14)$$

Лемма 2. *Функция Грина задачи Дирихле* $G_{2m,n}(x,y)$ *на границе области* $\partial\Omega$ *обладает следующими свойствами при* $m=2p$*:*

$$\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\Big|_{x\in\partial\Omega}=0,\ 0\le j\le m-1,\ \forall y\in\partial\Omega, \quad (15.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\Bigg|_{x\in\partial\Omega}=0,\ 0\le j\le m-2,\ \forall y\in\partial\Omega, \quad (15.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^{m-1} G_{2m,n}(x,y)\Big|_{x\in\partial\Omega}=\delta(x-y)\Big|_{x\in\partial\Omega},\ 0\le j\le m-1,\ \forall y\in\partial\Omega; \quad (15.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\Bigg|_{x\in\partial\Omega}=0,\ 0\le j\le m-2,\ \forall y\in\partial\Omega, \quad (16.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\Bigg|_{x\in\partial\Omega}=0,\ 0\le j\le m-1,\ \forall y\in\partial\Omega, \quad (16.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_y^{m-1} G_{2m,n}(x,y)\Big|_{x\in\partial\Omega}=\delta(x-y)\Big|_{x\in\partial\Omega},\ 0\le j\le m-1,\ \forall y\in\partial\Omega; \quad (16.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\Bigg|_{x\in\partial\Omega}=0,\ 0\le j\le 2p-1,\ \forall y\in\partial\Omega, \quad (17.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\Bigg|_{x\in\partial\Omega}=0,\ 0\le j\le 2p-1, j\ne p,\ \forall y\in\partial\Omega, \quad (17.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}\Delta_y^p G_{2m,n}(x,y)\Big|_{x\in\partial\Omega}=-\delta(x-y)\Big|_{x\in\partial\Omega},\ 0\le j\le m-1,\ \forall y\in\partial\Omega; \quad (17.3)$$

Теперь можно описать область определения максимального оператора $\widehat{L}$ в терминах функции Грина $G_{2m,n}(x,y)$.

Лемма 3. *Область определения максимального оператора* $\widehat{L}$ *имеет представление*

$$D(\hat{L})=\{u: u(x)=\int_{\Omega}G_{2m,n}(x,y)f(y)dy+$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\cdot\Delta_y^{m-1-j}h(y)-\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^{m-1-j}h(y)\right]dS_y, \forall \mathrm{f}\in \mathrm{L}_2(\Omega), \forall h\in W_2^{2m}(\Omega)\}. \quad (18)$$

В частности, если

$$\Delta_y^{m-1-j} h(y)\Big|_{y\in\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^{m-1-j} h(y)\Bigg|_{y\in\partial\Omega} = 0,\ 0 \le j \le m-1,$$

то получаем $D(L_\phi)$ область определения оператора L_ϕ.

Теперь возникает вопрос: Как описать области определения других возможных корректных сужений максимального оператора $\widehat{L}$

Пусть K - оператор, ставящий каждой функции $f(x)\in L_2(\Omega)$ в соответствие единственную функцию $h\in W_2^{2m}(\Omega)$, такой что $\|Kf\|_{L\ (\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}$. По выбранному оператору K построим множество

$$D_K = \{u(x)\in D(\hat{L}) : h = Kf\}.$$

На множестве D_K определим оператор

$$\hat{L}\Big|_{D_K} = L_K.$$

Из теоремы 3 следует, что L_K - корректное сужение максимального оператора $\widehat{L}$.

В заключении приведем другое описание оператора L_K в терминах граничных условий.

Теорема 5. *Пусть K - произвольный непрерывный оператор, действующий из $L_2(\Omega)$ в $D(\hat{L})$. Тогда неоднородное операторное уравнение $L_K u = f$ эквивалентно следующей краевой задаче:*

a) при $m = 2p$

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), x\in\Omega, \tag{19}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = K(\Delta_x^m u)\big|_{\partial\Omega}, \frac{\partial}{\partial n_x}u\Bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n_x}K(\Delta_x^m u)\Bigg|_{\partial\Omega}, ...,.$$

$$\Delta_x^{p-1}u\big|_{\partial\Omega} = \Delta_x^{p-1}K(\Delta_x^m u)\big|_{\partial\Omega}, \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}u\Bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}K(\Delta_x^m u)\Bigg|_{\partial\Omega}; \tag{20}$$

b) при $m = 2p+1$

$$u\big|_{\partial\Omega} = K(\Delta_x^m u)\big|_{\partial\Omega}, \frac{\partial}{\partial n_x}u\Bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n_x}K(\Delta_x^m u)\Bigg|_{\partial\Omega}, ...,.$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}u\Bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}K(\Delta_x^m u)\Bigg|_{\partial\Omega}, \Delta_x^p u\Bigg|_{\partial\Omega} = \Delta_x^p K(\Delta_x^m u)\big|_{\partial\Omega}. \tag{21}$$

