

Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің

ХАБАРЛАРЫ

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА,
ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesi'nin

HABERLERİ

MATEMATİK, FİZİK, BİLİŞİM SERİSİ

ИЗВЕСТИЯ

Международного казахско-турецкого университета имени Х.А. Ясави

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА,
ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

NEWS

Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University

MATHEMATICS, PHYSICS,
COMPUTER SCIENCE SERIES

ISSN 2524-0080
Ғылыми журнал

*Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-
түрік университетінің*

ХАБАРЛАРЫ

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesinin

HABERLERİ

МАТЕМАТİK, FİZİK, BİLİŞİM SERİSİ

ИЗВЕСТИЯ

*Международного казахско-турецкого университета имени
Ходжа Ахмеда Ясави*

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

NEWS

Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University
MATHEMATICS, PHYSICS, COMPUTER SCIENCE SERIES

*Қазақстан Республикасы Инвестициялар және даму министрлігінің Байланыс,
ақпараттандыру және ақпарат комитетінде 04.12.2015 ж. тіркелді, куәлік №15721-Ж.*

*Қазақстан Республикасы Ақпарат және коммуникациялар министрлігінің Байланыс,
ақпараттандыру және бұқаралық ақпарат құралдары саласындағы мемлекеттік
бақылау комитетінде 10.03.2017 ж. қайта тіркелген, куәлік №16387-Ж. Жылына 4 рет
шығарылады.*

Ғылыми басылым

*Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары
(математика, физика, информатика сериясы) №2 (33) 2025 ж.*

*Журнал 2016 жылдың мамыр айының 30 жұлдызынан бастап
Париж қаласындағы ISSN орталығында тіркелген.*

Редакцияның мекен-жайы:

*Редакцияның мекен-жайы: 161200, Қазақстан Республикасы, Түркістан қаласы,
Б. Саттарханов даңғылы, 29В, ректорат, 404 бөлме.
Байланыс тетіктері: 8(725-33)6-38-26(19-60)
e-mail: ayu-habarlari@ayu.edu.kz*

РЕДАКЦИЯЛЫҚ АЛҚА МҮШЕЛЕРІ

МАТЕМАТИКА

Баканов Г.Б.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Турметов Б.Х.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Бөріханов М.	- PhD /Қазақстан/
Сәрсенби Ә.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Нұрсұлтанов Е.Д.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Ескендіроғлы Г.	- PhD /Түркия/
Мораес В.	- PhD /Бразилия/

ФИЗИКА

Турмамбеков Т.А.	- ф.-м.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Сейтов Б.Ж.	- PhD / Қазақстан /
Рахадиллов Б.К.	- PhD, қауым.проф. / Қазақстан /
Сағдолдина Ж.Б.	- PhD, қауым.проф. / Қазақстан /
Чорух А.	- проф., доктор /Түркия/
Демиркоз М.Б.	- проф., доктор /Түркия/
Курбанов У.Т.	- ф.-м.ғ.д. /Өзбекістан/

ИНФОРМАТИКА

Мамырбек Ә.Ж.	- PhD, проф. /Қазақстан/
Бидайбеков Е.Ы.	- п.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Беркимбаев К.М.	- п.ғ.д., проф. /Қазақстан/
Казбекова Г.Н.	- тех.ғ.к., доц. /Қазақстан/
Жумадилаева А.К.	- тех.ғ.к., доц. /Қазақстан/
Ақчайол М.А.	- проф., доктор /Түркия/
Караджан Х.	- проф., доктор /Түркия/

DANIŞMA KURULU

MATEMETİK

Bakanov G.B.	- Fiz.-Mat. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Turmetov B.Kh.	- Fiz.-Mat. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Borikhanov M.	- PhD /Kazakistan/
Sarsenbi A.	- Fiz.-Mat. Bil. Dr. /Kazakistan/
Nursultanov E.D.	- Fiz.-Mat. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Yeskendirolu G.	- PhD /Türkiye/
Moraes W.	- PhD /Brazil/

FİZİK

Turmambekov T.A.	- Fiz.-Mat. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Seyitov B.Zh.	- PhD /Kazakistan/
Rakhadilov B.K.	- PhD, Doç. Dr. /Kazakistan/
Sagdoldina Zh.B.	- PhD., Doç. Dr. /Kazakistan/
Çoruh A.	- Prof. Dr. /Türkiye/
Melehat B.D.	- Prof. Dr. /Türkiye/
Kurbanov U.T.	- Fiz.-Mat. Bil. Dr. /Uzbekistan/

BİLİŞİM SERİSİ

Mamyrbek O.Zh.	- PhD, Prof. /Kazakistan/
Bidaibekov E.	- Ped. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Berkimbayev K.	- Ped. Bil. Dr., Prof. /Kazakistan/
Kazbekova G.N.	- Ped. Bil. Dr., Doç. Dr. /Kazakistan/
Kanadilova A.Zh.	- Ped. Bil. Dr., Doç. Dr. /Kazakistan/
Akchayol M.A	- Prof. Dr. /Türkiye/
Karajan H.	- Prof. Dr. /Türkiye/

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

МАТЕМАТИКА

Баканов Г.Б.	- д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Турметов Б.Х.	- д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Бориханов М.	- PhD /Казахстан/
Сарсенби А.	- д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Нурсултанов Е.Д.	- д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Ескендируглу Г.	- PhD /Турция/
Мораес В.	- PhD, проф. /Бразилия/

ФИЗИКА

Турмамбеков Т.А.	- д.ф.-м.н., проф. /Казахстан/
Сейтов Б.Ж.	- PhD /Казахстан/
Рахадиллов Б.К.	- PhD, ассоц., проф. /Казахстан/
Сагдолдина Ж. Б.	- PhD, ассоц., проф. /Казахстан/
Чорух А.	- проф., доктор /Турция/
Мелехат Б.Д	- проф., доктор /Турция/
Курбанов У.Т.	- д.ф.-м.н. /Узбекистан/

ИНФОРМАТИКА

Мамырбек О.Ж	- PhD, проф. /Казахстан/
Бидайбеков Е.Ы.	- д.п.н., проф./Казахстан/
Беркимбаев К.М.	- д.п.н., проф. /Казахстан/
Казбекова Г.Н.	- д.п.н., доц. /Казахстан/
Жумадилаева А.К.	- д.п.н., доц. /Казахстан/
Акчайол М.А.	- проф., доктор /Турция/
Караджан Х.	- проф., доктор /Турция/

EDITORIAL BOARD

MATHEMATICS

Bakanov G.B.	- D.Sc. Phys.-Math., Prof. /Kazakhstan/
Turmetov B.Kh.	- D.Sc. Phys.-Math., Prof. /Kazakhstan/
Borikhanov M.	- PhD, /Kazakhstan/
Sarsenbi A.	- D.Sc. Phys.-Math. /Kazakhstan/
Nursultanov E.D.	- D.Sc. Phys.-Math., Prof. /Kazakhstan/
Yeskendioglu G.	- PhD /Turkey/
Moraes W.	- PhD /Brazil/

PHYSICS

Turmambekov T.A.	- D.Sc. Phys.-Math., Prof./Kazakhstan/
Seyitov B.Zh.	- PhD /Kazakhstan/
Rakhadilov B.K.	- PhD., Assoc. Prof. /Kazakhstan/
Sagdoldina Zh.B.	- PhD., Assoc. Prof. /Kazakhstan/
Coruh A.	- Prof. Dr. /Turkey/
Melehat B.D.	- Prof. Dr. /Turkey/
Kurbanov U.T.	- D.Sc. Phys.-Math. /Uzbekistan/

COMPUTER SCIENCE

Mamyrbek O.Zh.	- PhD., Prof. /Kazakhstan/
Bidaibekov E.	- Dr. Ped. Sc., Prof. /Kazakhstan/
Berkimbayev K.	- Dr. Ped. Sc., Prof. /Kazakhstan/
Kazbekova G.N.	- Dr. Ped. Sc., Assoc. Prof. /Kazakhstan/
Kanadilova A.Zh.	- Dr. Ped. Sc., Assoc. Prof. /Kazakhstan/
Akchayol M.A.	- Prof. Dr. /Turkey/
Karajan H.	- Prof. Dr. /Turkey/

Усманов К.И.¹, Зикиш З.А.²

¹доцент, физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz

²магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: zarifa.zikish@ayu.edu.kz

ПАНТОГРАФ ТИПТЕГІ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕТТІК
ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ
SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF PANTOGRAPH TYPE
РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО -ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ТИПА ПАНТОГРАФА

Аңдатпа. Пантограф типіндегі алғашқы теңдеулер 1940 жылы М. Mahler-дің еңбектерінде қарастырылып, сандар теориясында аргументті сығатын функционалдық-дифференциалдық теңдеулерді қолданудың негізі қаланды. 1971 жылы J. Ockendon мұндай теңдеулерді электровоз тоққабылдағышының қозғалысын модельдеу үшін пайдаланған. Соңғы онжылдықтарда пантограф тектес теңдеулер техника мен құрылыста кеңінен қолданыс табуда: бапталатын (пантограф) телефон ұстағыштар, ұзартылатын (пантограф) микрофон жүйелері және т. с. с.

Осы мақалада пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне арналған екі нүктелі шеттік есеп зерттеледі. Шешуді табу үшін профессор Д. Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісі қолданылады. Аралық тең ұзындықты m бөлікке бөлінеді; ізделінетін функцияның мәндері әр бөлікке тән бастапқы нүктеде $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ параметрлері арқылы белгіленеді, ал ішкі интервалдарда $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ түріндегі алмастыру енгізіледі.

Нәтижесінде бастапқы шеттік есеп формальді түрде екі өзара байланысты қосалқы есепке ажырайды:

1. пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық жүйе үшін арнайы Коши есебі;
2. енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

Осылайша алынған пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық жүйесі үшін арнайы Коши есебі мен енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі-тұйықталған жүйе құрайды және ол тұйық жүйе бастапқы шеттік есептің шешімін толық анықтайды. Мақалада аталған құрылымға негізделген есептеу алгоритмі ұсынылып, оның пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық модельдерді сандық талдаудағы тиімділігі талқыланады.

Негізгі сөздер: пантограф, шеттік есеп, Коши есебі, сызықтық теңдеулер жүйесі, алгоритм, интегралдық-дифференциалдық теңдеу, параметр, жуықтау.

Abstract. The first equations of the pantograph type were considered in the works of M. Mahler in 1940, which laid the foundation for the use of functional-differential equations with argument compression in number theory. In 1971, J. Ockendon used such equations to model the movement of the current collector of an electric locomotive. In recent decades, pantograph-type equations have been widely used in engineering and construction: adjustable (pantograph) telephone holders, retractable (pantograph) microphone systems, etc.

This article studies a two-point boundary value problem for a system of functional-differential equations of the pantograph type. The parameterization method proposed by Professor D. Jumabayev is used to find a solution. The interval is divided into parts of equal length; the values of the desired function are determined by parameters at the initial point characteristic of each part, and substitutions of a specific form are introduced in the inner intervals. As a result, the original boundary value problem is formally decomposed into two interrelated subproblems:

1. a special Cauchy problem for the functional-differential system of the pantograph type;
2. a system of linear algebraic equations with respect to the input parameters.

The special Cauchy problem for the functional-differential system of the pantograph type and the system of linear algebraic equations with respect to the input parameters obtained in this way form a closed system, and this closed system completely determines the solution of the original boundary value problem. The article presents a

computational algorithm based on the above structure and discusses its effectiveness in the numerical analysis of pantograph-type functional-differential models.

Keywords: pantograph, boundary value problem, Cauchy problem, system of linear equations, algorithm, integro-differential equation, parameter, approximation.

Аннотация. Первые уравнения типа пантографа были рассмотрены в работах М. Mahler в 1940 году, что заложило основу использования функционально-дифференциальных уравнений со сжатием аргумента в теории чисел. В 1971 году J. Ockendon использовал такие уравнения для моделирования движения токоприемника электровоза. В последние десятилетия уравнения типа пантографа широко используются в технике и строительстве: регулируемые (пантографные) телефонные держатели, выдвижные (пантографные) микрофонные системы и т. д.

В данной статье изучается двухточечная краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений типа пантографа. Для поиска решения используется метод параметризации, предложенный профессором Д. Джумабаевым. Интервал разбивается на части одинаковой длины; значения искомой функции определяются параметрами в начальной точке, характерными для каждой части, а во внутренних интервалах вводятся подстановки вида.

В результате исходная краевая задача формально раскладывается на две взаимосвязанные подзадачи:

1. специальная задача Коши для функционально-дифференциальной системы типа пантограф;
2. система линейных алгебраических уравнений относительно входных параметров.

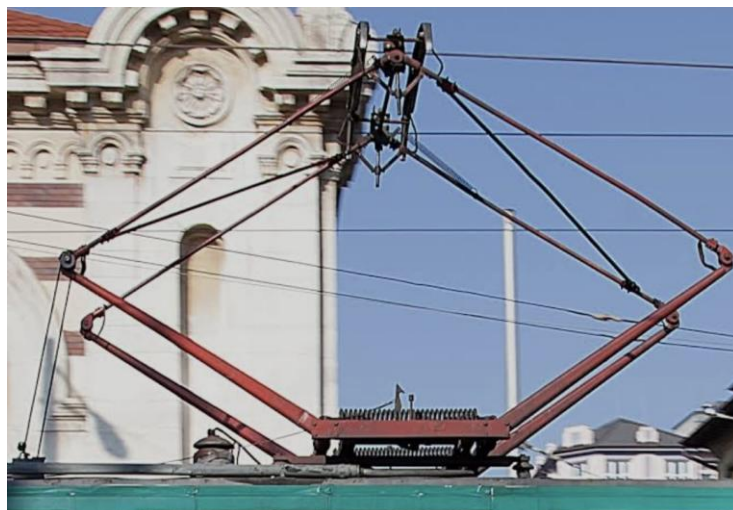
Полученная таким образом специальная задача Коши для функционально-дифференциальной системы типа пантограф и система линейных алгебраических уравнений относительно входных параметров образуют замкнутую систему, и эта замкнутая система полностью определяет решение исходной краевой задачи. В статье

представлен вычислительный алгоритм, основанный на приведенной выше структуре, и обсуждается его эффективность при численном анализе функционально-дифференциальных моделей типа пантограф.

Ключевые слова: пантограф, краевая задача, задача Коши, система линейных уравнений, алгоритм, интегро-дифференциальное уравнение, параметр, приближение.

Кіріспе

Функционалдық-дифференциалдық тендеулер қазіргі заманғы қолданбалы математикада кеңінен зерттелетін маңызды бағыттардың бірі болып табылады. Осындай тендеулердің бір ерекше класы пантограф типтегі тендеулер болып табылады, ол сығушы немесе түрлендірілген аргументтері бар функцияларды камтиды және әртүрлі табиғи және техникалық процестерді модельдеуде жиі кездеседі.



Сурет 1. Пантограф

Пантограф типтегі тендеулер алғаш рет 1940 жылы Mahler-дің [1] еңбегінде пайда болды. Ол бұл тендеулерді сандар теориясында қолданып, сығушы аргументтері бар

функционалдық-дифференциалдық теңдеулердің маңыздылығын көрсетті. Кейінірек 1971 жылы J. Ockendon [2]

$$y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$$

пантограф типіндегі теңдеулерді электровоздың ток қабылдағышының (пантографтың) қозғалысын сипаттау үшін қолданды. Бұл жұмыста түрлендірілген аргументі бар функционалдық-дифференциалдық теңдеулердің нақты модельдерде қолданылатындығын көрсетеді.

1972 жылы G. R. Morris, A. Feldstein және E. W. Bowen [3] өз еңбектерінде пантограф типтегі теңдеудің кейбір түрлерінің

$$y'(x) = -ay(\varepsilon x), \quad y(0) = 1$$

шексіз көп нөлдері болатынын және бұл нүктелерде бастапқы есептің шешімі жалғыз болмауы немесе мүлде болмауы мүмкін екенін көрсетті. Бұл нәтиже мұндай теңдеулердің шешімдерінің тұрақтылығын зерттеудің маңызын арттырды.

Пантограф теңдеулерін тереңірек зерттеу мақсатында Быков [4] екінші ретті пантограф типтес теңдеулерді қарастырып, жалпыланған экспоненциалдық, косинус және синус функцияларын енгізді.

$$e_{\varepsilon}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t^k}{k!}, \quad \cos_{\varepsilon}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k-1)} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin_{\varepsilon}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k+1)} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Бұл функциялар осы типтегі теңдеулердің шешімдерін сипаттау үшін қолданылады және олардың аналитикалық қасиеттері анықталды.

Сонымен қатар, A. Iserles және Y. Liu [5] жалпыланған гипергеометриялық функцияларды

$$y'(t) = ay(t) + \int_0^1 y(\varepsilon s) ds + \int_0^1 y'(\varepsilon s) ds, \quad t > 0,$$

$$y(t) + \int_0^1 y(\varepsilon s) ds + \int_0^1 y'(\varepsilon s) ds = 0, \quad t > 0,$$

интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін табу үшін пайдаланса, Родионов [6] өз жұмысында

$$f(x) * g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} f_i g_j \varepsilon^{ij} \frac{x^k}{k!},$$

арнайы алгебралық құрылымдар мен көбейту амалдарын қолданып, пантограф типті теңдеулердің шешімін табудың жаңа тәсілдерін ұсынды. Ол енгізген амалдарға байланысты жалпыланған тригонометриялық функциялардың да қасиеттері сипатталған.

$$\sin_{\varepsilon}(x) * \sin_{\varepsilon}(x) + \cos_{\varepsilon}(x) * \cos_{\varepsilon}(x) = 1.$$

Бүгінде пантограф типіндегі теңдеулер тек теориялық қызығушылық тудырып қана қоймай, нақты қолданбалы есептерде де жиі қолданылады. Мысалы, пантографтық телескопиялық құрылғылар, микрофон тұтқалары, реттелетін механикалық жүйелер—барлығы осындай теңдеулердің көмегімен сипатталуы мүмкін. Осыған байланысты бұл типтегі теңдеулерді зерттеу өзектілігін жоғалтпай, әрі қарай дамытуды қажет етеді.



Сурет 2. Пантографты тіреуіш

Нәтижелер мен талқылау

$[0,1]$ кесіндісінде пантограф типтегі функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есеп қарастырамыз

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 K_1(t,s)x(s)ds + \int_0^1 K_2(t,s)\dot{x}(s)ds + f(t), \quad \varepsilon = \frac{1}{m} < 1, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d, \quad (2)$$

(1) теңдеуде $A(t)$ матрицасы мен $f(t)$ вектор-функциясы $[0,1]$ аралығында үзіліссіз, ал $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$ өзегтері сәйкесінше $[0,1] \times [0,1]$ аралығында үзіліссіз болсын. B, C - n өлшемді квадратты матрица, ал d - n өлшемді вектор. $\max_{t \in [0,1]} \|A(t)\| \leq \alpha$, $\max_{t,s \in [0,1]} \|K_1(t,s)\| \leq \beta_1$.

Зерттеліп отырған есептің шешімін табу үшін профессор Д. Джумабаев әзірлеген параметрлеу әдісі пайдаланылады [7]. Аталмыш әдіс бастапқыда екі нүктелі шеттік есептері бар қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін конструктивті түрде құру үшін ұсынылған. Кейінірек оның қолданылу аясы кеңейіп, әдіс дифференциалдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне тиесілі алуан түрлі шеттік қойылымдарды талдауда табысты апробациядан өтті [8–11].

[12] жұмыста пантограф тектес қарапайым дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шеттік есеп қарастырылған болатын.

$$y'(x) = \lambda y(\varepsilon x) + f(x), \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$ay(0) + by(1) = d.$$

Параметризация әдісін қолдану арқылы, есептің бірімәнді шешімділігі орнатылған болатын. Ал, [13] жұмыста пантограф тектес интегралдық дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі есеп қарастырылып, оның шешімін анықтау алгоритмі келтірілген болатын.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad \varepsilon = \frac{1}{m} < 1,$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d ,$$

Шарт А.

$$z(t) = \int_0^1 K_2(t,s)z(s)ds + F(t) \quad (3)$$

Фредгольм тектес интегралдық теңдеу кез-келген $F(t) \in C([0,1], R^n)$ функциясы үшін бірімәнді шешімділі болсын.