Замечание 1. *Если R обратимый оператор на всем $L_2(\Omega)$, то граничные условия в (20) можно записать в виде*

$$Ru\big|_{\partial\Omega} = R(K(\Delta_x^m u))\big|_{\partial\Omega}, R\frac{\partial u}{\partial n_x}\bigg|_{\partial\Omega} = R\left(\frac{\partial K(\Delta_x^m u)}{\partial n_x}\right)\bigg|_{\partial\Omega}, \ldots,$$

$$R(\Delta_x^{p-1}u)\big|_{\partial\Omega} = R(\Delta_x^{p-1}K(\Delta_x^m u))\big|_{\partial\Omega}, R(\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}u)\bigg|_{\partial\Omega} = R(\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}K(\Delta_x^m u))\bigg|_{\partial\Omega}. \qquad (22)$$

Потому для проверки корректности граничной задачи нужно пытаться преобразовать граничные условия к виду (22).

Замечание 2. *Если линейный оператор L-есть корректное сужение максимального, то переходя к сопряженным, получаем корректные расширения минимального оператора, соответствующего формально сопряженному. Это приводит также к классу "нагруженных" уравнений.*

Замечание 3. *Отметим, что в теореме 3 в качестве K можно взять $K-$ нелинейные преобразования.*

Другие применения результатов М.Отелбаева в различных разделах теории дифференциальных уравнений можно найти в работах [23-26].

Работа выполнена при поддержке гранта AP 09559378 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука. 1974. - 808 с.
2. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2016. V. 61, № 1. - P. 104-123.
3. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. On an explicit form of the Green function of the Roben problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. V. 3, № 6. - P. 163-172.
4. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. 2008. V. 2, № 53. - P. 177-183. Doi: http://dx.doi.org/10.1080/17476930701671726
5. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equations in a ball // Siberian Mathematical Journal. 2008. V. 3, № 49. - P. 423-428. Doi: http://dx.doi.org/10.1007/s11202-008-0042-8
6. Kalmenov T.Sh., Suragan D. On a new method for constructing the Green's function of the Dirichlet problem for a polyharmonic equation // Differential Equations. 2012. T. 48, №3. - P. 435-438. Doi: http://dx.doi.org/10.1134/S0012266112030160
7. Begehr H. Biharmonic Green functions // Le matematiche. 2006. № 61. - P. 395-405.
8. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables and Elliptic Equations. 2013. V. 1, № 58. - P. 7-22.
9. Wang Y. Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables and Elliptic Equations. 2014. V. 5, № 59. - P. 732-749.
10. Begehr H., Vu T.N.H., Z.-X. Zhang. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. 2006. №255. – P. 13-34.
11. Begehr H., Du J., Wang Y. A Dirichlet problem for polyharmonic functions // Ann. Mat. Pura Appl. 2008. №187(4). – C. 435-457.

12. Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. 2009. №40(2). – P. 251-282.
13. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified harmonic Roben function // Complex Variables and Elliptic Equations. 2013. V. 4, № 58. – P. 483-496.
14. J.von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren // Math. Ann. 1929. V. 102. - P. 49-131.
15. Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Матем. о-ва. 1952. № 3. - С. 187-246.
16. Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Матем. сб. 1954. №35(77). - С. 1307-1311.
17. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. - С. 739-740.
18. Dezin A.A. Partial differential equations. - Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987.
19. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов I // Известие АН КазССР. Сер. физ-мат. 1982. № 5. - С. 24-27.
20. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов II // Известие АН КазССР. Сер. физ-мат. 1983. № 1. - С. 24-27.
21. Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. - 1983. Т. 6, № 271. - С. 1307-1311.
22. Ойнаров Р., Парасиди И.Н. Корректно разрешимые расширения операторов с конечными деффектами в банаховом пространстве // Известие АН КазССР. Сер. физ-мат. 1988. № 5. - С. 35-44.
23. Koshanov B.D., Otelbaev M.O. Correct Contractions stationary Navier-Stokes equations and boundary conditions for the setting pressure // AIP Conference Proceedings. 2016. №1759. V. 1759, 020005, http://dx.doi.org/10.1063/1.4959619
24. Kanguzhin B.E. Changes in a finite part of the spectrum of the Laplace operator unter delta-like perturbations // Differential Equations. 2019. V. 10, № 55. - P. 1428-1335.
25. Kanguzhin B.E., Tulenov K.S. Singular perturbations Changes of Laplace operator and their recolvents // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 9, № 65. - P. 1433-1444.
26. Biyarov B.N., Svistunov D.L., Abdrasheva G.K. Correct singular perturbations of the Laplace operator // Eurasian Mathematical Journal. 2020. V. 4, № 11. - P. 25-34.

REFERENCES

1. Sobolev S. L. Introduction to the theory of cubature formulas. - M.: Nauka, 1974. - 808 p.
2. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2016. V. 61, № 1. - P. 104-123.
3. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. On an explicit form of the Green function of the Roben problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. V. 3, № 6. - P. 163-172.
4. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. 2008. V. 2, № 53. - P. 177-183. Doi: http://dx.doi.org/10.1080/17476930701671726
5. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green’s function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equations in a ball // Siberian Mathematical Journal. 2008. V. 3, № 49. - P. 423-428. Doi: http://dx.doi.org/10.1007/s11202-008-0042-8

6. Kalmenov T.Sh., Suragan D. On a new method for constructing the Green's function of the Dirichlet problem for a polyharmonic equation // Differential Equations. 2012. T. 48, № 3. - P. 435-438. Doi: http://dx.doi.org/10.1134/S0012266112030160
7. Begehr H. It Biharmonic Green functions // Le matematiche. 2006. № 61. – P. 395-405.
8. Wang Y., Ye L. It Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables and Elliptic Equations. 2013. V. 1, № 58. - P. 7-22.
9. Wang Y., Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables and Elliptic Equations. 2014. V. 5, № 59. - C. 732-749.
10. Begehr H., Vu T.N.H., Z.-X. Zhang. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. 2006. № 255. – P. 13-34.
11. Begehr H., Du J., Wang Y. A Dirichlet problem for polyharmonic functions // Ann. Mat. Pura Appl. 2008. V. 4, № 187. – C. 435-457.
12. Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. 2009. V. 2, № 40. – P. 251-282.
13. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified harmonic Roben function // Complex Variables and Elliptic Equations. 2013. V. 4, № 58. – P. 483-496.
14. J.von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren // Math. Ann. 1929. V. 102. - P. 49-131.
15. Vishik M. I. On general boundary value problems for elliptic differential equations // Trudy Math. O-va. 1952. № 3. - P. 187-246.
16. Vishik M. I. Boundary value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of a domain // Matem. Sbor. 1954. №35 (77). - P. 1307-1311.
17. Bitsadze A.V., Samarsky A. A. On some simplest generalizations of linear elliptic boundary value problems // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1969. V. 185, № 4. - P. 739-740.
18. Dezin A.A. Partial differential equations. - Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987.
19. Kokebaev B. K., Otelbaev M., Shynybekov A. N. K teorii naruzheniya i razdaniya operatorov I // Izvestiya AN KazSSR. Ser. fiz-mat. 1982. № 5. - P. 24-27.
20. Kokebaev B. K., Otelbaev M., Shynybekov A. N. On the theory of narrowing and expansion of operators II // Izvestiya AN KazSSR. Ser. fiz-mat. 1983. № 1. - P. 24-27.
21. Otelbaev M., Kokebaev B. K., Shynybekov A. N. On the issues of expanding and narrowing operators / / Reports of the USSR Academy of Sciences. - 1983. V. 6, № 271. - P. 1307-1311.
22. Oynarov R., Parasidi I. N. Correctly solvable extensions of operators with finite defects in a Banach space / / Izvestiye AN KazSSR. Ser. fiz-mat. 1988. № 5. - P. 35-44.
23. Koshanov B.D., Otelbaev M.O. Correct Contractions stationary Navier-Stokes equations and boundary conditions for the setting pressure // AIP Conference Proceedings. 2016. № 1759. V. 1759, 020005, http://dx.doi.org/10.1063/1.4959619
24. Kanguzhin B.E. Changes in a finite part of the spectrum of the Laplace operator unter delta-like perturbations // Differential Equations. 2019. V. 10, № 55. – P. 1428-1335.
25. Kanguzhin B.E., Tulenov K.S. Singular perturbations Changes of Laplace operator and their recolvents // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 9, № 65. - P. 1433-1444.
26. Biyarov B.N., Svistunov D.L., Abdrasheva G.K. Correct singular perturbations of the Laplace operator // Eurasian Mathematical Journal. 2020. V. 4, № 11. - P. 25-34.