Егер А шарты орындалса, онда (3) Фредгольм тектес теңдеудің $K_2(t,s)$ өзегі үшін $\Gamma_2(t,s;1)$ -резольвентасы табылып, (3) интегралдық теңдеудің шешімін [14]

$$z^*(t) = F(t) + \int_0^1 \Gamma_2(t,s;1)F(s)ds ,$$

түрінде жазуға болады және ол үшін

$$\|z^*(t)\|_1 \leq (1+\omega) \|F(t)\|_1$$

$$\text{мұндағы } \omega = \max_{t,s \in [0,1] \times [0,1]} \|\Gamma_2(t,s;1)\| .$$

(1), (2) есебін шешу үшін, алдымен А шартын қолданайық. Сонда (1), (2) шеттік есебін келесі түрде жазуға болады.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 K_1(t,s)x(s)ds + f(t) + \int_0^T \Gamma_2(t,\tau;1) \left[A(\tau)x(\varepsilon \tau) + \int_0^1 K_1(\tau,s)x(s)ds + f(\tau) \right] d\tau , \quad (4)$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d . \quad (5)$$

Екі еселі интегралдың қасиетін қолдансақ

$$\int_0^T \Gamma_2(t,s;1) \int_0^T K_1(\tau,s)x(s)ds d\tau = \int_0^T \int_0^T \Gamma_2(t,\tau;1) K_1(\tau,s)x(s)ds d\tau = \int_0^T K_{12}(t,s)x(s)ds$$

$$\text{мұндағы, } K_{12}(t,s) = \int_0^T \Gamma_2(t,\tau;1) K_1(\tau,s) d\tau \text{ және}$$

$$\tilde{K}_1(t,s) = \Gamma_2(t,\tau;1)A(\tau) + K_{12}(t,s) + K_1(t,s) ,$$

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \int_0^t \Gamma_2(t, \tau; 1) f(\tau) d\tau$$

белгілеулерін енгізсек, онда (4), (5) шеттік есебін келесі түрде жазуға болады

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 \tilde{K}_1(t, s)x(s)ds + \tilde{f}(t), \quad \varepsilon = \frac{1}{m} < 1, \quad (6)$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d, \quad (7)$$

Берілген есепке шешу үшін параметрлеу әдісін қолданайық [13], ол үшін қарастырылып отырған $[0, 1]$ кесіндісін m аралықтарға бөлейік: $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^m [t_{i-1}, t_i]$, $t_0 = 0, t_{i+1} = t_i + \frac{1}{m}, i = \overline{1, m}$. Аралықты осылай бөлу $0 \leq \varepsilon t < \varepsilon$ аралығында жатуын қамтамасыз етеді және $h = \frac{1}{m}$.

$x_i(t) - x(t)$ функциясының әрбір $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, m}$ аралығындағы мәндері болсын. Онда (1), (2) есебін келесі эквивалент есеппен ауыстыруымызға болады.

$$\frac{dx_i}{dt} = A(t)x_1(\varepsilon t) + \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(t, s)x_j(s)ds + \tilde{f}(t), \quad [t_{i-1}, t_i], i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \rightarrow 1} x_m(t) = d, \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_p - 0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p), \quad p = \overline{1, m-1}. \quad (10)$$

$x_i(t)$ функциясының $t = t_{i-1}, i = \overline{1, m}$ нүктелеріндегі мәндерін λ_i арқылы белгілеп алайық, яғни $\lambda_i = x_i(t_{i-1}), i = \overline{1, m}$ және $[t_{i-1}, t_i]$ аралығында $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ алмастыруын жасайық. Сонда,

$$\frac{du_i}{dt} = A(t)[u_1(\varepsilon t) + \lambda_1] + \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(t, s)[u_j(t) + \lambda_j] + \tilde{f}(t), i = \overline{1, m}, \quad (11)$$

$$u_i[t_{i-1}] = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_m + C \lim_{t \rightarrow 1} u_m(t) = d, \quad (13)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow t_p - 0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, m-1}. \quad (14)$$

Осылайша, (11)–(14) жүйесін формальды түрде өзара байланысқан екі есепке ажыратуға болады.

1. **Негізгі (Коши) есеп.** (11) және (12) пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне бастапқы шарттар қойып, ізделінетін $u_i(t)$ функцияларын анықтаймыз.
2. **Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.** (13) және (14) λ_i енгізілген параметрлеріне қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

Егер λ_i параметрлері алдын ала белгілі деп есептелсе, онда (11)–(12) пантограф типіндегі жүйе үшін Коши есебінің шешімі келесі интегралдық теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$u_i(t) = \int_{t_{i-1}}^t A(\tau) u_1(\varepsilon \tau) d\tau + \int_{t_{i-1}}^t A(\tau) d\tau \cdot \lambda_1 + \int_{t_{i-1}}^t \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau + \\ + \int_{t_{i-1}}^t \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) ds d\tau \cdot \lambda_j + \int_{t_{i-1}}^t \tilde{f}(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{i-1}, t_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Лемма (Гронуолла-Беллман). $a(t)$ және $h(t)$ функциялары $[t_0, t]$ аралығында анықталған және $h(t) \geq 0$, $a(t) \geq 0$ болсын, мұнда t_0 - бастапқы уақыт, t ағымдағы уақыт. Егер,

$$a(t) \leq c + \int_{t_0}^t h(s) a(s) ds$$

онда

$$a(t) \leq c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t h(s) ds\right)$$

(10) интегралдық теңдеулер жүйесіне біртеңдеп жуықтау әдісін қолданайық, мұнда $\varepsilon = \frac{1}{m} < 1$ болғандықтан, $[0, 1]$ аралығында $\|A(\varepsilon t)\| \leq \|A(t)\| \leq \alpha$. Әрбір қадамда Гронуолла-Беллман теңсіздігін қолдансақ және [9] мақаладағы дәлелдеуге сүйенсек, онда келесі тұжырымды дәлелдеуге болады:

Теорема 1. Егер

$$\delta_\varepsilon = e^{\alpha \varepsilon} \beta \varepsilon < 1$$

шарты орындалса, онда (6), (7) функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешімі жалғыз. Мұнда $\|\tilde{K}_1(t, s)\| \leq \omega(\alpha + T^2 \beta_1) + \beta_1 \leq \beta$.

(15) интегралдық теңдеулер жүйесінен $\lim_{t \rightarrow t_i - 0} u_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ шектерді анықтайық және λ_i енгізілген параметрлерін анықтау үшін (13), (14) шеттік шарттарына қояйық, сонда енгізілген параметрлерге қатысты келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

$$B\lambda_1 + C\lambda_m + C \left(\int_{t_{m-1}}^1 A(\tau) u_1(\varepsilon \tau) d\tau + \int_{t_{m-1}}^1 A(\tau) d\tau \cdot \lambda_1 + \int_{t_{m-1}}^1 \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau + \right.$$

$$+ \int_{t_{m-1}}^1 \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) ds d\tau \cdot \lambda_j + \int_{t_{m-1}}^1 \tilde{f}(\tau) d\tau \Big) = d, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_p + \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau) u_1(\varepsilon \tau) d\tau + \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau) d\tau \cdot \lambda_1 + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau + \\ & + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) ds d\tau \cdot \lambda_j + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \tilde{f}(\tau) d\tau = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

немесе

$$\begin{aligned} & \left(B + C \int_{t_{m-1}}^1 A(\tau) d\tau \right) \lambda_1 + C \int_{t_{m-1}}^1 \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) ds d\tau \cdot \lambda_j + C \lambda_m = \\ & = d - C \int_{t_{m-1}}^1 \tilde{f}(\tau) d\tau - C \int_{t_{m-1}}^1 A(\tau) u_1(\varepsilon \tau) d\tau - C \int_{t_{m-1}}^1 \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left(I + \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau) d\tau \right) \cdot \lambda_p + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) ds d\tau \cdot \lambda_j - \lambda_{p+1} = - \int_{t_{p-1}}^{t_p} \tilde{f}(\tau) d\tau - \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau) u_p(\tau) d\tau - \\ & - \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}(\tau, s) u_j(s) ds d\tau, \quad p = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

$Q_\varepsilon(h)$ арқылы (18), (19) теңдеулер жүйесінде λ_i параметрлеріне қатысты матрицаны, $F_\varepsilon(h)$ арқылы оң жағындағы $\tilde{f}(t)$ өрнегіне сәйкес келетін интегралдарды, $G_\varepsilon(u, h)$ арқылы $u_i(t)$ мүшелері бар интегралдарды белгілеп алайық, яғни

$$F_\varepsilon^T(h) = \left(d - \int_{t_{m-1}}^1 \tilde{f}(\tau) d\tau, \int_{t_0}^{t_1} \tilde{f}(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} \tilde{f}(\tau) d\tau \right)$$

$$G_\varepsilon^T(u, h) = (G_{\varepsilon, m}(u, h), G_{\varepsilon, 1}(u, h), \dots, G_{\varepsilon, m-1}(u, h)),$$

$$\text{мұндағы, } G_{\varepsilon, i}(u, h) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\tau) u_1(\tau) d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau, \quad i = \overline{1, m}.$$

Сонда,

$$Q_\varepsilon(h) \lambda = -F_\varepsilon(h) - G_\varepsilon(u, h). \quad (20)$$

Сонымен, $(\lambda, u[t])$ мәндері (15), (20) тұйық жүйесінен келесі алгоритм арқылы анықталады:

1-қадам. $Q_\varepsilon(h)$ матрицасының анықтаушы нөлден өзгеше болсын, яғни кері матрицасы бар болсын. Онда $Q_\varepsilon(h)\lambda = -F_\varepsilon(h)$ теңдеулер жүйесінен $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) \in R^{nm}$ параметрлерінің бастапқы жуықталған мәнін анықтаймыз, яғни $\lambda^{(0)} = -[Q_\varepsilon(h)]^{-1} F_\varepsilon(h)$.

б) табылған параметрлерді (11) пантограф тектес функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне қойып, (12) шартты пайдаланып, функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің жуықталған шешімін анықтаймыз:

$$u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_m^{(0)}(t)).$$

Процесті жалғастыра отырып, k -шы қадамда $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, \dots$ жұптарының жүйесін анықтаймыз.

Анықталған $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m) \in R^{nm}$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_m(t))$ параметрлер мен функциялардың элементтерінен құрылған $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ жұбы (11) - (14) есебінің шешімі болады, ал өз кезегінде $\tilde{x}(t) = \tilde{u}_r(t) + \tilde{\lambda}_r$, $\tilde{x}(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_m(t) + \tilde{\lambda}_m$, $r = \overline{1, m}$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$ арқылы (1), (2) есебінің жуықталған шешімін анықтауға болады.

Қорытынды

Осы зерттеуде пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық теңдеудің шеттік есебін талдауға профессор Д. Джумабаевтың параметрлеу әдісі қолданылды. Жүйеге қосымша айнымалылар енгізу арқылы бастапқы пантографтық теңдеулер жүйесі Коши есебіне түрлендіру мүмкіндігі көрсетілді. Сығушы операторлардың қасиетін пайдаланып, кіші аралықта Коши есебінің жалғыз шешімі бар болатындығы көрсетілді. Бұдан бөлек, есептің жуық шешімін есептеу үшін тиімді итерациялық алгоритм ұсынылды. Алынған әдістемелік және теориялық нәтижелер пантограф типтес дербес туындылы интегро-дифференциалдық теңдеулердің кең ауқымына қолданылып, олардың шеттік есептерін сандық тұрғыдан шешуге негіз бола алады.

Алғыс

This research has been/was/is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26197913)

Әдебиеттер тізімі

1. Mahler, K. (1940). On a special functional equation. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(2), 115-123.
2. Fox, L., Mayers, D. F., Ockendon, J. R., & Tayler, A. B. (1971). On a functional differential equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 8(3), 271-307.
3. Morris, G. R., Feldstein, A., & Bowen, E. W. (1972). The Phragmén-Lindelöf principle and a class of functional differential equations. In *Ordinary differential equations* (pp. 513-540). Academic Press.
4. Bykov, Y. V., Bykova, L. Y., & Shevtsov, E. I. (1973). Sufficient conditions for the oscillatory nature of solutions of nonlinear differential equations with deviating argument. *Differential Equations*, 9(9), 1555-1560.
5. Iserles, A., & Liu, Y. (1997). Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 208(2), 404-424.
6. Родионов, В. И. (2021). *Применение алгебраических систем в теории дифференциальных уравнений*. Изд. центр «Удмуртский университет».

7. Воробьев, А. А., Ватулин, Я. С., & Каримов, Д. Д. (2021). Повышение эффективности пантографа электроподвижного состава. *Системы автоматизированного проектирования на транспорте*, 66–67.
8. Воробьев, А. А., Ватулин, Я. С., & Каримов, Д. Д. (2021). Воздействие воздушного потока на аэродинамическое устройство для пантографа. *Известия Петербургского университета путей сообщения*, 18(4), 453–459.
9. Воробьев, А. А., Ватулин, Я. С., & Каримов, Д. Д. (2021). Воздействие воздушного потока на аэродинамическое устройство для пантографа. *Известия Петербургского университета путей сообщения*, 18(4), 453–459.
10. Рукавишников, П. В., Скуріхін, Д. І., & Рибін, А. В. (2024). Застосування армованого вуглецевим волокном пластику для підвищення енергоефективності рейкових транспортних засобів. In *Шановні учасники конференції!* (р. 200).
11. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34–46.
12. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34–46.
13. Dzhumabayev, D. (2018). Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(4), 1439–1462.
14. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021, July). Unique solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution. In *American Institute of Physics Conference Series* (Vol. 2365, No. 1, p. 070012).
15. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021). On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution. *International Journal of Applied Mathematics*, 34(2), 225.
16. Усманов, К., & Мамидова, М. (2025). Пантограф типтегі интегралдық-дифференциалдық тендеулерге параметрлеу әдісін қолдану. *Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары*, 1(32).
17. Абибулла, Д., & Усманов, К. И. (2024). Об одном подходе решения краевых задач для дифференциального уравнения типа пантографа. *Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары*, 1(28).
18. Вольтерра, В. (1982). *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* (304 с.). М.: Наука.

References

1. Mahler, K. (1940). On a special functional equation. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(2), 115–123.
2. Fox, L., Mayers, D. F., Ockendon, J. R., & Tayler, A. B. (1971). On a functional differential equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 8(3), 271–307.
3. Morris, G. R., Feldstein, A., & Bowen, E. W. (1972). The Phragmén-Lindelöf principle and a class of functional differential equations. In *Ordinary differential equations* (pp. 513–540). Academic Press.
4. Bykov, Y. V., Bykova, L. Y., & Shevtsov, E. I. (1973). Sufficient conditions for the oscillatory nature of solutions of nonlinear differential equations with deviating argument. *Differential Equations*, 9(9), 1555–1560.
5. Iserles, A., & Liu, Y. (1997). Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 208(2), 404–424.
6. Rodionov, V. I. (2021). *Primenenie algebricheskikh sistem v teorii differentsial'nykh uravnenii*. Izd. tsentr "Udmurtskii universitet".
7. Vorob'ev, A. A., Vatulin, Ya. S., & Karimov, D. D. (2021). Povishenie effektivnosti pantografa elektropodvizhnogo sostava. *Sistemy avtomatizirovannogo proektirovaniya na transporte*, 66–67.
8. Vorob'ev, A. A., Vatulin, Ya. S., & Karimov, D. D. (2021). Vozdeistvie vozdushnogo potoka na aerodinamicheskoe ustroistvo dlya pantografa. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putei soobshcheniya*, 18(4), 453–459.
9. Vorob'ev, A. A., Vatulin, Ya. S., & Karimov, D. D. (2021). Vozdeistvie vozdushnogo potoka na aerodinamicheskoe ustroistvo dlya pantografa. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putei soobshcheniya*, 18(4), 453–459.

10. Rukavishnikov, P. V., Skurikhin, D. I., & Rybin, A. V. (2024). Zastosuvannia armanogo vugletsevyim voloknom plastiku dlya pidvishchennia energoefektyvnosti reikovyh transportnyh zasobiv. In *Shanovni uchashnyky konferentsii!* (p. 200).
11. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34–46.
12. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34–46.
13. Dzhumabayev, D. (2018). Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(4), 1439–1462.
14. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021, July). Unique solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution. In *American Institute of Physics Conference Series* (Vol. 2365, No. 1, p. 070012).
15. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021). On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution. *International Journal of Applied Mathematics*, 34(2), 225.
16. Usmanov, K., & Mamidova, M. (2025). Pantograf tiptegi integraldyk-differentsialdyk teñdeulerge parametrleu ädisin qoldanu. *Q.A.Yasaui atyndagy Khalyqaralyq qazaq-türk universitetiniñ khabarlary*, 1(32).
17. Abibulla, D., & Usmanov, K. I. (2024). Ob odnom podkhode resheniya kraevykh zadach dlya differentsial'nogo uravneniya tipa pantografa. *Q.A.Yasaui atyndagy Khalyqaralyq qazaq-türk universitetiniñ khabarlary*, 1(28).
18. Volterra, V. (1982). *Teoriya funktsionalov, integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravnenii* (304 s.). M.: Nauka.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Усманов К.И. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
	Usmanov K.I. – candidate of Physics and Mathematics, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
	Усманов К. И. – кандидат физика-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
2	Зикиш З.А. – магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: zarifa.zikish@ayu.edu.kz , +7 705 356 6615
	Zikish Z.A. – master student, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: zarifa.zikish@ayu.edu.kz , +7 705 356 66 15
	Зикиш З.А. – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: zarifa.zikish@ayu.edu.kz , +7 705 356 6615

Шалхар А.Ә.¹, Турметов Б.Х.², Қошанова М.Д.³

¹докторант, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

(Қазақстан, Астана қ.), e-mail: shalkhar_aa@enu.kz

²ф.-м.ғ.д., профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

³ф.-м.ғ.к., Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

**БӨЛШЕК РЕТТІ ШЕКАРАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛАРЫ БАР БЕЙЛОКАЛ ПОЛИГАРМОНИЯЛЫҚ
ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕЙБІР ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ
ON THE SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A NONLOCAL
POLYHARMONIC EQUATION WITH FRACTIONAL-ORDER BOUNDARY OPERATORS
О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО
ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

Аңдатпа. Бұл жұмыста локалдық емес полигармониялық теңдеу үшін кейбір шеттік есептердің шешімділік мәселелері зерттеледі. Бейлокал полигармониялық оператор инволюция типті бейнелеулердің көмегімен жаңа класстағы локалдық емес полигармониялық оператор арқылы енгізіледі. Дирихле шарттары және бөлшек ретті шекаралық операторлары бар шеттік есептер қарастырылады. Локалдық емес полигармоникалық теңдеуге сәйкес Дирихле шартындағы шекаралық есептің шешімділік мәселелері зерттелді. Алдымен D есебінің шешімінің бар және бірегей екендігі айқындалып, оған сәйкес келетін теорема дәлелденеді. Осы теорема негізінде есептің Грин функциясының айқын түрі мен D есебінің шешімінің интегралдық түрде өрнектелуі туралы нәтиже алынды. Екінші есепте қатысатын бөлшек ретті операторлар Адамардың түрлендірілген туындылары көмегімен анықталады. Адамардың J_μ^α және D_μ^α интегро-дифференциалдық операторларының өзара кері бейнелеу болуы туралы қасиеттері келтіріледі және $J_\mu^\alpha u(x)$ және $D_\mu^\alpha u(x)$ функцияларының Гельдер класстарындағы тегістігі айқындалады. Интегро-дифференциалдық операторлардың осы қасиеттері негізінде N_α есебінің алдымен $\mu > 0$ жағдайында шешімі бар және бірегей екендігі дәлелденді. Ал $\mu = 0$ жағдайда N_α есебінің шешімі бар болуы үшін қажетті және жеткілікті шарт анықталады. Сонымен зерттеліп отырған есептер үшін шешімнің бар және бірегей болатынын көрсететін теоремалар дәлелденеді.

Негізгі сөздер: инволюция, бейлокал оператор, полигармониялық теңдеу, Адамар туындылары, Дирихле есебі, Нейман есебі.

Abstract. This paper investigates the solvability of certain boundary value problems for a nonlocal polyharmonic equation. The nonlocal polyharmonic operator is introduced through a new class of nonlocal polyharmonic operators using involution-type mappings. Boundary value problems with Dirichlet conditions and boundary operators of fractional order are considered. The solvability of a boundary value problem with Dirichlet conditions for the corresponding nonlocal polyharmonic equation is studied. First, the existence and uniqueness of the solution to Problem D are established, and the corresponding theorem is formulated. Based on this theorem, an explicit form of the Green's function and an integral representation of the solution to Problem D are obtained. The second problem under consideration involves boundary operators of fractional order, which are defined using modified Hadamard derivatives. The properties of mutual invertibility of the Hadamard-type integro-differential operators J_μ^α and D_μ^α are presented, and the smoothness of the functions $J_\mu^\alpha u(x)$ and $D_\mu^\alpha u(x)$ in Hölder classes is established. Based on these properties of the integro-differential operators, the existence and uniqueness of the solution to the corresponding problem N_α are proved under the condition $\mu > 0$, and in the case $\mu = 0$, a necessary and sufficient condition for the existence of a solution is determined. As a result, theorems are proved that confirm the existence and uniqueness of solutions for the problems under consideration.

Keywords: involution, nonlocal operator, polyharmonic equation, Hadamard derivatives, Dirichlet 7 problem, Neumann problem.

Аннотация. В данной работе исследуются вопросы разрешимости некоторых краевых задач для нелокального полигармонического уравнения. Бейлокальный полигармонический оператор вводится с помощью отображений типа инволюции через новый класс нелокальных полигармонических операторов. Рассматриваются краевые задачи с условиями Дирихле и граничными операторами дробного порядка.

Исследуется разрешимость краевой задачи с условием Дирихле для соответствующего нелокального полигармонического уравнения. Сначала доказываются существование и единственность решения задачи D , формулируется соответствующая теорема. На основе этой теоремы получен явный вид функции Грина и интегральное представление решения задачи D . Вторая рассматриваемая задача включает граничные операторы дробного порядка, которые определяются с помощью модифицированных производных Адамара. Приводятся свойства взаимной обратимости интегро-дифференциальных операторов Адамара J_μ^α и D_μ^α , а также устанавливается гладкость функций $J_\mu^\alpha u(x)$ и $D_\mu^\alpha u(x)$ в классах Гёльдера. На основе этих свойств интегро-дифференциальных операторов доказываются существование и единственность решения задачи N_α при условии $\mu > 0$, а в случае $\mu = 0$ определяется необходимое и достаточное условие существования решения задачи N_α . В итоге, для рассматриваемых задач доказываются теоремы, подтверждающие существование и единственность их решений.

Ключевые слова: инволюция, нелокальный оператор, полигармоническое уравнение, производные Адамара, задача Дирихле, задача Неймана.

Кіріспе

S түрлендіру $S^2 t = t$ қасиетке ие болсын. Ізделінді $u(t)$ функциясымен бірге $u(S(t))$ мәні де кездесетін дифференциалдық теңдеулер Карлеман ығысуы бар теңдеулер немесе инволюциясылы теңдеулер деп аталады [1]. Инволютивті түрлендірілген аргументтері бар теңдеулердің теориясы және олардың қолданылуы [2–5] монографияларында жан-жақты сипатталған. Бүгінгі таңда инволюцияның әртүрлі түрлері бар дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік және бастапқы-шеттік есептердің дұрыс қойылуы; шешімдердің сапалық қасиеттері және спектрлік мәселелері [6–12] әдебиеттерде кеңінен зерттелген. [13–17] еңбектерде инволюциясы бар дербес туындылы теңдеулер үшін кері есептердің шешімділігі қарастырылған.

[18] жұмыста R^n кеңістігінде Лаплас операторының келесі бейлокал аналогы енгізілген.

$$L_l[u](x) \equiv a_0 \Delta u(x) + a_1 \Delta u(Sx) + \dots + a_{l-1} \Delta u(S^{l-1}x),$$

мұндағы, Δ - Лаплас операторы, $a_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ - нақты сандар, S - $n \times n$ өлшемді ортогоналды матрица және ол үшін $S^l = E$ болатындай $l \in N$ табылады, E - бірлік матрица. Жоғарыда аталған [18] жұмыста бірлік шарда сәйкес $L_l[u] = f(x)$ бейлокал Пуассон теңдеуі үшін Дирихле, Нейман және Робен шарттарымен берілген негізгі шеттік есептердің шешімділік мәселелері зерттелген. Ары қарай, осы есептердің жалғасы ретінде [19] еңбекте бейлокал Гельмгольц теңдеуі үшін бейлокал шарттары бар шеттік есептер зерттелген. Сонымен қатар, [20] еңбекте R^2 кеңістігінде тік төртбұрыш аймақта Пуассон теңдеуінің бейлокал аналогы үшін Дирихле есебінің шешімділігі зерттелген.

Айталық, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, n \geq 2$ болсын. Барлық $1 \leq j \leq n$ мәндері үшін $S_j x = (x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ түріндегі бейнелеуді қарастайық. $S_j^2 = E$ екені анық. Егер осы бейнелеулердің барлық мүмкін болған көбейтінділерін қарастырсақ, олардың жалпы саны, $S_0 x = x$ теңдік бейнелеуді есепке алғанда, 2^n -ге тең болады.

Мысал 1. $n = 3$ кезінде келесіге ие боламыз.

$$S_0 x = x; S_1 x = (-x_1, x_2, x_3); S_2 x = (x_1, -x_2, x_3); S_3 x = (x_1, x_2, -x_3);$$

$$S_4 x = S_1 S_2 x \equiv (-x_1, -x_2, x_3); S_5 x = S_1 S_3 x \equiv (-x_1, -x_2, x_3); S_6 x = S_2 S_3 x \equiv (x_1, -x_2, -x_3);$$

$$S_7 x = S_1 S_2 S_2 x \equiv (-x_1, -x_2, -x_3).$$

$\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ – бірлік шар $R^n, n \geq 2$ болсын, ал $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ – бірлік сфера. S_j түріндегі бейнелеуді жалпылап, бұдан әрі $S_1, \dots, S_n - S_i^2 = E$ болатындай нақты симметриялы $S_i S_j = S_j S_i$ коммутативті матрицалар жиыны берілген деп есептейміз. Айта кетейік, $|x|^2 = (S_i^2 x, x) = (S_i x, S_i x) = |S_i x|^2$ болса, онда $x \in \Omega \Rightarrow S_i x \in \Omega$ және $x \in \partial\Omega \Rightarrow S_i x \in \partial\Omega$.

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2^n-1}$ – нақты сандардың кейбір жиыны болсын. Егер i индексінің жазбасын екілік санау жүйесінде $(i_n \dots i_1)_2 \equiv i, k = 1, \dots, n$ түрінде енгізсек, мұнда кезде $i_k = 0, 1$, онда бұл коэффициенттерді $a_{(0 \dots 00)_2}, a_{(0 \dots 01)_2}, a_{(0 \dots 10)_2}, a_{(0 \dots 11)_2}, \dots, a_{(1 \dots 11)_2}$ түрінде жазамыз. Олай болса, $x \rightarrow S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x$ түріндегі бейнелеуді қарастыруға болады. Атап айтқанда, мысал 1-дегі бейнелеулерді қарастырсақ, онда

$$0 = (000)_2, 1 = (001)_2, 2 = (010)_2, 3 = (011)_2, 4 = (100)_2, 5 = (101)_2, 6 = (110)_2, 7 = (111)_2$$

және

$$\begin{aligned} S_0 x &\equiv S_3^0 S_2^0 S_1^0 x; S_1 x = S_3^0 S_2^0 S_1^1 x; S_2 x = S_3^0 S_2^1 S_1^0 x; S_3 x = S_3^0 S_2^1 S_1^1 x; S_4 x = S_3^1 S_2^0 S_1^0 x; \\ S_5 x &= S_3^1 S_2^0 S_1^1 x; S_6 x = S_3^1 S_2^1 S_1^0 x; S_7 x = S_3^1 S_2^1 S_1^1 x; \end{aligned}$$

Бұл жазбаны пайдалана отырып, келесі операторды енгіземіз

$$L_n u \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-\Delta)^m u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x).$$

Пуассон теңдеуінің L_n операторымен берілген бейлокал аналогы үшін Дирихле мен Нейманның шеттік есептері [21] жұмыста зерттелген, ал спектрлік мәселелер [22] жұмыста қарастырылған. Сонымен қатар, [23] еңбекте бейлокал Пуассон теңдеуі үшін бөлшек ретті шекаралық операторлар қатысқан шеттік есептер зерттелген.

Бұл жұмыс аталған зерттеулердің жалғасы болып табылады және біз Дирихле шартымен, сондай-ақ бөлшек ретті шекаралық операторлар қатысқан кейбір шеттік есептердің шешімділік мәселелерін зерттейміз.

Одан әрі шекаралық шарттарды қою үшін бөлшек ретті интеграл мен туындының анықтамалары қажет болады.

Кез-келген $\alpha > 0$ үшін келесі өрнек

$$J^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{u(s\theta)}{s} ds.$$

Адамар мағынасындағы α -ретті интегралдау операторы деп аталады [24].

Бұдан әрі $J^0[u](x) = u(x)$ деп есептейміз.

Айнымалыларды $s = \xi r$ алмастырған соң интеграл $J^\alpha[u](x)$ мынадай түрде жазылады

$$J^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{\xi} \right)^{\alpha-1} \frac{u(\xi x)}{\xi} d\xi.$$

$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{\xi} \right)^{\alpha-1} \xi^{-1} d\xi$ интегралы жинақталмайтындықтан, J^α операторы $u(0) \neq 0$ кезінде үзіліссіз $u(x)$ функциясына қолдануға болмайды.

Сондықтан, кез-келген $\alpha \in (\ell-1, \ell], \ell=1, 2, \dots$ үшін бөлшек ретті дифференциалдау операторы ретінде біз келесі Адамар операторының келесі түрлендірілген нұсқасын қарастырамыз [25].

$$D^\alpha[u](x) = J^{\ell-\alpha} [\delta^\ell[u]](x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\ell-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{\ell-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^\ell [u](s\theta) \frac{ds}{s}.$$

Сонымен қатар, кез-келген $\mu \geq 0$ үшін біз келесі операторларды қарастырамыз.

$$J_\mu^\alpha[u](x) = r^{-\mu} J^\ell [r^\mu u](x) \equiv \frac{r^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{\alpha-1} s^{\mu-1} u(s\theta) ds,$$

$$D_\mu^\alpha[u](x) = r^{-\mu} D^\ell [r^\mu u](x) \equiv \frac{r^{-\mu}}{\Gamma(\ell-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{\alpha-1} \left(s \frac{d}{ds} \right)^\ell [s^\mu u(s\theta)] \frac{ds}{s}.$$

$J_0^\alpha = J^\alpha, D_0^\alpha = D^\alpha$ болатыны айқын.

Осы жұмыста біз келесі шеттік есептерді зерттейміз.

D (Дирихле) есебі. Төмендегі

$$L_n u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} = g_k(x), k=0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega})$ функциясын табу керек. Мұндағы ν - $\partial\Omega$ сфераға жүргізілген сыртқы нормаль векторы.

N_α **есебі.** $0 < \alpha \leq 1, \mu \geq 0$ болсын. $D_\mu^{\alpha+k} u(x)$ туындылары $C(\bar{\Omega})$ класына тиісті, (1) тендеуі мен төменде берілген

$$D_\mu^{\alpha+k} u(x) \Big|_{\partial\Omega} = g_k(x), k=0, 1, \dots, m-1. \quad (3)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ функциясын табу керек

$J^0[u](x) = u(x)$ болғандықтан, $\alpha=1$ кезінде келесі теңдік орындалады

$$D_\mu^{k+1}[u](x) = \delta_\mu^{k+1}[u](x) \equiv \left(r \frac{d}{dr} + \mu \right)^{k+1} u(x), k \geq 0.$$

[26] жұмыста келесі теңдік дәлелденген.

$$\left(r \frac{d}{dr}\right)^k = \sum_{j=1}^k a_i^{(j)} r^j \frac{\partial^j}{\partial r^j} \equiv \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \frac{i^k}{i!(j-i)!} \right) r^j \frac{\partial^j}{\partial r^j}, k \in N. \quad (4)$$

Егер $x \in \partial\Omega$ болса, онда төмендегі теңдік орынды.

$$\frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} = r^k \frac{\partial^k u(x)}{\partial r^k} = \Lambda^{[k]} u(x), k \geq 1, \quad (5)$$

мұндағы $\Lambda^{[k]} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) \dots \left(r \frac{\partial}{\partial r} - k + 1 \right).$

$\delta_\mu^k[u](x), k \geq 1$ операторы үшін (4) теңдіктен келесіні аламыз

$$\begin{aligned} \delta_\mu^k[u](x) &\equiv \left(r \frac{d}{dr} + \mu \right)^k u(x) = \left(r \frac{d}{dr} \right)^k u(x) + \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i \mu^{k-i-1} \left(r \frac{d}{dr} \right)^i u(x) + \mu^k u(x) = \\ &= r^k \frac{\partial^k u(x)}{\partial r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} a_i^{(k)} r^i \frac{\partial^i u(x)}{\partial r^i} + \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i \mu^{k-i-1} \left(\sum_{p=1}^i a_p^{(i)} r^p \frac{\partial^p u(x)}{\partial r^p} \right) u(x) + \mu^k u(x). \end{aligned}$$

Олай болса, (5) теңдіктен, N_α есебі $\alpha = 1, \mu > 0$ кезінде үшінші шеттік есептің аналогы, ал $\alpha = 1, \mu = 0$ кезінде Нейман есебінің аналогы болып табылады. Жалпы жағдайда, $\mu = 0$ және $0 \leq \alpha \leq 1$ мәндері кезінде біз α параметр бойынша Дирихле және Нейман типіндегі есептердің интерполяциясын аламыз.

Айта кетейік, $m = 2$ жағдайда N_α есебі [27] жұмыста зерттелген.

Нәтижелер мен талқылау

Келесіде, [28] жұмыста дәлелденген J_μ^α және D_μ^α операторларының қасиеттерін келтіреміз.

Лемма 1. $\alpha > 0, \mu \geq 0, 0 < \lambda < 1$ және $u(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega}), p = 0, 1, \dots$ болсын. Олай болса,

1) егер $\mu > 0$ болса, онда $J_\mu^\alpha[u](x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega});$

2) егер $\mu = 0$ болса, онда $u(0) = 0$ шарты орындалғанда, $J_0^\alpha[u](x)$ функциясы $C^{\lambda+p}(\bar{\Omega})$

класына жатады және $J_0^\alpha[u](0) = 0$ теңдігі орындалады.

Лемма 2. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1$ және $u(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega}), p \geq \ell$ болсын. Онда $D_\mu^\alpha[u](x) \in C^{\lambda+p-\ell}(\bar{\Omega})$ және $D_0^\alpha[u](0) = 0$ теңдігі орындалады.

Лемма 3. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1$ және $u(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega}), p \geq \ell$ болсын.

Онда кез-келген $x \in \bar{\Omega}$ үшін төмендегі теңдіктер орындалады.

1) егер $\mu > 0$ болса, онда

$$J_\mu^\alpha [D_\mu^\alpha[u]](x) = u(x), \quad (6)$$

2) егер $\mu = 0$ болса, онда

$$J_0^\alpha [D_0^\alpha [u]](x) = u(x) - u(0). \quad (7)$$

Лемма 4. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1$ және $u(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega}), p \geq \ell$ болсын.

Онда кез-келген $x \in \bar{\Omega}$ үшін келесі теңдіктер орынды болады.

1) егер $\mu > 0$ болса, онда

$$D_\mu^\alpha [J_\mu^\alpha [u]](x) = u(x), \quad (8)$$

2) егер $\mu = 0$ болса, онда $u(0) = 0$ шарты орындалғанда, мынадай теңдік орындалады

$$D_0^\alpha [J_0^\alpha [u]](x) = u(x). \quad (9)$$

Лемма 5. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots$ болсын, $J_\mu^\alpha [u](x)$ және $D_\mu^\alpha [u](x)$ бар болсын.

Олай болса, келесі теңдіктер орындалады.

$$(-\Delta)^m J_\mu^\alpha [u](x) = J_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m u](x), x \in \Omega, \quad (10)$$

$$(-\Delta)^m D_\mu^\alpha [u](x) = D_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m u](x), x \in \Omega. \quad (11)$$

Салдар 1. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots$ болсын, $f(x)$ функциясы $\bar{\Omega}$ облысында тегіс және $(-\Delta)^m u(x) = f(x)$. Олай болса, төмендегі теңдіктер дұрыс

$$(-\Delta)^m D_\mu^\alpha [u](x) = F(x), x \in \Omega,$$

мұндағы,

$$F(x) = D_{\mu+2m}^\alpha [f](x) \equiv |x|^{-(2m+\mu)} D^\alpha [|x|^{2m+\mu} f(x)]. \quad (12)$$

Лемма 6. $\mu \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$ болсын және кез-келген $k = 1, 2, \dots$ үшін $D_\mu^{\alpha+k} u(x)$ туындылары бар. Онда келесі теңдіктер орындалады

$$D_\mu^{\alpha+k} [u](x) = \delta_\mu^k [D_\mu^\alpha [u]](x). \quad (13)$$

Лемма 7. Егер $\mu = 0$ болсын, онда (12) теңдіктегі $F(x)$ функциясын келесі түрде өрнектеуге болады

$$F(x) = \left(r \frac{d}{dr} + 2m \right) f_{1-\alpha}(x), \quad (14)$$

мұндағы $f_{1-\alpha}(x) = |x|^{-2m} J^{1-\alpha} [|x|^{2m} f(x)]$.

Енді D есебін зерттейміз.

$u(x)$ функциясы D есебінің шешімі деп есептеп, келесі функцияны қарастырайық:

$$v(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x). \quad (15)$$

$v(x)$ функциясына $(-\Delta)^m$ қолдана отырып, D есебінің шарттарын есепке алсақ, келесі Дирихле есебін аламыз.

$$(-\Delta)^m v(x) = f(x), x \in \Omega; \left. \frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j} \right|_{\partial \Omega} = h_j(x), j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (16)$$

мұндағы
$$h_k(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i g_k(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x).$$

Егер $f(x)$ және $h_j(x)$ жеткілікті түрде тегіс функциялар болса, онда (16) есебінің шешімі бар және жалғыз болады. Атап айтқанда, егер $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, $h_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$, $0 < \lambda < 1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, болса, онда бұл шешім $C^{\lambda+2m}(\bar{\Omega})$ классына жатады (мысалы, [29] қараңыз).

(16) есебінің шешімін қолданып, D есебінің шешімін құруға болатынын көрсетеміз. (15) теңдігінен $v(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x)$ түріндегі функциялар $j = 0, \dots, 2^n-1$ болғанда $u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x)$ функциялар арқылы сызықтық түрде өрнектелетіндігі оңай байқалады. Егер төмендегі 2^n -ретті векторларды қарастырсақ,

$$\begin{aligned} V(x) &= (v(x), \dots, v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x), \dots, v(S_n^1 \dots S_1^1 x))^T, \\ U(x) &= (u(x), \dots, u(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x), \dots, u(S_n^1 \dots S_1^1 x))^T, \end{aligned}$$

онда бұл тәуелділік келесі

$$V(x) = A_n U(x), \quad (17)$$

матрицалық түрде өрнектелуі мүмкін, мұндағы $A_n = (a_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^n-1}$ — $2^n \times 2^n$ -ретті матрица.

[22] жұмыста келесі тұжырымдар дәлелденген.

Лемма 8. (16) теңдіктегі A_n матрицасы мынадай түрде беріледі

$$A_n = (a_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^n-1} = (a_{i \oplus j})_{i,j=0,\dots,2^n-1}, \quad (18)$$

мұндағы A_n матрицасының коэффициенттерінің төменгі индексіндегі қосу келесі мағынада түсініледі, $i \oplus j \equiv (i)_2 \oplus (j)_2 = ((i_n + j_n \bmod 2) \dots (i_1 + j_1 \bmod 2))_2$, $(i)_2 = (i_n \dots i_1)_2$ — i индексінің екілік санау жүйесіндегі жазбасы.

Салдар 1. Бүкіл A_n матрицасы өзінің бірінші жолы $(a_0, a_1, \dots, a_{2^n-1})$ арқылы бірімәнді анықталады.

Салдар 2. A_n матрицасы $(a_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^n-1} = (a_{j,i})_{i,j=0,\dots,2^n-1}$ түрдегі симметриялық қасиетіне ие.

Лемма 9. $A_n(a_0, \dots, a_{2^n-1})$ матрицасының анықтаушы келесі түрде болады

$$\det A_n(a_0, \dots, a_{2^n-1}) = \prod_{k=0}^{2^n-1} \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k_n i_n + \dots + k_1 i_1} a_{(i_n \dots i_1)_2} \right),$$

мұндағы $k \otimes i \equiv (k_n \dots k_1)_2 \otimes (i_n \dots i_1)_2 = k_n i_n + \dots + k_1 i_1 - (k)_2$ және $(i)_2$ сандарының «скаляр» көбейтіндісі.

Лемма 10. Егер $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1$ болса, онда $A_n^{-1} = B_n(b_0, \dots, b_{2^n-1})$ кері матрицасы бар және ол (18) түрінде болады.

[22] жұмыста $B_n(b_0, \dots, b_{2^n-1})$ матрица элементтерін құру алгоритмі келтірілген.

$\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1$ шарты орындалғанда, кері матрица $B_n(b_0, \dots, b_{2^n-1})$ бар болады және сол арқылы $u(x)$ функцияны

$$u(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x). \quad (19)$$

бірмәнді түрде құруға болады.

Егер $v(x)$ функциясы (16) есебінің шешімі болса, онда (19) формуласы бойынша анықталатын $u(x)$ функциясы D есебінің барлық шарттарын қанағаттандыратынын көрсетеміз.

Шынында да, егер $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$ болса, онда $\tilde{h}_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$ және $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ үшін $v(x) \in C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ ие боламыз. Бұдан $u(x) \in C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$. Сондықтан егер $v(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x) = I_{S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1}} v(x)$ деп белгілесек, онда Ω облысында келесі теңдік орындалады

$$(-\Delta)^m u(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j (-\Delta)^m v(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j I_{S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1}} (-\Delta)^m v(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j f(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x).$$

Бұдан келесі теңдік шығады

$$L_n u(x) \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-\Delta)^m u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j f(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x).$$

Егер $r(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j f(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x)$ деп белгілеп, $\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i r(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x)$ функциясын қарастырсақ, онда төмендегі векторлар үшін

$$R(x) = \left(r(x), \dots, r(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x), \dots, r(S_n^1 \dots S_1^1 x) \right)^T,$$

$$F(x) = \left(f(x), \dots, f(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x), \dots, f(S_n^1 \dots S_1^1 x) \right)^T,$$

келесі теңдіктер орындалады

$$R(x) = B_n F(x), \quad \tilde{U}(x) = A_n R(x).$$

Демек,

$$A_n U(x) = A_n B_n F(x) = F(x)$$

және сол себептен

$$L_n u(x) \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i r(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = (A_n R(x))_{j=0} = (A_n B_n F(x))_{j=0} = F(x)_{j=0} = f(x).$$

Осылайша, $u(x)$ функциясы (1) теңдеуін қанағаттандырады. Енді (2) шекаралық шарттардың орындалуын тексерейік. Төмендегі вектор үшін

$$H_k(x) = (h_k(x), \dots, h_k(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x), \dots, h_k(S_n^1 \dots S_1^1 x))^T,$$

келесі теңдік орындалады

$$(H_k(x))_{j=0} = h_k(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i g_k(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = (A_n G_k(x))_{j=0},$$

мұндағы $G_k(x) = (g_k(x), \dots, g_k(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x), \dots, g_k(S_n^1 \dots S_1^1 x))^T$. Сондықтан (16) есебінің шекаралық шарттарына сүйене отырып, барлық $0 \leq k \leq m-1$ үшін келесі теңдікті аламыз.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial \Omega} &= \Lambda^{[k]} u(x) \Big|_{\partial \Omega} = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \Lambda^{[k]} v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) \Big|_{\partial \Omega} = (B_n \Lambda^{[k]} V(x))_{j=0} = \\ &= (B_n H_k(x))_{j=0} = (B_n A_n G_k(x))_{j=0} = g_k(x), \end{aligned}$$

Осылайша, (2) шекаралық шарттар да орындалады.

Демек, біз келесі тұжырымның дұрыстығын дәлелдедік.

Теорема 1. $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1, \quad 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega}),$

$g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial \Omega), j = 0, 1, \dots, m-1$ болсын. Онда D есебінің шешімі бар, бірімәнді және $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады.

Келесіде $G_{D,m}(x, y)$ деп (16) есебінің Грин функциясын белгілейміз. [30] жұмыста $G_{D,m}(x, y)$ функциясының айқын түрі келесі түрде берілетіні көрсетілген.

$$G_{D,m}(x, y) = K_{m,n} |x - y|^{2m-n} \int_0^{g(x,y)} (t^2 - 1)^{m-1} t^{1-n} dt, n \neq 2, n \neq 4,$$

$$g(x, y) = \frac{1}{|x - y|} \left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|, K_{m,n} = \frac{1}{4^{m-1} ((m-1)!)^2 \omega_n}, \omega_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2).$$

Келесі тұжырымда біз D есебінің Грин функциясының айқын түрін табамыз.

Теорема 2. $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1, \quad 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega}), \quad g_j(x) = 0$
 $j = 0, 1, \dots, m-1$ болсын. Онда D есебінің шешімі келесі түрде көрсетіледі

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{L_n}(x, y) f(y) dy, \quad (20)$$

мұндағы $G_{L_n}(x, y)$ функциясы төмендегі теңдікпен анықталады

$$G_{L_n}(x, y) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G_{D,m}(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y). \quad (21)$$

Дәлелдеуі. Бұл жағдайда $v(x)$ функциясы үшін (15) теңдігінен келесі Дирихле есебі алынады

$$(-\Delta)^m v(x) = f(x), x \in \Omega; \left. \frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j} \right|_{\partial \Omega} = 0, j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (22)$$

[30]-жұмыста (22) есебінің шешімі келесі түрде өрнектелетіндігі дәлелденген

$$v(x) = \int_{\Omega} G_{D,m}(x, y) f(y) dy.$$

Онда

$$v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = \int_{\Omega} G_{D,m}(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y) f(y) dy.$$

Осыдан, (19) теңдігін пайдалана отырып, D есебінің шешімі үшін (21) түріндегі өрнекті аламыз:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \int_{\Omega} G_{D,m}(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y) f(y) dy = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G_{D,m}(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y) \right) f(y) dy = \\ &= \int_{\Omega} G_{L_n}(x, y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. (21) өрнектен келесіні аламыз

$$G_{L_n}(0, y) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G_{D,m}(0, y) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) G_{D,m}(0, y). \quad (23)$$

$\mu > 0$ жағдайында N_α есебін зерттейік. Келесі тұжырым орындалады.

Теорема 3. $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0, \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1, 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega}),$
 $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega), j = 0, 1, \dots, m-1$ болсын. Онда N_α есебінің шешімі бар, бірегей,
 $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады және келесі түрде өрнектеледі

$$u(x) = J_\mu^\alpha v(x), \quad (24)$$

мұндағы $v(x)$ функциясы келесі есептің шешімі болып табылады

$$L_n v(x) = F(x), x \in \Omega, \delta_\mu^k [v](x)|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (25)$$

оң жақтағы функция $F(x) = D_{\mu+2m}^\alpha [f](x)$.

Дәлелдеуі. $u(x)$ функциясы N_α есебінің шешімі болады деп болжайық. Бұл функцияға D_μ^α операторын қолданайық және $v(x) = D_\mu^\alpha u(x)$ деп белгілейік. $v(x)$ функциясын қанағаттандыратын шарттарды табамыз. Егер $v(x) = D_\mu^\alpha u(x)$ функциясына $(-\Delta)^m$ операторын қолдансақ, онда лемма 5-тің (10) теңдігіне сәйкес, келесі нәтижені аламыз: $(-\Delta)^m v(x) = D_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m u](x)$. δ және $I_{S_i} u(x) = u(S_i x)$ операторлары коммутативті болғандықтан [18], кез келген $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ үшін келесі теңдіктер орындалады

$$(-\Delta)^m v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = D_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m u](S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x).$$

Осы жерден

$$L_n v(x) = D_{\mu+2m}^\alpha \left[\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-\Delta)^m u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) \right] = D_{\mu+2m}^\alpha [f](x), x \in \Omega.$$

Одан әрі, (12) теңдіктен келесіні аламыз $D_{\mu}^{\alpha+k} [u](x) = \delta_\mu^k [D_\mu^\alpha [u]](x), k \geq 1$. Онда

$$v(x)|_{\partial\Omega} = D_\mu^\alpha u(x)|_{\partial\Omega} = g_0(x), \delta_\mu^k [v](x)|_{\partial\Omega} = \delta_\mu^k [D_\mu^\alpha u](x)|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Осылайша, егер $u(x)$ функциясы N_α есебінің шешімі болса, онда $v(x) = D_\mu^\alpha u(x)$ функциясы (25) есебінің шешімі болады. (25) есептің D есебіне эквивалент екенін көрсетейік. Шынында да, $k = 0$ кезінде $v(x)|_{\partial\Omega} = D_\mu^\alpha u(x)|_{\partial\Omega} = g_0(x)$ болады. Егер $k = 1$ болса, онда келесі теңдік алынады.

$$g_1(x) = \delta_\mu^1 [v](x)|_{\partial\Omega} = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) v(x) \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} + \mu v(x) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Бұдан

$$\left. \frac{\partial v(x)}{\partial v} \right|_{\partial\Omega} = g_1(x) + \mu g_0(x) \equiv h_1(x).$$

Жалпы жағдайда (5) теңдігіне сүйене отырып, $\delta_\mu^k[v](x)$ үшін мынаны аламыз

$$g_k(x) = \delta_\mu^k[v](x) \Big|_{\partial\Omega} = r^k \frac{\partial^k v(x)}{\partial r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} d_{i,k} r^i \frac{\partial^i v(x)}{\partial r^i} + \mu^k v(x) \Big|_{\partial\Omega},$$

мұндағы $d_{i,k}$ – кейбір тұрақтылар. Осыдан келесіні аламыз

$$\left. \frac{\partial^k v(x)}{\partial v^k} \right|_{\partial\Omega} = g_k(x) - \sum_{i=0}^{k-1} b_{i,k} g_i(x) \equiv h_k(x), k = 2, 3, \dots, m-1,$$

мұндағы $b_{i,k}$ коэффициенттері $\mu, a_i^{(k)}$ және $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ -ға тәуелді.

Осылайша, (25) есебі D есебіне эквивалентті. Егер $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ болса, онда лемма 2 тұжырымына сәйкес, $F(x) = D_{\mu+2m}^\alpha[f](x)$ функциясы $C^\lambda(\bar{\Omega})$ класына жатады. Сонымен қатар, егер $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$, болса, онда $h_j(x)$ функциялары да $C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$ функциялар класына жататыны айқын. Онда Теорема 1 тұжырымына сәйкес, (25) есебінің шешімі бар, бірімәнді және $C^{\lambda+2m}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Егер $v(x) = D_\mu^\alpha u(x)$ теңдігіне екі жағынан J_μ^α операторын қолдансақ, онда (6) теңдігіне сәйкес, $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ өрнекті аламыз. Демек, егер N_α есебінің шешімі бар болса, ол (24) түрінде өрнектеледі.

Енді $v(x)$ функциясы $F(x) = D_{\mu+2m}^\alpha[f](x)$ функциясымен бірге (25) есебінің шешімі болсын. Онда $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ функциясы $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ есебінің шешімі болатынын көрсетейік. Шынында да, егер $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ теңдігіне $(-\Delta)^m$ операторын қолдансақ, онда (10) теңдігіне сәйкес келесі нәтижені аламыз.

$$(-\Delta)^m u(x) = J_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m v](x).$$

Онда $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ функциясына L_n операторын (6) теңдігін ескере отырып қолдансақ, келесі нәтижені аламыз.

$$L_n u(x) = J_{\mu+2m}^\alpha [L_n v](x) = J_{\mu+2m}^\alpha [D_{\mu+2m}^\alpha[f]](x) = f(x),$$

яғни, $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ функциясы үшін (1) теңдік орындалады. Келесіде (25) есебінің шекаралық шарттарын және (8), (13) теңдіктерін пайдалана отырып, келесі өрнекті аламыз

$$D_\mu^{\alpha+k} u(x) \Big|_{\partial\Omega} = D_\mu^{\alpha+k} [J_\mu^\alpha v](x) \Big|_{\partial\Omega} = \delta_\mu^k [D_\mu^\alpha [J_\mu^\alpha v]](x) \Big|_{\partial\Omega} = \delta_\mu^k [v](x) \Big|_{\partial\Omega} = g_k(x).$$

Олай болса, (3) шекаралық шарттар да орындалады. Енді шешімнің тегістігін зерттеу ғана қалады. Егер $v(x)$ функциясы (25) есебінің шешімі болса, онда теореманың шарттары

орындалғанда бұл функция $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Онда лемма 1-дің тұжырымына сәйкес, $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ функциясы да $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Сонымен қатар, барлық $0 \leq k \leq m-1$ үшін келесі теңдік $D_\mu^{\alpha+k} u(x) = \delta_\mu^k [v](x), x \in \bar{\Omega}$ орындалады. $\delta_\mu^k [v](x) \in C^{2m+\lambda-k}(\bar{\Omega})$ болғандықтан, $D_\mu^{\alpha+k} u(x) \in C^{2m+\lambda-k}(\bar{\Omega})$. Теорема дәлелденді.

$\mu = 0$ жағдайындағы N_α есебін зерттеуге көшеміз. Бұл жағдайда, егер $u(x)$ — N_α есебінің шешімі болса, онда $v(x) = D_0^\alpha u(x)$ функциясы үшін қосымша $v(0) = 0$ шарты бар (25) есебі алынады. Егер $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ болса, онда есептің шешімі бар, бірімәнді және $C^{\lambda+2m}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Енді $v(0) = 0$ шартының қандай жағдайда орындалатынын тексерейік. Ол үшін (25) есебінің шешімін келесі түрде ұсынайық: $v(x) = V(x) + w(x)$, мұндағы $V(x)$ және $w(x)$ функциялары келесі есептердің шешімдері болып табылады

$$L_n V(x) = F(x), x \in \Omega, \delta_0^k [V](x) \Big|_{\partial\Omega} = 0, k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (26)$$

және

$$L_n w(x) = 0, x \in \Omega, \delta_0^k [w](x) \Big|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (27)$$

Жоғарыда көрсетілгендей, (26) есебі Дирихле типті (22) есебіне эквивалентті, сондықтан бұл есептің шешімі келесі түрде өрнектеледі

$$V(x) = \int_{\Omega} G_{L_n}(x, y) F(y) dy.$$

Онда (23) теңдігін пайдалана отырып, келесі өрнекті аламыз

$$V(0) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) \int_{\Omega} G_{D,m}(0, y) F(y) dy.$$

[28] жұмыста егер $F(y)$ функциясы $F(y) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2m \right) g(y), \rho = |y|$ түрінде берілсе, онда $\int_{\Omega} G_{D,m}(0, y) F(y) dy$ интегралы үшін келесі теңдік орындалатыны дәлелденген

$$\int_{\Omega} G_{D,m}(0, y) F(y) dy = \int_{\Omega} G_{D,m}(0, y) \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2m \right) g(y) dy = \frac{1}{4^{m-1} ((m-1)!)^2 \omega_n} \int_{\Omega} (1 - |x|^2)^{m-1} g(y) dy.$$

Біздің жағдайда $F(y)$ функциясы мынадай түрге ие: $F(y) = D_{2m}^\alpha [f](y) \equiv |y|^{-(2m)} D^\alpha [|y|^{2m} f(y)]$. (14) теңдікке сәйкес, $F(y)$ функциясын келесі түрде жазуға болады:

$F(y) = \left(\rho \frac{d}{d\rho} + 2m \right) f_{1-\alpha}(y)$, мұндағы $f_{1-\alpha}(y)$ функциясы келесі түрге ие: $f_{1-\alpha}(y) = |y|^{-2m} J^{1-\alpha} [|y|^{2m} f(y)]$. Сонда $V(0)$ үшін келесі өрнекті аламыз

$$V(0) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) K_{m,n} \int_{\Omega} (1-|x|^2)^{m-1} f_{1-\alpha}(y) dy. \quad (28)$$

Одан әрі (27) есебін қарастырамыз. [22] жұмыста келесі тұжырым дәлелденген.

Лемма 11. Егер $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1$ шарты орындалып, $u(x)$ функциясы мына біртекті теңдеуді қанағаттандырса

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \Delta u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = 0, x \in \Omega,$$

онда $u(x)$ – гармоникалық функция болып табылады.

Ұқсас түрде келесі тұжырым дәлелденеді.

Лемма 12. Егер $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1$ шарты орындалып, $u(x)$ функциясы мына біртекті теңдеуді қанағаттандырса

$$L_n u(x) = 0, x \in \Omega,$$

онда $u(x)$ – полигармоникалық функция болып табылады.

Осы леммадан $w(x)$ функциясы (27) есебінің шешімі болса, онда ол төменде көрсетілген есептің де шешімі болатындығы шығады

$$\Delta^m w(x) = 0, x \in \Omega, \delta_0^k [w](x) \Big|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (29)$$

Келесі матрица берілсін

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2(m-1) \\ 0 & 2^2 & 4^2 & \dots & [2(m-1)]^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^{m-1} & 4^{m-1} & \dots & [2(m-1)]^{m-1} \end{pmatrix}.$$

$\Delta_j, j = 0, 1, \dots, m-1$ деп D матрицасынан бірінші баған мен $(j+1)$ -ші жолды алып тастағанда алынатын қосалқы матрицаның анықтауышын белгілейміз. Атап айтқанда, $\Delta_0 = |D| \equiv \text{Det } |D|$. Оны пайдаланып, $|D| \neq 0$ екенін көрсету оңай.

[28] жұмыста келесі тұжырым дәлелденген.

Лемма 13. Егер (29) есебінің шешімі бар болса, онда келесі теңдік орындалады

$$w(0) = -\frac{1}{\omega_n |D|} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \Delta_j g_j(y) dS_y. \quad (30)$$

Одан әрі, $v(x) = V(x) + w(x)$ шарты орындалатындықтан, (29) және (30) теңдіктеріне сүйене отырып, мынадай қорытынды аламыз.

$$v(0) = V(0) + w(0) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) K_{m,n} \int_{\Omega} (1 - |x|^2)^{m-1} g(y) dy - \frac{1}{\omega_n |D|} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \Delta_j g_j(y) dS_y.$$

Осыдан, $v(0) = 0$ шартының орындалуы үшін төмендегі теңдіктің орындалуы қажет екені белгілі болады

$$\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) \frac{1}{4^{m-1} ((m-1)!)^2} \int_{\Omega} (1 - |x|^2)^{m-1} g(y) dy = \frac{1}{|D|} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \Delta_j g_j(x) dS_x. \quad (31)$$

Осылайша, егер N_α есебінің шешімі бар болса, онда (31) шартының орындалуы қажет. Одан әрі, A_n және A_n^{-1} матрицаларының коэффициенттері үшін [21] жұмысында көрсетілген теңдік $\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) = 1$ орындалады. $\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right)$ нәтижесіне сүйене отырып, (31) шартын келесі түрде қайта жазуға болады:

$$\int_{\Omega} (1 - |x|^2)^{m-1} f_{1-\alpha}(y) dy = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) \frac{4^{m-1} ((m-1)!)^2}{|D|} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \Delta_j g_j(y) dS_y. \quad (32)$$

(32) шарты N_α есебінің шешімі болуы үшін жеткілікті шарт екенін көрсетейік. Шынында да, егер $\mu > 0$, $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ және $g_k(x) \in C^{m-1-k+\lambda}(\partial\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $0 < \lambda < 1$ болса, онда (25) есептің шешімі бар, бірегей және $C^{\lambda+2m}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Келесіде, егер (32) шарты орындалса, онда (31) шарты да орындалады. Онда (25) есебінің шешімі $v(0) = 0$ шартына сай келеді. Бұл жағдайда $u(x) = C + J_0^\alpha v(x)$, $C = \text{const}$ функциясын қарастыруға болады, ол $\mu = 0$ болғанда N_α есебінің барлық шарттарын қанағаттандырады. N_α есебінің шарттарының орындалуы мен шешімнің тегістігі теорема 3 жағдайындағыдай зерттеледі.

$\mu = 0$ жағдайындағы N_α есебіне қатысты негізгі нәтижені тұжырымдайық.

Теорема 4. Айталық, $0 < \alpha \leq 1$, $\mu = 0$, $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$, $0 < \lambda < 1$,

$f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ болсын. Онда N_α есебінің шешімділігі үшін (32) шарты қажетті және жеткілікті болып табылады. Егер есептің шешімі бар болса, онда ол тұрақты қосылғышқа дейін бізмәнді, $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады және келесі түрде өрнектеледі:

$$u(x) = C + J_0^\alpha v(x), C = \text{const},$$

мұндағы $v(x)$ функциясы төмендегі есептің шешімі болып табылады

$$L_n v(x) = F(x), x \in \Omega, \delta_0^k[v](x)|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$F(x) = D_{2m}^\alpha[f](x)$ функциясымен және $v(0) = 0$ қосымша шартымен.

Мысал 2. $m=1$ болсын. Онда $|D|=\Delta_1=1$ және N_α есебінің шешімділік шарты келесі түрде болады N_α

$$\int_{\Omega} f_{1-\alpha}(y)dy + \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) \int_{\partial\Omega} g_0(y)dS_y = 0. \quad (33)$$

$\alpha=1$ кезінде $f_0(y)=|y|^{-2m} J^0[|y|^{2m} f(y)] = f(y)$ ие боламыз. Онда (33)- шарт келесі түрде болады:

$$\int_{\Omega} f(y)dy + \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) \int_{\partial\Omega} g_0(y)dS_y = 0.$$

Аталған шарт [21] жұмыста алынған.

Мысал 3. $m=2$ болсын. Онда $|D|=2, \Delta_1=2, \Delta_2=1$ және N_α есебінің шешімділік шарты келесі түрде өрнектеледі

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (1-|x|^2) f_{1-\alpha}(y)dy = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) \int_{\partial\Omega} [g_1(y) - 2g_0(y)]dS_y.$$

Бұл шарт [27] жұмыста алынған.

Қорытынды

Жүргізілген зерттеуді қорытындылай келе, инволюция типті бейнелеулердің көмегімен жаңа бір класстағы локалдық емес полигармоникалық операторлар енгізілгенін атап өтеміз. Осы локалдық емес полигармоникалық теңдеуге сәйкес Дирихле шартындағы шекаралық есептің шешімділігі мәселелері зерттелді. Теорема 1 аясында D есебінің шешімінің бар және бірегей екендігі дәлелденсе, теорема 2 Грин функциясының айқын түрі мен D есебінің шешімінің өрнектелуі алынды.

Адамардың интегро-дифференциалдық J_μ^α және D_μ^α операторларының кері бейнелеу қасиеттерінің, сондай-ақ $J_\mu^\alpha u(x)$ және $D_\mu^\alpha u(x)$ функцияларының Гельдер класстарындағы тегістігінің арқасында, теорема 3-те $\mu > 0$ жағдайында N_α есептің шешімінің бар және бірегей екендігі дәлелденді. Ал 4-теоремада $\mu = 0$ болған жағдайда N_α есептің шешімді болуы үшін қажетті және жеткілікті шарт табылды. Ұсынылған әдістің болашақтағы қолдану мүмкіндіктерін қарастыратын болсақ, ұқсас тәсілді Риман–Лиувилль және Капуто туындылары арқылы берілген шекаралық операторлары бар шекаралық есептерді зерттеуге де пайдалануға болады. Бұл мәселелер алдағы зерттеулердің тақырыбы болып табылады және оларды келесі мақалаларымызда қарастыруды жоспарлап отырмыз.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғарғы білім министрлігінің Ғылым комитеті № AP19677926 гранты аясында орындалды.

Әдебиеттер тізімі

1. Carleman, T. (1930). La théorie des équations intégrales singulières et ses applications. In *Annales de l'institut Henri Poincaré* (Vol. 1, No. 4, pp. 401-430).
2. Cabada, A., & Tojo, F. A. F. (2015). Differential equations with involutions.

3. Karapetiants, N., & Samko, S. (2012). *Equations with involutive operators*. Springer Science & Business Media.
4. Przeworska-Rolewicz, D. (1973). Equations with transformed argument: an algebraic approach. (*No Title*).
5. Wiener, J. (1993). *Generalized solutions of functional differential equations*. World Scientific.
6. Al-Salti, N., Kerbal, S., & Kirane, M. (2019). Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 14(3), 312.
7. Ashyralyev, A., & Sarsenbi, A. M. (2015). Well-posedness of an elliptic equation with involution. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015(284), 1-8.
8. Ashyralyev, A., & Sarsenbi, A. (2017). Well-posedness of a parabolic equation with involution. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 1295-1304.
9. Baskakov, A. G., Krishtal, I. A., & Uskova, N. B. (2020). On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions. *Eurasian Mathematical Journal*, 11(2), 30-39.
10. Kritskov, L., SADYBEKOV, M., & SARSENBI, A. (2019). Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(1), 393-401.
11. Mussirepova, E., Sarsenbi, A. A., & Sarsenbi, A. M. (2022). Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(17), 11262-11271.
12. Sarsenbi, A., & Sarsenbi, A. (2021). On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution. *Symmetry*, 13(10), 1972.
13. Ahmad, A., Ali, M., & Malik, S. A. (2021). Inverse problems for diffusion equation with fractional Dzherbashian-Nersesian operator. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 24(6), 1899-1918.
14. Ahmad, B., Alsaedi, A., Kirane, M., & Tapdigoglu, R. G. (2017). An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation. *Quaestiones Mathematicae*, 40(2), 151-160.
15. Al-Salti, N., Kirane, M., & Torebek, B. T. (2019). On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation. *Hacetatepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(3), 669-681.
16. Kirane, M., & Al-Salti, N. (2016). Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation. *J. Nonlinear Sci. Appl*, 9, 1243-1251.
17. Torebek, B. T., & Tapdigoglu, R. (2017). Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(18), 6468-6479.
18. KARACHIK, V., SARSENBI, A., & TURMETOV, B. (2019). On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation. *Turkish journal of mathematics*, 43(3), 1604-1625.
19. Turmetov, B. K., & Karachik, V. V. (2023). Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 68(7), 1204-1218.
20. Yarka, U., Fedushko, S., & Veselý, P. (2020). The Dirichlet problem for the perturbed elliptic equation. *Mathematics*, 8(12), 2108.
21. Turmetov, B. K., & Karachik, V. V. (2021). On solvability of the Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 31(4), 651-667.
22. Turmetov, B., & Karachik, V. (2021). On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple involution. *Symmetry*, 13(10), 1781.
23. Usmanov, K., Turmetov, B., & Nazarova, K. (2022). On the solvability of some boundary value problems for the nonlocal Poisson equation with boundary operators of fractional order. *Fractal and Fractional*, 6(6), 308.
24. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). elsevier.
25. Jarad, F., Uğurlu, E., Abdeljawad, T., & Baleanu, D. (2017). On a new class of fractional operators. *Advances in Difference Equations*, 2017, 1-16.
26. Bekaeva, A. E., Karachik, V. V., & Turmetov, B. K. (2014). Solvability of some boundary-value problems for polyharmonic equation with Hadamard-Marchaud boundary operator. *Russian Mathematics*, 58, 11-24.
27. Turmetov, B., Karachik, V., & Muratbekova, M. (2021). On a boundary value problem for the biharmonic equation with multiple involutions. *Mathematics*, 9(17), 2020.
28. Turmetov, B. K. (2017). On the solvability of some boundary value problems for the inhomogeneous polyharmonic equation with boundary operators of the Hadamard type. *Differential Equations*, 53(3), 333-344.

29. Agmon, S., Douglis, A., & Nirenberg, L. (1959). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Communications on pure and applied mathematics*, 12(4), 623-727.
30. Gazzola, F., Grunau, H. C., & Sweers, G. (2010). *Polyharmonic boundary value problems: positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains*. Springer.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Шалхар А.Ә. - докторант, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан, e-mail: shalkhar_aa@enu.kz
	Shalkhar A.A - doctoral student, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan, e-mail: shalkhar_aa@enu.kz
	Шалхар А.А. - докторант, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, г. Астана, Казахстан, e-mail : shalkhar_aa@enu.kz
2	Турметов Б.Х. - ф.-м.ғ.д., профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , +7 777 448 76 44
	Turmetov B.Kh. - doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University , Turkistan, Kazakhstan, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , +7 777 448 76 44
	Турметов Б.Х. - доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , +7 777 448 76 44
3	Қошанова М.Д. - ф.-м.ғ.к., Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
	Koshanova M.D. - candidate of Physical and Mathematical Sciences, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University , Turkistan, Kazakhstan, e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
	Қошанова М.Д. - кандидат физико-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

ФИЗИКА

УДК 621.762.3

МРНТИ 53.39.31

<https://doi.org/10.47526/2025-2/2524-0080.26>

Измайлов Л.Н.¹, Сағымбекова Э.С.², Аубакирова Д.М.³, Қожахметов Е.А.⁴

¹студент, Восточно-Казахстанский технический университет имени Даулета Серикбаева
(Казахстан, г. Усть-Каменогорск), e-mail: leonplay200415@gmail.com

²докторант, Восточно-Казахстанский технический университет имени Даулета Серикбаева
(Казахстан, г. Усть-Каменогорск), e-mail: esaqymbekova@edu.ektu.kz

³PhD, доктор, Восточно-Казахстанский технический университет имени Даулета Серикбаева
(Казахстан, г. Усть-Каменогорск), e-mail: daubakirova@edu.ektu.kz

⁴ PhD, доктор, Восточно-Казахстанский технический университет имени Даулета Серикбаева
(Казахстан, г. Усть-Каменогорск), e-mail: ykozhakhmetov@edu.ektu.kz

РАЗРАБОТКА СПЛАВОВ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ, С ПОМОЩЬЮ
ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ПОРОШКОВ НА ОСНОВЕ NiTiCu
DEVELOPMENT OF SHAPE MEMORY ALLOYS USING HIGH ENERGY MILLING OF NiTiCu BASED
POWDERS
NiTiCu НЕГІЗІНДЕГІ ҰНТАҚТАРДЫ ЖОҒАРҒЫ ЭНЕРГИЯМЕН ҰНТАҚТАУ АРҚЫЛЫ ПІШІНДІ
ЕСТЕ САҚТАЙТЫН ҚОРЫТПАЛАРДЫ ӘЗІРЛЕУ

Аннотация. В работе представлены результаты исследований по разработке сплавов с эффектом памяти формы (ЭПФ) на основе системы NiTiCu с использованием метода высокоэнергетического измельчения порошков. Целью исследования является получение микро-структурированных материалов с улучшенными функциональными свойствами, такими как высокая температурная стабильность, низкий гистерезис фазового перехода и повышенная циклическая долговечность. Метод высокоэнергетического измельчения позволяет достичь однородного распределения компонентов и формирования микро-размерной структуры, что способствует оптимизации фазовых превращений и улучшению механических характеристик сплавов. Проведены исследования влияния параметров измельчения, таких как время обработки и энергия воздействия, на микроструктуру, фазовый состав и функциональные свойства полученных материалов. Результаты демонстрируют перспективность использования высокоэнергетического измельчения для создания сплавов NiTiCu с улучшенными эксплуатационными характеристиками, что открывает новые возможности для их применения.

Ключевые слова: эффект памяти формы, порошковая металлургия, механосинтез, никелид титана, медь, интерметаллические соединения

Abstract. The paper presents the results of studies on the development of alloys with shape memory effect (SME) based on the NiTiCu system using the high-energy powder milling method. The aim of the study is to obtain microstructured materials with improved functional properties, such as high temperature stability, low phase transition hysteresis and increased cyclic durability. The high-energy milling method allows achieving a uniform distribution of components and the formation of a micro-sized structure, which contributes to the optimization of phase transformations and improvement of the mechanical properties of the alloys. The influence of milling parameters, such as processing time and impact energy, on the microstructure, phase composition and functional properties of the obtained materials were studied. The results demonstrate the promise of using high-energy milling to create NiTiCu alloys with improved performance characteristics, which opens up new possibilities for their application.

Keywords: shape memory effect, powder metallurgy, mechanosynthesis, titanium nickelide, copper, intermetallic compounds

Аңдатпа. Жұмыста NiTiCu жүйесі негізінде жоғары энергиялы ұнтақты ұнтақтау әдісімен пішінді есте сақтау әсері бар қорытпаларды (SME) әзірлеу бойынша зерттеулердің нәтижелері берілген. Зерттеудің мақсаты жоғары температура тұрақтылығы, төмен фазалық ауысу гистерезисі және жоғары циклдік төзімділік сияқты жақсартылған функционалдық қасиеттері бар микроқұрылымды материалдарды алу болып табылады. Жоғары энергиялы ұнтақтау әдісі компоненттердің біркелкі таралуына қол жеткізуге және фазалық өзгерістерді оңтайландыруға және қорытпалардың механикалық сипаттамаларын жақсартуға көмектесетін микро өлшемді құрылымды қалыптастыруға мүмкіндік береді. Алынған материалдардың микроқұрылымына, фазалық құрамына және функционалдық қасиеттеріне өңдеу уақыты мен әсер ету энергиясы сияқты ұнтақтау параметрлерінің әсері бойынша зерттеулер жүргізілді. Нәтижелер

өнімділік сипаттамалары жақсартылған NiTiCu қорытпаларын жасау үшін жоғары энергиялы фрезерлеуді қолданудың әлеуетін көрсетеді, оларды қолданудың жаңа мүмкіндіктерін ашады.

Негізгі сөздер: пішінді есте сақтау эффектісі, ұнтақ металлургиясы, механикосинтез, титан никелиді, мыс, металаралық қосылыстар

Введение

Сплавы с эффектом памяти формы (ЭПФ) представляют собой особый класс функциональных материалов, обладающих способностью возвращаться к исходной геометрии после пластической деформации при нагреве до определённой температуры. Данное явление обусловлено обратимым мартенситным фазовым превращением. Наиболее широко применяемыми являются сплавы на основе никелида титана (NiTi), поскольку они характеризуются высокой стабильностью свойств, устойчивостью к коррозии и биосовместимостью [1].

Модификация сплавов NiTi, в частности их легирование медью (Cu), позволяет регулировать ключевые эксплуатационные характеристики [2, 3]. Введение Cu способствует уменьшению температурного гистерезиса фазового перехода, увеличению циклической стойкости и улучшению температурной стабильности. Эти свойства делают сплавы системы NiTiCu перспективными для использования в медицине, аэрокосмической отрасли и микроэлектромеханических системах.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния высокоэнергетического измельчения на микроструктуру, фазовый состав и функциональные характеристики сплавов системы NiTiCu. В рамках исследования анализируются параметры процесса измельчения (время обработки, энергия механического воздействия) и их влияние на формирование дисперсных порошков, обеспечивающих получение материалов с улучшенными свойствами. Полученные данные могут быть использованы при разработке новых композиций сплавов с эффектом памяти формы, отличающихся высокой стабильностью и долговечностью.

Проявление ЭПФ обусловлено фазовым переходом между двумя кристаллическими модификациями: аустенитной (высокотемпературной) и мартенситной (низкотемпературной). Аустенитная фаза характеризуется высокой степенью симметрии атомной решётки (кубическая структура B2), тогда как мартенситная фаза имеет моноклинную структуру (B19'). Переход между этими состояниями происходит бездиффузионным путём, что обеспечивает высокую скорость обратного превращения [4,5].

Ключевым этапом синтеза сплавов с ЭПФ является обеспечение равномерного распределения элементов и гомогенной микроструктуры, поскольку от этих параметров зависят эксплуатационные характеристики материалов. Традиционные методы получения (дуговая плавка, литьё) сопровождаются неоднородностью распределения компонентов и образованием нежелательных фаз. В связи с этим перспективным направлением является порошковая металлургия, в частности, метод высокоэнергетического измельчения, позволяющий получать наноструктурированные порошки с высокой степенью однородности и контролируемым размером частиц [6-8].

Материалы и методы исследования

В качестве исходных материалов применяются порошки никеля, титана и меди. Характеристики этих исходных порошков представлены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики исходных порошков

№ п/п	Наименование	Марка	Чистота, %	Размер частиц, мкм
----------	--------------	-------	---------------	-----------------------

1	Порошок никелевый	SY- 60820241025	99,8%	<50um(мкм)
2	Титановый металлический порошок	SY- 60820241025	99,8%	<50um(мкм)
3	Медный металлический порошок	SY- 60820241025	99,8%	<50um(мкм)

В ходе проведения экспериментов были использованы размольные стаканы, емкостью 45 мл, и мелющие шары диаметром 5 мм, из нержавеющей стали марки 1.4125/X105CrMo17. Для определения подходящего размера шара для требуемой конечной тонкости обычно применяется множитель равный примерно 1000. Таким образом, конечная цель-измельчение до 5 мкм, следовательно наиболее подходящий размер шаров составляет 5 мм. Характеристики размольной гарнитуры приведены в таблице 2.

Таблица 2. Характеристики размольной гарнитуры

Наименование Позиции	Характеристика	Твердость	Химический состав, %
Размольный стакан	объем - 45 мл	60 HRC	Fe (81,4), Cr (17), C (1.1), Mo (0,5)
Мелющие шары	диаметр - 5 мм		

В ходе экспериментов изучается, как параметры синтеза—соотношение мелющих шаров к порошку, ускорение и продолжительность процесса—влияют на структуру и свойства порошков системы Ni-Ti-Cu. Подбирая оптимальные параметры, можно добиться большей однородности и стабильности материала.

Скорость вращения планетарной мельницы играет важную роль, и в опытах используются два режима—650 и 750 об/мин. Медь добавляют в сплав, поскольку она улучшает его структуру и механические свойства: снижает гистерезис фазового перехода, стабилизирует температуру мартенситного превращения, повышает коррозионную стойкость и препятствует образованию нежелательной фазы Ti_3Ni_4 .

Механический синтез порошка $NiTi_{45}Cu_{10}$ проводят в течение разного времени—1, 3, 5 и 8 часов—чтобы определить оптимальные условия. Чем дольше идёт обработка, тем лучше распределяются компоненты, но при этом растёт температура, что требует тщательного контроля. Поэтому важно найти баланс между однородностью порошка и сохранением его стабильности.

Так же есть необходимость использования стеариновой кислоты в процессе механосинтеза системы Ni-Ti-Cu связана с риском налипания порошков на мелющие инструменты, что может привести к потерям материала. Опыт работы с металлическими порошками, включая пластичные металлы, показывает, что стеариновая кислота способствует улучшению процесса измельчения. Для оценки её эффективности проводятся два сравнительных синтеза в одинаковых условиях, результаты которых позволяют определить целесообразность её дальнейшего применения [10].

После каждого этапа синтеза порошки будут исследованы современными методами материаловедения для анализа их структуры и свойств.

Результаты и обсуждения

Порошки NiTiCu были измельчены и механосинтезированы в планетарно-шаровой мельнице FRITSCH Pulverisette 7, что при последующем XRD анализе порошков позволило обнаружить новые фазы аустенита (B2) и мартенсита (B19'). Исследование микроструктуры и размера частиц порошков проводились на сканирующем электронном микроскопе TESCAN и анализаторе частиц FRITSCH Analysette 22. Новообразованные агломерации после механосинтеза обладают меньшими размерами, а также более стабильной формой.

На рисунке 1 и 2 представлены результаты XRD анализа по времени обработки и по параметрам оборотов в минуту

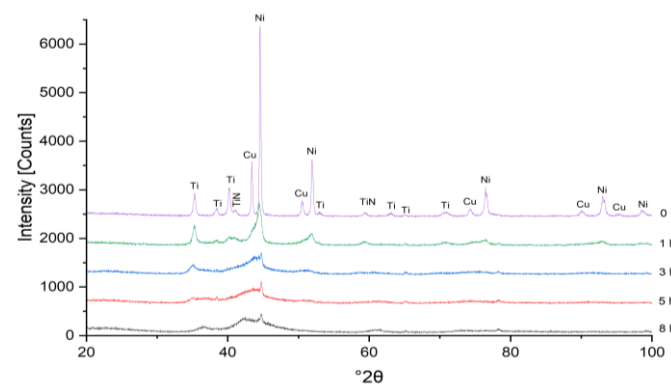


Рисунок 1. Дифрактограмма порошков NiTi45Cu10 после механосинтеза при 750об/мин

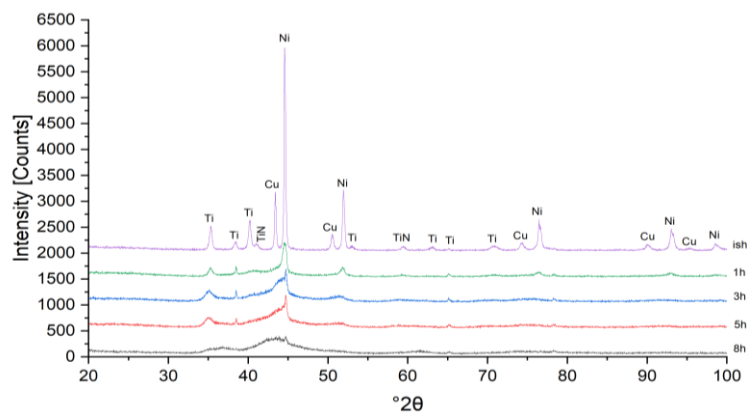


Рисунок 2. Дифрактограмма порошков NiTi45Cu10 после механосинтеза при 650об/мин

Результаты рентгенодифракционного (XRD) анализа порошков, представленные на рисунках 1 и 2, показывают наличие фаз аустенита (B2) и мартенсита (B19'). Наблюдаемый сдвиг по фазе свидетельствует о влиянии времени обработки на фазовые превращения. Увеличение продолжительности измельчения способствует более равномерному распределению фазовых компонентов, что подтверждается анализом дифрактограмм. Так же наблюдается новое фазообразование различных соединений никелида титана (Ni Ti , $\text{Ni}_2 \text{Ti}$, $\text{Ni}_3 \text{Ti}$) и никелида меди (Ni Cu). Такие фазообразования говорят о наличии агломераций, которые в дальнейшую обработку порошка, а именно SPS спеканием, помогут образовать более мелкодисперсный материал, тем самым улучшив свойства сплава. Это подтверждается

при дальнейшем анализе порошка. На рисунке 3 представлена диаграмма распределения размеров частиц после механосинтеза, демонстрирующая снижение среднего размера, с увеличением времени обработки.

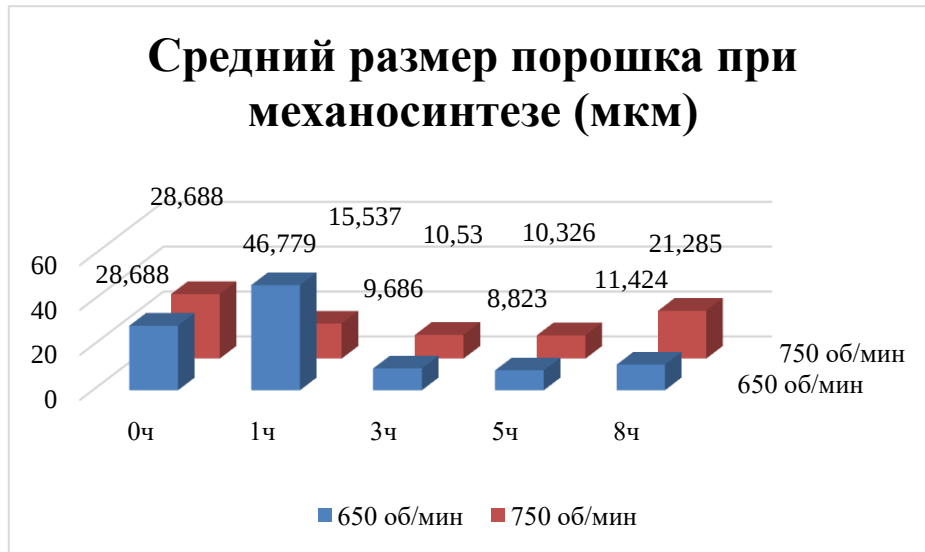


Рисунок 3. Диаграмма распределения размеров порошков после механосинтеза, в зависимости от времени обработки

В проведённом исследовании рассмотрено влияние параметров высокоэнергетической механической обработки, в частности скорости вращения и времени измельчения, на размер и морфологические характеристики порошков, полученных методом механосинтеза. Целью работы являлось выявление закономерностей изменения размеров частиц и формирования агломератов в зависимости от режима обработки. Анализ проводился на основе результатов, представленных в виде диаграммы распределения размеров частиц (рисунок 3) и сканирующих электронных микрофотографий (рисунок 4).

Согласно диаграмме распределения, при скорости вращения 650 об/мин на начальной стадии обработки наблюдается увеличение среднего размера частиц. Этот эффект обусловлен интенсивным холодным свариванием частиц между собой, приводящим к образованию плотных агломератов. Характерной особенностью такого поведения является преобладание коалесценции над фрагментацией, что типично для ранних стадий механосинтеза. По мере увеличения времени обработки до 8 часов наблюдается интенсификация процессов измельчения: агломераты частично разрушаются, и происходит дробление укрупнённых структур на более мелкие фрагменты. Это приводит к уменьшению среднего размера порошков, однако полное устранение агломерации не достигается.

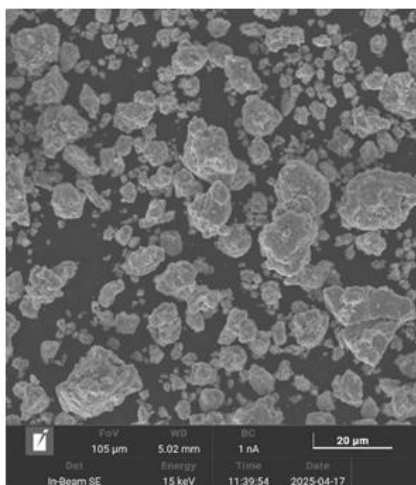
При увеличении скорости вращения до 750 об/мин наблюдается более выраженное снижение размера частиц. Уже на начальных этапах (3–5 часов) достигаются значения порядка 10 мкм, что связано с возрастанием кинетической энергии ударов между шарами и частицами порошка. Однако при увеличении времени обработки до 8 часов вновь фиксируется увеличение размера частиц, что объясняется повторной агломерацией вследствие повышенной энергии взаимодействий. Это указывает на наличие критической продолжительности обработки, после которой процесс измельчения уступает место формированию сваренных агломератов.

СЭМ-изображения, представленные на рисунке 4, подтверждают выводы, сделанные на основании анализа распределения размеров. На микрофотографиях частиц, полученных при обработке со скоростью 750 об/мин, чётко прослеживается динамика изменения морфологии. Через 1 час обработки частицы имеют неправильную форму, присутствуют крупные

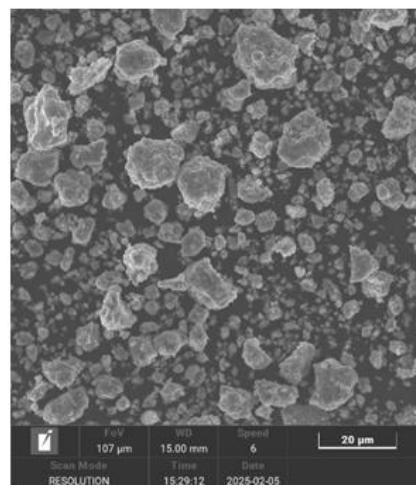
фрагменты и признаки начального агломерирования. После 3 и 5 часов частицы становятся более изометричными, приобретают округлую форму и меньший размер, что свидетельствует об эффективном измельчении и частичном разрушении агломератов. Однако после 8 часов обработки вновь наблюдается увеличение количества агломерированных частиц, что проявляется в виде плотных структур неправильной формы, включающих несколько сваренных между собой частиц.

Аналогичная картина наблюдается при скорости 650 об/мин: в начальной фазе доминируют крупные сваренные частицы, к 5 часу морфология становится более однородной, но к 8 часу снова появляются признаки агломерации. Таким образом, можно заключить, что максимальный эффект диспергирования достигается при промежуточных временных интервалах (3–5 часов), вне зависимости от скорости вращения. Однако более высокая скорость позволяет достигать меньшего среднего размера частиц при том же времени обработки.

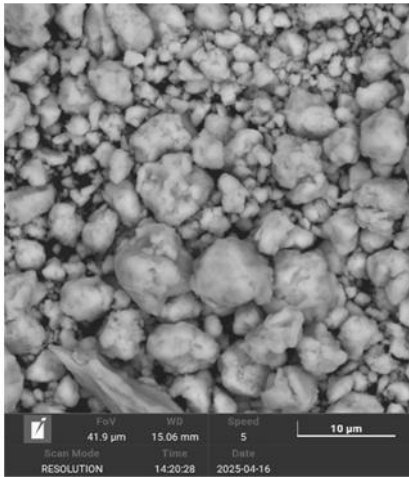
Полученные результаты указывают на ключевую роль времени и интенсивности обработки в механохимических процессах. Слишком короткое время не обеспечивает полного измельчения, а чрезмерно продолжительное вызывает агломерацию и повторное укрупнение частиц. Следовательно, для достижения оптимальной дисперсности порошков необходимо точно подбирать параметры обработки, учитывая критическую границу перехода от измельчения к агломерации. Это имеет особую важность при получении металлгидридов или других функциональных материалов, чувствительных к размеру и морфологии частиц.



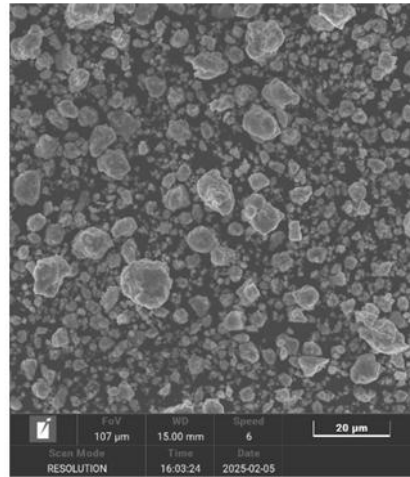
a



b

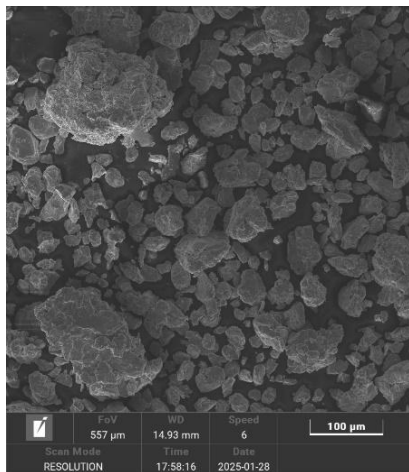


с

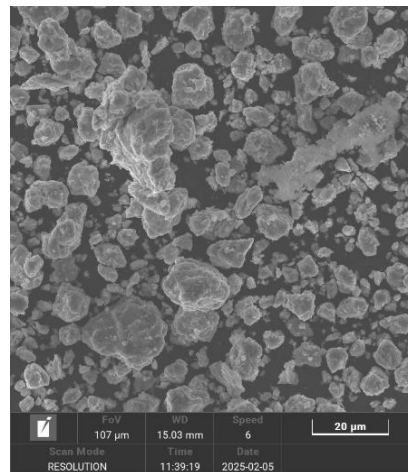


d

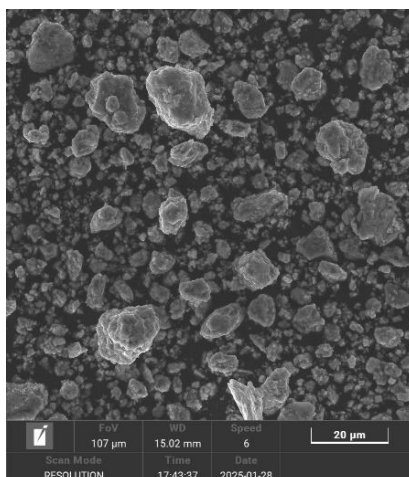
Рисунок 4. СЭМ изображение частиц при 750об/мин, (а)-1ч, (б)-3ч, (с)-5ч, (д)-8ч



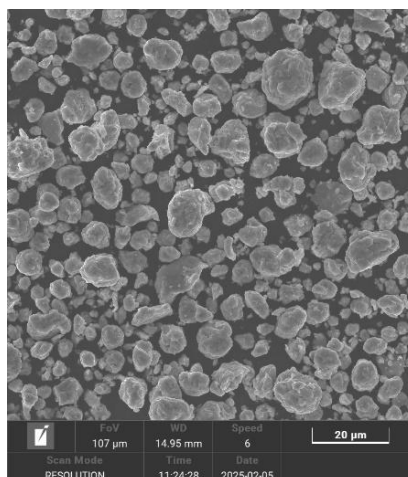
a



b



с



d

Рисунок 5. СЭМ изображение частиц при 650об/мин, (а)-1ч, (б)-3ч, (с)-5ч, (д)-8ч

Закключение

В работе рассматривалось получение, с использованием метода высокоэнергетического измельчения порошков, сплавов с эффектом памяти формы на основе системы NiTiCu. Основная цель работы заключалась в синтезе наноструктурированных материалов с высокой температурной стабильностью, низким гистерезисом фазового перехода и высокой циклической долговечностью. Используемое в работе высокоэнергетическое измельчение в сочетании с механической активацией позволило достичь не только равномерного распределения компонентов, но и формирования наноразмерной структуры, что в свою очередь оптимизирует фазовые превращения и улучшает механические свойства сплавов. Эксперименты показали, что такие параметры, как время и энергия воздействия, имеют придельное значение для соотношения микроструктуры, ее фазового состава, а также функциональных свойств готовых материалов. Результаты XRD и SEM анализа подтвердили наличие аустенитной (B2) и мартенситной (B19') фаз, а также продемонстрировали уменьшение среднего размера частиц с увеличением времени обработки. Снижение размером частиц и повышение их морфологии в целом говорит о высокой эффективности технологии высокоэнергетического дробления для синтеза наноструктурированных порошков.

Легирование медью (Cu) сплавов NiTi показало свое положительное влияние в уменьшении температурного гистерезиса фазового перехода, в увеличении циклической долговечности и температурной стабильности. Это делает NiTiCu сплавы перспективными к области медицины, аэрокосмической техники и микроэлектромеханических систем.

Список использованной литературы

1. Остропико, Е. С. (2018). *Исследование функциональности рабочих элементов с памятью формы: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04.* СПб, 113.
2. Куранова, Н. Н., Окулов, А. В., Пушин, А. В. и др. (2015). Влияние легирования медью и железом на термоупругие мартенситные превращения и физико-механические свойства сплавов никелида титана с эффектами памяти формы. *International Journal of Applied and Fundamental Research*, (12), 422–426.
3. Оленева, Ю. Н., Демаков, С. Л., Оленева, О. А. (2015). Разработка легкоплавкого титанового сплава. В *XVI Международная научно-техническая Уральская школа-семинар металлослов-молодых ученых. Екатеринбург, 7–11 декабря 2015 г.: сборник научных трудов* (Ч. 2, 201–204). Екатеринбург: Издательство Уральского университета..
4. Ильин, А. А., Кудрявцев, А. В., Лебедев, А. А. (2018). Разработка сплавов с эффектом памяти формы. *Научный форум: Инновационная наука*, (6)12. URL: <https://scienceforum.ru/2018/article/2018006907>
5. Коновалова, М. А., Ваулина, О. Ю., Скачкова, О. С. (2018). Влияние механической активации на морфологию порошкового никелида титана. В *Перспективные материалы конструкционного и медицинского назначения: сборник трудов Международной научно-технической молодежной конференции, Томск, 26–30 ноября 2018 г.* (С. 351–352). Томск: Изд-во ТПУ.
6. Воеводенко, Д. В. (2022). *Синтез никелида титана методами механического легирования и плазменной сфероидизации, пригодного для использования в аддитивных технологиях: выпускная квалификационная работа магистра: направление 22.04.01 «Материаловедение и технологии материалов»; образовательная программа 22.04.01_10 «Материалы и технологические процессы аддитивного производства».* Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
7. Савин, И. Е., Клопотов, А. А., Марченко, Е. С., Гюнтер, В. Э. (2017). Влияние микролегирования Nb и Mo на механические свойства сплава на основе никелида титана. В *Высокие технологии в современной науке и технике (ВТСНТ-2017): Сборник научных трудов VI Международной научно-технической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов, Томск, 27–29 ноября 2017 г.* (С. 104–105). Томск: Изд-во ТПУ.
8. Кунцевич, Т. Э., Пушин, А. В., Пушин, В. Г. (2018). Микроструктура и свойства сплавов на основе никелида титана, полученных быстрой закалкой из расплава. *Институт физики металлов УрО РАН.*

9. Losertová, M., Štencek, M., Matýsek, D., Štefek, O., & Drápala, J. (2017). Microstructure evolution of heat treated NiTi alloys. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 266, 012008.
10. Arunkumar, S., Kumaravel, P., Velmurugan, C., & Senthilkumar, V. (2018). Microstructures and mechanical properties of nanocrystalline NiTi intermetallics formed by mechanosynthesis. *International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials*, 25, 80–87.
11. Макаров, А. А. (2019). *Исследование неупругих свойств никелида титана с субмикро- и наномасштабными поверхностными слоями, сформированными электронно-ионно-плазменными методами*. Магистерская диссертация, Национальный исследовательский Томский политехнический университет.
12. Роговенко, Е. С., Фоменко, Е. В., Кухтецкий, С. В. (2022). СЭМ-ЭДС исследование взаимосвязи состава и строения стеклокристаллической оболочки ценосфер энергетических зол. *Журнал Сибирского федерального университета. Химия*, 15(2), 287–296.
13. Сидоренко, Т. И., Возная, В. И., Белаш, Ю. С., Ермаченко, Е. В. (2022). Автоматический анализ неметаллических включений в стали с помощью электронного микроскопа с энергодисперсионным микроанализатором. *Литье и металлургия*, (1), 64–69.
14. Мухаметжанов, Х., Бекарисов, О. С., Мухаметжанов, Д. Ж., Карибаев, Б. М., Дюсенбаев, Н. Н., Жанаспаев, Т. М. (2021). Научное обоснование использования биокомпозитного материала из гранул пористого никелида титана, обогащенного тромбоцитарной массой, для костной пластики. *Травматология и ортопедия Казахстана*, 60(4), 10–30.
15. Аникеев, С. Г., Кафтаранова, М. И., Ходоренко, В. Н., Артюхова, Н. В., Гарин, А. С., Гюнтер, В. Э. (2020). Влияние добавок титана на структурные особенности пористых материалов на основе никелида титана, полученных методом диффузионного спекания. *Неорганические материалы*, 56(9), 968–974.
16. Хабибова, Е. Д., Чернова, А. П., Семин, В. О. (2022). Исследование коррозионных характеристик сплава никелида титана для медицины. В *Материалы XXIII Международной научно-практической конференции студентов и молодых ученых имени Л. П. Кулёва и Н. М. Кижнера, Томск, 16–19 мая 2022 г., Т. 1*, 456–457.

References

1. Ostropiko, E. S. (2018). *Issledovanie funktsional'nosti rabochikh elementov s pamyat'yu formy: dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.02.04*. SPB.
2. Kuranova, N. N., Okulov, A. V., Pushin, A. V., et al. (2015). Vliyanie legirovaniya med'yu i zhelezom na termouprugie martensitnye prevrashcheniya i fiziko-mekhanicheskie svoystva splavov nikelida titana s effektami pamyati formy. *INTERNATIONAL JOURNAL OF APPLIED AND FUNDAMENTAL RESEARCH*, (12), 422–426.
3. Oleneva, Yu. N., Demakov, S. L., Oleneva, O. A. (2015). Razrabotka legkoplavkogo titanovogo splava. In *XVI Mezhdunarodnaya nauchno-tehnicheskaya Uralskaya shkola-seminar metallovedov-molodykh uchenykh. Ekaterinburg, 7–11 dekabrya 2015 g.: sbornik nauchnykh trudov* (Ch. 2, pp. 201–204). Ekaterinburg: Izdatel'stvo Uralskogo universiteta.
4. Ilin, A. A., Kudryavtsev, A. V., Lebedev, A. A. (2018). Razrabotka splavov s эффектом pamyati formy. *Nauchnyy forum: Innovatsionnaya nauka*, (6)12. <https://scienceforum.ru/2018/article/2018006907>
5. Konovalova, M. A., Vaulina, O. Yu., Skachkova, O. S. (2018). Vliyanie mekhanicheskoy aktivatsii na morfologiyu poroshkovogo nikelida titana. In *Perspektivnye materialy konstruksionnogo i meditsinskogo naznacheniya: sbornik trudov Mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy molodezhnoy konferentsii, Tomsk, 26–30 noyabrya 2018 g.* (pp. 351–352). Tomsk: Izd-vo TPU.
6. Voevodenko, D. V. (2022). *Sintez nikelida titana metodami mekhanicheskogo legirovaniya i plazmennoy sferoidizatsii, prigodnogo dlya ispol'zovaniya v additivnykh tekhnologiyakh: vypusknaya kvalifikatsionnaya rabota magistra: napravlenie 22.04.01 "Materialovedenie i tekhnologii materialov"; obrazovatel'naya programma 22.04.01_10 "Materialy i tekhnologicheskie protsessy additivnogo proizvodstva"*. Sankt-Peterburg: Sankt-Peterburgskiy politekhnicheskii universitet Petra Velikogo.
7. Savin, I. E., Klopotov, A. A., Marchenko, E. S., Günter, V. E. (2017). Vliyanie mikrolegirovaniya Nb i Mo na mekhanicheskie svoystva splava na osnove nikelida titana. In *Vysokie tekhnologii v sovremennoy nauke i tekhnike (VTSNT-2017): Sbornik nauchnykh trudov VI Mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii molodykh uchenykh, aspirantov i studentov, Tomsk, 27–29 noyabrya 2017 g.* (pp. 104–105). Tomsk: Izd-vo TPU.
8. Kuntsevich, T. E., Pushin, A. V., Pushin, V. G. (2018). Mikrostruktura i svoystva splavov na osnove nikelida titana, poluchennykh bystroy zakalkoy iz rasplava. *Institut fiziki metallov UrO RAN*.
9. Losertová, M., Štencek, M., Matýsek, D., Štefek, O., & Drápala, J. (2017). Microstructure evolution of heat treated NiTi alloys. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 266, 012008.

10. Arunkumar, S., Kumaravel, P., Velmurugan, C., & Senthilkumar, V. (2018). Microstructures and mechanical properties of nanocrystalline NiTi intermetallics formed by mechanosynthesis. *International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials*, 25, 80–87.
11. Makarov, A. A. (2019). *Issledovanie neuprugikh svoystv nikelida titana s submikro- i nanomasshtabnymi poverkhnostnymi sloyami, sformirovannymi elektronno-ionno-plazmennymi metodami* (Magisterskaya dissertatsiya). Natsional'nyy issledovatel'skiy Tomskiy politekhnicheskii universitet.
12. Rogovenko, E. S., Fomenko, E. V., Kukhletskiy, S. V. (2022). SEM-EDS issledovanie vzaimosvyazi sostava i stroeniya steklokristallicheskoy obolochki tsenosfer energeticheskikh zol. *Zhurnal SibIrskogo federal'nogo universiteta. Khimiya*, 15(2), 287–296.
13. Sidorenko, T. I., Voznaya, V. I., Belash, Yu. S., Ermachenok, E. V. (2022). Avtomaticheskii analiz nemetallcheskikh vklyucheniye v stali s pomoshch'yu elektronogo mikroskopa s energodispersionnym mikroanalizatorom. *Lite i metallurgiya*, (1), 64–69.
14. Mukhametzhannov, Kh., Bekarisov, O. S., Mukhametzhannov, D. Zh., Karibaev, B. M., Dyusenbaev, N. N., Zhanaspaev, T. M. (2021). Nauchnoe obosnovanie ispol'zovaniya biokompozitnogo materiala iz granul poristogo nikelida titana, obogashchennogo trombotsitarnoy massoy, dlya kostnoy plastiki. *Travmatologiya i ortopediya Kazakhstana*, 60(4), 10–30.
15. Anikeev, S. G., Kaftaranova, M. I., Khodorenko, V. N., Artyukhova, N. V., Garin, A. S., Günter, V. E. (2020). Vliyaniye dobavok titana na strukturnye osobennosti poristyykh materialov na osnove nikelida titana, poluchennykh metodom diffuzionnogo spevaniya. *Neorganicheskie materialy*, 56(9), 968–974.
16. Khabibova, E. D., Chernova, A. P., Semin, V. O. (2022). Issledovanie korrozionnykh kharakteristik splava nikelida titana dlya meditsiny. In *Materialy XXIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii studentov i molodykh uchenykh imeni L. P. Kulyova i N. M. Kizhera, Tomsk, 16–19 maya 2022 g.*, 1, 456–457.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Измайлов Л.Н. — студент, Дәулет Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан, e-mail: leonplay200415@gmail.com
	Izmailov L.N. — student, East Kazakhstan Technical University named after Daulet Serikbayev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan, e-mail: leonplay200415@gmail.com
	Измайлов Л.Н. — студент, Восточно-Казахстанского технического университета имени Даулета Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан, e-mail: leonplay200415@gmail.com
2	Сағымбекова Э.С. — докторант, Дәулет Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университетінің VERITAS артықшылық орталығының ғылыми инженері, Өскемен қ., Қазақстан, e-mail: esagymbekova@edu.ektu.kz
	Sagymbekova E.S. — doctoral student, research engineer of the CE VERITAS the East Kazakhstan Technical University named after Daulet Serikbayev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan, e-mail: esagymbekova@edu.ektu.kz
	Сағымбекова Э.С. — докторант, инженер-исследователь ЦП «VERITAS» Восточно-Казахстанского технического университета имени Даулета Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан, e-mail: esagymbekova@edu.ektu.kz
3	Аубакирова Д.М. — PhD, доктор, Дәулет Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан, e-mail: daubakirova@edu.ektu.kz
	Aubakirova D.M. — PhD, doctor of the International School of Engineering of the East Kazakhstan Technical University named after Daulet Serikbayev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan, e-mail: daubakirova@edu.ektu.kz
	Аубакирова Д.М. — PhD, доктор, Международной школы инженери Восточно-Казахстанского технического университета имени Даулета Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан, e-mail: daubakirova@edu.ektu.kz
4	Қожахметов Е.А. — PhD, доктор, Дәулет Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университетінің VERITAS артықшылық орталығының жетекшісі, Өскемен қ., Қазақстан, e-mail: ykozkhakmetov@edu.ektu.kz
	Kozhakhmetov Y.A. — PhD, doctor, Head of the CE "VERITAS" of the East Kazakhstan Technical University named after Daulet Serikbayev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan, e-mail: ykozkhakmetov@edu.ektu.kz
	Қожахметов Е.А. — PhD, доктор, руководитель ЦП «VERITAS» Восточно-Казахстанского технического университета имени Даулета Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан, e-mail: ykozkhakmetov@edu.ektu.kz

Қурбанбеков Ш.Р.¹, Эртаев Н.С.², Айдарова М.Т.³, Қожахметов Е.А.⁴, Амангельдиева Ю.О.⁵

¹PhD, профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: sherzod.kurbanbekov@ayu.edu.kz

²магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: nursultan.ertayev@ayu.edu.kz

³PhD докторанты, Дәулет Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті (Қазақстан, Өскемен қ.), e-mail: maidarova@ektu.kz

⁴PhD, Дәулет Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті (Қазақстан, Өскемен қ.), e-mail: ykozkhakmetov@ektu.kz

⁵магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: yulduz.amangeldiyeva@ayu.edu.kz

**МЕХАНОАКТИВАЦИЯ ТҮРЛЕРІНІҢ WC ҚОРЫТПАЛАРЫНА ӘСЕРІ
INFLUENCE OF TYPES OF MECHANOACTIVATION ON WC ALLOYS
ВЛИЯНИЕ ВИДОВ МЕХАНОАКТИВАЦИИ НА WC СПЛАВЫ**

Аңдатпа. Бұл мақалада механоактивацияның (МА) вольфрам карбиді негізіндегі қорытпаларға әсері туралы зерттеулерге шолу жасалған. МА материалтану саласында кеңінен қолданылады және қоспалардың реакциялық белсенділігін арттыру мақсатында олардың физика-механикалық қасиеттерін өзгертуге бағытталған. Вольфрам карбиді негізіндегі қатты қорытпалар өнеркәсіптің әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады, өйткені олар тамаша механикалық қасиеттерге, ерекше тозуға төзімділікке, жоғары беріктік пен термиялық төзімділікке ие. Осыған байланысты, вольфрам карбиді негізіндегі қатты қорытпалар өндірісінің кесу құралдарын жасауға ең жарамды болып табылады. Сонымен қатар, мақалада әртүрлі зерттеулерде қолданылатын механоактивацияның күрделі түрлеріне талдау келтірілген. Алынған қорытпалардың физика-механикалық қасиеттеріне механоактивацияның түрлерінің әсері де қарастырылады. Ұшқынды плазмалық агломерациялау (SPS) әдісімен алдын ала механоактивация жүргізілген ұнтақ үлгілерінен қатты қорытпа алудың оңтайлы параметрлеріне талдау жүргізілді, бұл материалдардың жоғары тығыздығы мен беріктігіне қол жеткізуге мүмкіндік береді. Сондай-ақ, механоактивация уақытының және кейінгі ұшқын-плазмалық агломерацияның вольфрам карбиді қорытпаларының микроқұрылымы мен механикалық қасиеттеріне әсерін зерттеуге ерекше назар аударылады. Механоактивация уақыты мен алынған қорытпалардың қасиеттері арасындағы байланысты түсіну әртүрлі өнеркәсіптік қолданбаларда қолданылатын вольфрам қорытпаларының өндіріс процестерін оңтайландыру үшін өте маңызды.

Негізгі сөздер: механикалық белсендіру, механоактивация уақыты, вольфрам карбиді, белсендіру әдістері, механикалық қасиеттері, микроқұрылымы.

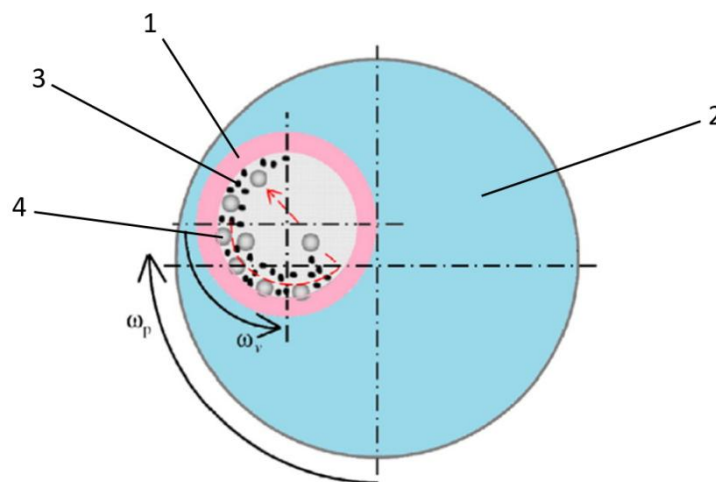
Abstract. This article reviews studies on the effect of mechanical activation (MA) on tungsten carbide-based alloys. MA is widely used in the field of materials science and is aimed at changing the physicochemical properties of additives in order to increase their reactivity. WC-based hard alloys are widely used in various industries, as they have excellent mechanical properties, exceptional wear resistance, high strength and thermal stability. In this regard, tungsten carbide-based hard alloys are most suitable for the production of cutting tools. In addition, the article provides an analysis of complex types of mechanical activation used in various studies. The effect of types of mechanical activation on the physicochemical properties of the obtained alloys is also considered. An analysis of the optimal parameters for obtaining hard alloys from powder samples pre-mechanically activated by the spark plasma sintering (SPS) method was carried out, which allows achieving high density and strength of materials. Special attention is also paid to studying the effect of mechanoactivation time and subsequent spark-plasma sintering on the microstructure and mechanical properties of tungsten carbide alloys. Understanding the relationship between mechanoactivation time and the properties of the resulting alloys is crucial for optimizing the production processes of tungsten alloys used in various industrial applications.

Key words: mechanical activation, MA time, WC, activation methods, mechanical properties, microstructure.

Аннотация. В настоящей работе представлен обзор исследований, направленных на получение сплавов на основе карбида вольфрама с предварительно проведенной механоактивацией (МА). МА широко применяется в области материаловедения и направлена на изменения физико-механических свойств материалов с целью повышения активности их реакции. В связи с этим, основное внимание в данной статье направлено на исследование влияния механоактивации на смеси на основе карбида вольфрама. Твердые сплавы на основе

Ключевые слова: механоактивация, время МА, WC, методы активации, механические свойства, микроструктура.

Механоактивация ұнтақтау немесе араластыру сияқты механикалық өңдеу арқылы заттың немесе заттар қоспасының химиялық белсенділігін арттыратын процесс. Бұл процессте компоненттердің өзара байланысуы ақаулардың жинақталу жылдамдығы олардың жойылу жылдамдығынан асатын кезде пайда болады. МА центрден тепкіш, планетарлық және реактивті диірмендерде, дезинтегратор сияқты құрылғыларда жүзеге асырылады [2,3]. Ұнтақ композицияларында МА нәтижесінде белсенді фазалық түрлендірулер пайда болады, олар қатты материалдардың дисперстік нығаюын қамтамасыз ететін әртүрлі аралық қосылыстардың түзілуіне алып келеді [4-6]. Тепе-теңдік күйден қашықтығы ұлғайған сайын жүйенің күйін анықтайтын параметрлердің саны артады. Жоғары тепе-теңдіксіз жағдайларда түзілген құрылымдар тұрақты, сондықтан көп компонентті қоспалардың механикалық активтенуі кезінде бөлшектер құрылымының эволюциясын мұқият зерттеу қажет [7]. Көп жағдайда, МА жоғары энергиялы шарлы диірмендер арқылы жүргізіледі (сурет 1)—бұл нанокұрылымды және аморфты материалдарды өндірудің экономикалық, қарапайым және тиімді әдісі болып табылады [8].



Ұнтақтаудың негізгі мақсаты – энергия шығынын барынша азайта отырып, ұнтақтың меншікті беткі ауданын арттыру, ал активтендіру міндеті келесі химиялық түрлендірулер үшін активтену энергиясын азайту үшін кристалдарда энергияны ақаулар түрінде жинақтау [9,10]. Шарлы диірмендерде вольфрам тотығын аморфты көміртегімен араластыру вольфрам карбидін алудың классикалық әдісі ретінде өткен ғасырдағы оқулықтарда сипатталған. Араластырудан кейін алынған қоспа сутегі атмосферасында вольфрам карбиді синтезінің химиялық реакция тудыруға арналған пешке жүктеледі [11-13]. МА-дан басқа, әртүрлі салаларда қолданылатын физикалық, химиялық, термиялық және осы әдістердің кешенді белсендіру түрлері де бар.

Бұл жұмыстың мақсаты WC негізіндегі қорытпалардың микроқұрылымына, механикалық қасиеттеріне және фазалық құрамына механоактивацияның әртүрлі түрлерінің әсерін зерттеу болып табылады.

Механикалық активацияның комплекстік түрлері

Механикалық термиялық өңдеу

Механотермиялық өңдеу механоактивация мен термиялық өңдеудің кешенді түрі. Механотермиялық өңдеудің мәні реагенттерді шарлы диірменде инертті атмосферада әрекеттесетін бөлшектердің беті үнемі жаңаратын температурада ұзақ уақыт ұнтақтау болып табылады, ал реакция жылдамдығы реакцияға түсетін компоненттердің бір-біріне диффузиясына аз тәуелді болады [14]. Дегенмен, термиялық күйдіру механотермиялық белсендіру сатысынан кейін қажетті кристалдық құрылымды алу үшін қажет, бұл энергия шығынының артуына алып келеді [15,16].

Баженов пен Курловтың жұмысында [17] механотермиялық өңдеу мен одан кейінгі қатты күйдегі әдістермен WC қорытпаларын синтездеу жүргізілді. Зерттеу таза вольфрам (W) және көміртегі (C) қоспасының 1000-нан 1200°C-қа дейінгі температура диапазонында жүргізілген МА қатты қорытпа алу үшін жүргізілген синтез процесіне айтарлықтай әсер ететінін көрсетті. Алайда, синтез кезінде бір фазалы көміртек түзілгенімен, соңғы қорытпада бос көміртектің артық мөлшері болатынын көрсетті. МА кезінде синтезделген WC орташа түйіршік мөлшері кішірек болды.

Қатты күйдегі механоактивацияланған реакция деп аталатын процесс нәтижесінде үштік карбид CoWC түзілуіне назар аудара отырып, Цучида және әріптестері зерттеу жүргізді [18]. Бұл кобальт (Co), вольфрам (W) және көміртектің (C) ұнтақ қоспаларын белгілі бір молярлық қатынаста ұнтақтап, содан кейін оларды жоғары температурада қыздырды. Бір фазалы CoWC қосылысына жету үшін оңтайлы молярлық қатынас Co/W/C=7/7/2 екендігі анықталды. Бұл қоспаны 4 сағат бойы ұнтақтап, 1100°C дейін қыздырғанда, 800°C салыстырмалы төмен температурада түзілу басталғанымен CoWC сәтті қалыптасты. Тұтастай алғанда, алынған деректер механикалық активациялау бақыланатын қыздырумен үйлескенде, төмен температурада үштік карбидтерді тиімді құра алатынын көрсетеді, бұл басқа күрделі материалдардың синтезіне әсер етуі мүмкін.

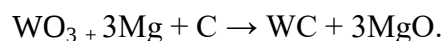
Наноөлшемді WC бөлшектерін әртүрлі температурада вакуум жағдайында WO₃ және графиттің механикалық активацияланған қоспасын қыздыру арқылы да синтездеуге болады [19]. WO₃-C ұнтақ қоспасын МА-ның өзі WC фазасының пайда болуына әкелмейтіні анықталды. Дегенмен, қоспаны 1250°C температурада 2 сағат бойы қыздыру WC нанобөлшектерінің пайда болуына әкелді. Бұл WO₃-ті WC-ге сәтті түрлендіру үшін белгілі бір температура өте маңызды екенін білдіреді. Қоспаға KCl қосу нәтижесінде жұқа және біркелкі WC бөлшектері пайда болды. Керісінше, никельдің болуы WC бөлшектерінің өсуіне ықпал етті, бұл қоспалар нанобөлшектердің морфологиясы мен өлшемін реттеуде маңызды рөл атқарады деп болжайды. Алынған нәтижелер синтез процесінде температура мен қоспалардың маңыздылығын көрсетеді және жоғары сапалы вольфрам карбидінің нанобөлшектерін алу шарттарын оңтайландыру туралы түсінік береді. Наноқұрылымды WC

ұнтақтарының синтезі МА-ны қамтитын екі сатылы процесті, содан кейін термиялық активациялау жайлы Калдеронның жұмысында [20] хабарланған. Синтезделген нанокұрылымды WC ұнтақтары агломерациядан кейін WC негізіндегі қатты материалдардың механикалық қасиеттерін жақсарту үшін қажетті жұқа микроқұрылымдарды құрады. Бұл жақсарту сәтті синтез процесі мен ұнтақтау параметрлері мен көміртегі көзін мұқият таңдаумен байланысты. Осылайша, зерттеу нәтижелері қатты материалдардың механикалық қасиеттерін жақсарту үшін шешуші маңызы бар нанокұрылымды WC ұнтақтарын синтездеуде механикалық активациялаудың да, көміртегі көзін таңдаудың да маңыздылығын көрсетеді.

Оро және әріптестері [21] механотермиялық өңдеуді WC ұнтақтарын синтездеу үшін әртүрлі көміртек көздерін (графит және көміртекті қара) және әртүрлі атмосферада (Ar, Ar-50H₂, Ar-10CO) 1100°C дейінгі температурада жүргізді. Нәтижесінде дән өлшемдері 200 нм-ден аз бір фазалы WC ұнтақтары алуға болатыны анықталды. Осылайша, WC синтезі Ar және Ar-10CO атмосфераларында 1100°C температурада аяқталып, көміртегі қара сутегі атмосферасында графитке қарағанда тиімдірек болды.

Механохимиялық синтез

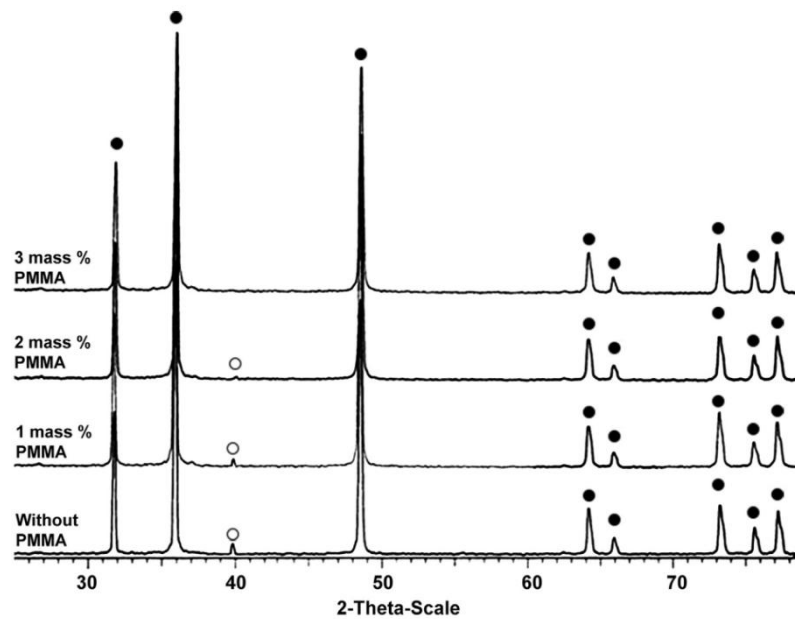
Механохимиялық синтез (МХС)—механикалық әсер ету кезіндегі химиялық және физика-химиялық процестерді жеделдету немесе тиімділігін арттыру [22]. МХС қазіргі уақытта құрылыс, фармацевтика, химия және басқа салаларда технологиялық процестерді интенсификациялау үшін сәтті қолданылады. Онищенко мен Реваның жұмыстарында [23] жоғары температуралық МХС арнайы жасалған эксперименттік қондырғыда, ал WC синтезі Ягофаров және әріптестері [24] жасаған зерттеулерінде төменде келтірілген реакция бойынша жүргізілді:



Жұмыс реакциядағы полиметилметакрилаттың (ПММА) мөлшерін 3%-ға дейін арттыру W₂C фазасының құрамының төмендеуіне әкелетінін көрсетті. Синтезделген ұнтақтардың шоғырлануға бейімділігі жоғары болды. Ал синтезделген ұнтақтағы ПММА азырақ болған жағдайда W₂C фазасы байқалды. Сондай-ақ құрамның W₂C-тен WC-қа толық ауысуына Ян [25] жұмысындағыдай балқытылған тұзды қолдану арқылы синтездеу кезіндегі реакция жағдайларын жоғарылату, сұйық фазадағы химиялық реакциямен механикалық қоспалауды біріктіру әсер етуі мүмкін: соңғы қорытпалар 300-ден 500 нм-ге дейінгі бөлшектердің өлшемімен сипатталды, бұл нанокұрылымдық материалдардың сәтті синтезделуін көрсетеді. Сондай-ақ зерттеуде бөлшектердің агрегациясының маңызды екендігі атап өтілді.

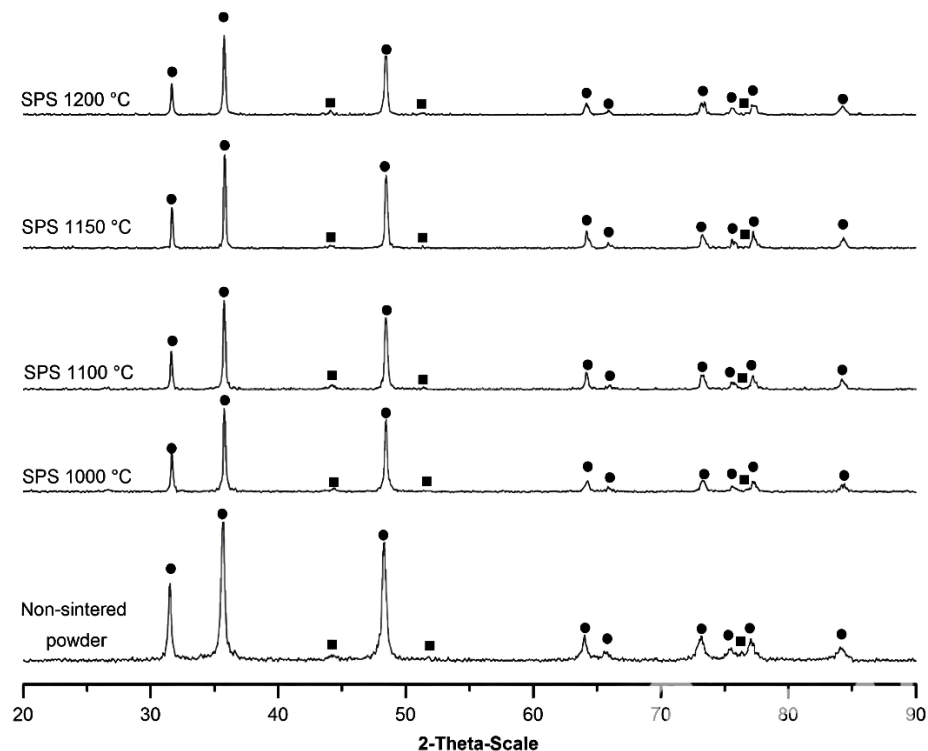
Вольфрам карбиді ұнтақтары (WC және W₂C) сонымен қатар МХС арқылы WCl₆ және Na₂CO₃-тен синтезделеді [26]. Айтекиннің бұл зерттеуі стехиометриялық немесе 50 масс.% артық магнийдің қосылуы WC және W₂C екеуінің түзілуіне әкелетінін көрсетті, ал артық Na₂CO₃ WCl₆ және WO₂Cl₂-ні бұзады, тек W₂C, WC және W фазаларын құрайды.

Шичалин және оның әріптестерінің [27] жұмыстарында жоғары температуралық механикалық-химиялық синтезді қолдану арқылы алынған вольфрам карбиді ұнтағынан SPS әдісімен WC-(8%)Ni-(8%)Fe синтезі зерттелді. XRD деректері бойынша W₂C шыңының қарқындылығы құрғақ қоспадағы ПММА концентрациясына кері пропорционалды (сурет 2).



Сурет 2. Құрғақ қоспадағы әртүрлі ПММА мөлшерімен алынған ұнтақтардың фазалық құрамы: ● – WC; ○ – W₂C [27]

Нәтижелер әр түрлі температурада (1000-1200°C) агломерацияланған барлық үлгілердің фазалық құрамының бірдей дерлік сақталатынын көрсетеді (сурет 3).



Сурет 3. Бастапқы WC-8Ni-8Fe ұнтағының және оның негізіндегі SPS қорытпаларының фазалық құрамы (● – WC; ■ – Ni/Fe) [27]

Ұсынылған тәсіл технологиялық енгізу үшін перспективалы болып табылады, өйткені SPS және механохимия әдістерінің жоғары тиімділігі, сондай-ақ қолжетімді прекурсорлар мен арзан байланыстырғыштарды (Ni және Fe) пайдалануға мүмкіндік береді. Алынған қорытпалар белгілі қатты қорытпаларға арзан балама бола алады [27].

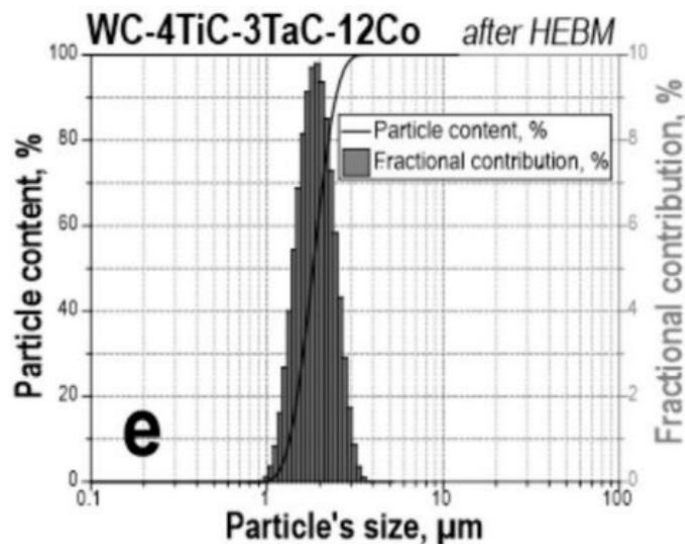
Ультрадыбыстық механоактивация

МА-ның дәстүрлі әдістерімен қатар ультрадыбыстық МА-ның үлкен әлеуеті бар, сондықтан ультрадыбыстың мүмкіндіктерін толық пайдалану үшін оның негізінде жатқан процестерді толығырақ талдау қажет. Бұл әдіс механикалық активациялау процесін қысқа мерзімде жүргізуге, ластанудың жағымсыз құбылыстарын жоюға, қажетті фракцияның жоғары үлесі бар ұсақ дисперсті және тіпті нанокристалды ұнтақтарды алуға мүмкіндік береді [28]. Қазіргі уақытта ультрадыбыстық өңдеу (UST) материалдардың микроқұрылымы мен механикалық қасиеттерін өзгертудің жоғары тиімді әдістерінің бірі [29-31].

Ультрадыбыстық өңдеудің оңтайлы режимі жоғары гидростатикалық қысым кезінде кавитация режимінде болатындығы Рубаниктің жұмысында [32] айтылған. Ван және оның әріптестерінің жұмысында [33] лазерлік қаптау әдісімен IN718, IN718-50% WC және IN718-50% WC (алдын ала ультрадыбыстық өңдеумен) композиттік жабындар алынды. WC бөлшектерінің ыдырауы композиттік жабындардың микроқаттылығын және тозуға төзімділігін айтарлықтай жақсартты. Ультрадыбыспен алынған композиттік жабынның мәндері келесі көрсеткіштерге ие болды: микроқаттылығы—478,15 $HV_{0,2}$; үйкеліс коэффициенті—0,494.

Дәстүрлі түрде МА-ланған WC негізделген ұнтақтардан SPS әдісімен алынған қорытпалар

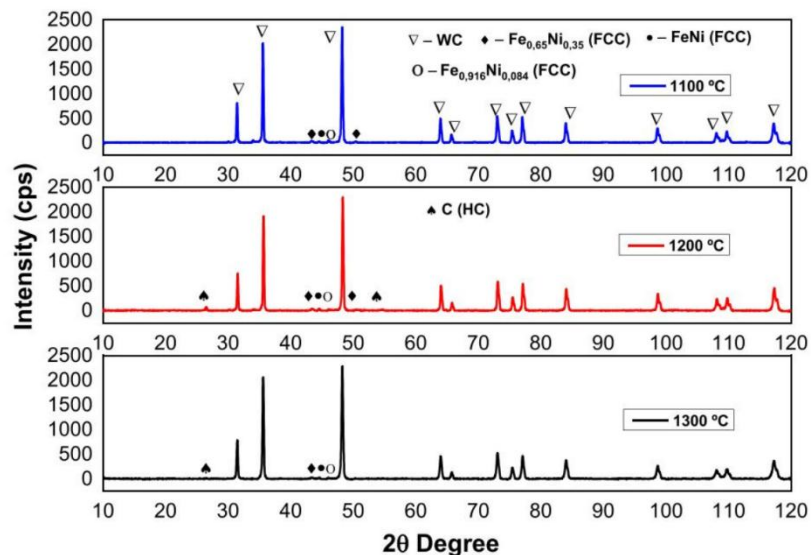
Планетарлық шар диірменінде механоактивациялау арқылы Буравлев т.б. жұмыстарды [34] WC—4% TiC—3% TaC—12% Co салмағы 50 г қоспасымен жүргізді. Іске қосу 10 цикл үшін 700 айн/мин айналу жылдамдығымен жүзеге асырылды, олардың әрқайсысы 15 минут ұнтақтаудан және 15 минут ұнтақтау шыныаяқын салқындатудан тұрады. Содан кейін SPS технологиясының көмегімен әртүрлі температураларда қорытпа алынды: 1000°C, 1100°C, 1150°C, 1200°C. МА нәтижесінде ұнтақ бөлшектердің орташа өлшемінің 2 мкм-ге дейін төмендеуімен кішірек өлшемдерге қарай бөлшектер өлшемдерінің таралуының айтарлықтай ығысуын көрсетті (сурет 4).



Сурет 4. Механикалық активацияланған WC-4%TiC-3%TaC-12%Co аралас композициясының гранулометриялық құрамының бөлшектерінің өлшемдерінің таралуы [34]

Буравлев және оның әріптестері планетарлық диірмендегі алдын ала МА агломераттарды ұнтақтауға және бөлшектердің өздеріне ықпал ететінін анықтады, бұл ұнтақты кейіннен SPS әдісімен кезінде тығыздау процесін күшейтті. Ең жақсы біртектілік пен тығыздық үшін оңтайлы агломерация температурасы да алынды: 1200°C. Зерттеу

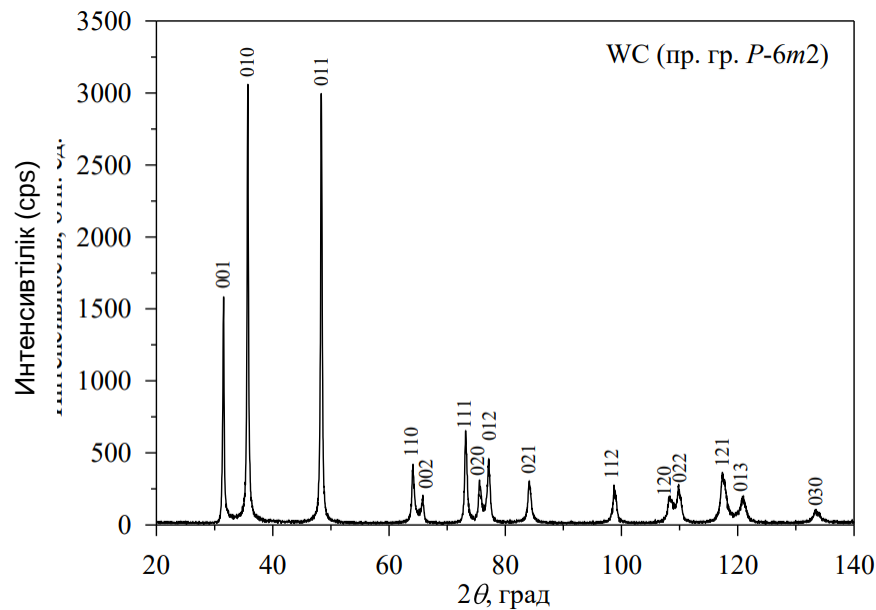
барысында келесі нәтижелер анықталды: салыстырмалы тығыздық– 99,99%; қаттылық, HV30 – 1623,2; иілу күші–1125,1 МПа [34]. Сильваның [35] жұмысында WC-FeNi қорытпасын WC-Co қорытпасына балама ретінде зерттеуге бағытталған, МА мен қатар SPS орындалды. МА кезінде шарлардың ұнтаққа массалық болды. Жұмыс авторлары алынған WC-FeNi қорытпасының талдауы көміртегі тапшылығы бар сынғыш η -фазалар түзілмей, оның микроқұрылымында WC дәндерінің жақсы таралуын көрсетті деп мәлімдейді. Алынған қорытпаның нәтижелері 1300°C температурада ең жақсы болды: қаттылық–1933 HV; тығыздығы – 99%; сыну беріктігі–11 МПа м^{0,5}. Рентгендік дифракция үлгісін талдау кезінде (сурет 5) Ni-мен тұрақтандырылған Fe-нің аустениттік фазалары байқалды .



Сурет 5. Синтезделген WC-6,4Fe3,6Ni рентгендік дифракциялық үлгілері [35]

Осыған ұқсас нәтижені Шуберт және оның әріптестері [36] Fe және Ni 7:3 қатынасымен растады. Чувилдеевтің [37] W-Ni-Fe және W-Ni-Fe-Co қорытпаларының механикалық қасиеттері мен құрылымына арналған жұмысында жоғары энергиялық МА, одан кейін SPS арқылы қорытпа алудың арқасында макросерпімділік 230 МПа-дан 635 МПа-ға дейін жоғарылауы анықталды. Нәтижесінде, жоғарыда аталған жұмыстарда алынған қорытпалардың біртектілігі, қаттылығы және тығыздығы басқа жұмыстарда бірдей агломерациялық температураларда алынғанға қарағанда жоғары болды, дәл осы алдын ала механикалық активациялауға байланысты, соның арқасында WC байланыстырғыш компоненті ұнтақталды.

Планетарлық шарлы диірменде ұнтақ қоспасының (W+C) механоактивациялануы арқасында бір фазалы WC (сурет 6) 1200°C температурада вакуумда келесі сипаттамалармен синтезделді: $C_{жалпы} = 6,16\%$ масс., $C_{бос}$ – анықталмады; $D_{орташа} = 0,3$ мкм, $D_{мин} = 0,2$ мкм, $D_{макс} = 0,7$ мкм. МА-сыз және бірдей синтез параметрлерімен ұқсас құрамдағы ұнтақ қоспасынан құрамында WC, W_2C және W фазалары анықталды [38].



Сурет 6. W және C (аморфты көміртек) механикалық активацияланған ұнтақ қоспасынан вакуумда 1200°C температурада синтезделген WC ұнтағының рентгендік дифракциялық үлгісі [38]

Қорытпалардың микроқұрылымына және механикалық қасиеттеріне МА уақытының әсері

МА уақыты вольфрам қорытпасының тығыздығы мен микроқұрылымына тікелей әсер етеді, ол Чувилдеевтің [39] зерттеуінде анықталды, мұнда WC негізіндегі ұнтақтың механикалық активтену уақыты 10 секундтан 300 секундқа дейін ұзарған сайын ұнтақтағы құрылымдық өзгерістер, оның құрамындағы заттың әсер етуші және морфологиялық құрамының жоғарылауы туралы қорытындыға келді. одан кейінгі агломерациялық процестерді жеңілдететін бөлшектер мөлшерінің төмендеуі. Осылайша, зерттеу көрсеткендей, механикалық активациялау WC негізіндегі ұнтақтың қасиеттеріне айтарлықтай әсер етеді, оның фазалық құрамының, бөлшектердің өлшемі мен дислокация тығыздығының өзгеруіне байланысты қатты қорытпаларды агломерациялауда қолдануды кеңейтеді.

МА уақытының қорытпалардың құрылымы мен механикалық қасиеттеріне әсері Абдулменова мен Кулковтың [40] жұмыстарында да атап өтілген. Бұл қатынастарды түсіну процестерін оңтайландыру үшін ерекше маңызды болып табылады. Абдулменова мен оның әріптестерінің зерттеуі [41] агломерацияланған бөлшектердің орташа мөлшері 300 секунд МА-дан кейін кейін 350 мкм-ден 15 мкм-ге дейін айтарлықтай төмендегенін көрсетті, сонымен қатар $\text{Co}_3\text{W}_3\text{C}$ карбид фазасының болуы анықталды, бұл қатты фазаның МА-ның барлық сипаттамаларын ұзақ мерзімді жақсартуға әкелуі мүмкін екенін көрсетеді. МА физикалық-механикалық қасиеттерді жақсартуға, әсіресе өңдеу 60-тан 100 секундқа дейін белгілі бір уақыт аралығында жүргізілген жағдайда, дәннің өсуін бәсеңдететіні белгілі болды. Ли және оның әріптестерінің зерттеуінде [42] МА механикалық фрезерлеу (МФ) арқылы жүзеге асырылды, WC-8Co-2Al цементтелген карбид қорытпасы SPS әдісімен сәтті шығарылды. МФ 55 сағат бойы жүргізілді, нәтижесінде дән мөлшері 340 нм-ден 27 нм-ге дейін төмендеді, бірақ ұзағырақ ұнтақтау кезінде агломерацияланған карбид қорытпаларының қасиеттері мен тығыздығының төмендеуі байқалды. 55 сағат жүргізілген МФ арқылы алынған компоненттің SPS-тен кейін 3000 А ең жоғары импульс кезінде қаттылығы мен беріктігі сәйкесінше 89 HRA және 1702 МПа дейін өсті.

Жоғарыда аталған зерттеулердің нәтижелерін қорытындылай келе, МА ең аз бөлшектері және аз агломерациялары бар WC компоненттерін алу процесінің ажырамас бөлігі болып табылады және МА уақыты мен материалдың құрылымы мен механикалық қасиеттері арасындағы байланысты түсіну SPS әдісімен қатты, берік және тығыз қорытпаларды алуға ықпал етеді деп қорытынды жасауға болады.

Қорытынды

Көпкомпонентті қорытпаларды алуда МА маңызды рөл атқарады және онсыз зерттеуде күтілетін және алынған нәтижелер арасындағы сәйкессіздік ықтималдылығы биік болып келеді. Бұл жұмыста вольфрам карбиді (WC) қорытпаларының механикалық қасиеттері мен микроқұрылымына МА әсерін жан-жақты талдау жүргізіледі. Зерттеу МА реактивтілік, құрылымның біртектілігі және тамаша механикалық қасиеттері бар наноқұрылымды қорытпаларды алу мүмкіндігі сияқты ұнтақ материалдардың сипаттамаларын жақсартудың негізгі қадамы екенін растады.

МА құрылымдық ақаулардың жинақталуына, бөлшектердің мөлшерін азайтуға және олардың химиялық белсенділігінің артуына ықпал етеді, бұл синтез процестерін жеделдетуге және соңғы материалдың сапасын жақсартуға мүмкіндік береді. МА-ның әртүрлі тәсілдері қарастырылды, соның ішінде механикохимиялық, ультрадыбыстық және механикотермиялық өңдеу. МА-ны термиялық өңдеумен бірге қолдану бөлшектердің өлшемі 200 нм-ден аз наноқұрылымды WC ұнтақтарын алуға мүмкіндік береді, бұл механикалық қасиеттері жақсартылған материалдарды құру перспективаларын ашады. Ультрадыбыстық МА жоғары сапалы қатты қорытпаларды өндіру үшін маңызды болып табылатын жұқа ұнтақтарды ластанусыз жеделдетілген өндіру мүмкіндігін көрсетеді. МА әдістерін қолдану арқылы алынған WC негізіндегі қорытпалар жоғары тығыздыққа, беріктікке және тозуға төзімділікке ие, бұл оларды кескіш құралдарда және басқа өнеркәсіптік салаларда қолдануға өте ыңғайлы етеді. Күрделі емес МА жоғары сапалы нәтижелерді алуға көмектеседі, әсіресе ұнтақ SPS әдісі арқылы қорытпа алуға арналған жағдайда.

Механохимиялық синтез наноқұрылымды материалдарды (300-500 нм) синтездеуге мүмкіндік береді, жоғары температуралық процестерді қолданбай химиялық реакцияларды жылдамдатады және фазалық құрамның біртектілігін қамтамасыз етеді (мысалы, $W_2C \rightarrow WC$ ауысуы). Дегенмен, процесс ұзақ өңдеу кезінде ұнтақтың ластану қаупін тудырады, бұл параметрлерді (уақыт, реагент қатынасы) өте дәл бақылауды талап етеді. МХС аспаптық болаттар үшін үштік карбидтерді ($CoWC$) синтездеу және агломерацияланған композиттерге арналған WC наноұнтақтарын өндіруде қолданылады.

Ультрадыбыстық МА өңдеу уақытын 5-10 есе қысқартады, сұйық ортада өңдеу арқылы ұнтақтың ластануын жояды және кристал құрылымын өзгертпестен агломераттардың мөлшерін азайтады. Мұндай өңдеудің кемшіліктері жоғары пластикалық материалдар үшін шектеулі тиімділікті қамтиды. Ол ұнтақ металлургиясы үшін жұқа Al/W ұнтақтарын дайындау және каталитикалық жүйелер үшін оксид ұнтақтарын (Co_3O_4) модификациялау үшін жарамды.

Механотермиялық өңдеу WC синтезінің температурасын 200–300°C төмендетуі мүмкін, сонымен қатар қоспалар (KCl , Ni) арқылы бөлшектердің морфологиясын бақылауға мүмкіндік береді. Ол екі сатылы процесс жағдайында жоғары энергия шығынына және WC синтезі кезінде бос көміртектің пайда болу қаупіне ие. Ол инертті атмосферада түйір өлшемдері 200 нм-ден аз бір фазалы WC синтезіне және жақсартылған жылу өткізгіштігі бар $W-Cu$ композиттерін өндіруге қолданылады.

Дәстүрлі механикалық белсендіру жоғары энергия тиімділігіне ие және сонымен қатар бөлшектердің орташа өлшемін 4 мкм-ден 100–400 нм-ге дейін азайтуға қабілетті. Бірақ шамадан тыс ұнтақтау қасиеттердің нашарлауына алып келеді және ұзақ белсендіру кезінде артық фазалардың пайда болуына алып келуі мүмкін. Дәстүрлі МА аэроғарыш өнеркәсібіне

арналған WC негізіндегі композитті кескіш құралдар мен тозуға төзімді жабындарды өндіруге қолданылады, сонымен қатар кейінгі SPS әдісі арқылы қорытпаларды өндіру үшін тиімділігі жоғары.

Осылайша, мақаланың нәтижелері механикалық активациялау параметрлерінің маңыздылығын растайды, олардың арасында жоғары сапалы материалдарды алу үшін WC ұнтақтарын алдын ала өңдеу әдісі ретінде оны жүзеге асыру уақыты маңызды рөл атқарады. Іске қосу механизмдерін одан әрі зерттеу және процесс параметрлерін оңтайландыру бірегей қасиеттері бар қатты қорытпалардың жаңа буындарын әзірлеуге мүмкіндік береді.

Алғыс

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қаржыландырады. (*грант № BR24992925*).

Список использованной литературы

1. Курлов, А. С., & Гусев, А. И. (2013). *Физика и химия карбидов вольфрама: монография*. Москва: Физматлит.
2. Лякишев, Н. П. (2000). *Энциклопедический словарь по металлургии: в 2 т. Т. 1*. Москва: Интернет Инжиниринг.
3. Малик, А. А., Закусилов, В. В., & Рыжков, А. А. (2014). Исследование влияния частоты механоактивации компонентов шихты на процесс получения пористых материалов самораспространяющимся высокотемпературным синтезом. В *Энергетика: эффективность, надежность, безопасность: материалы XX Всероссийской научно-технической конференции* (Т. 2, с. 176–179). Томск: Изд-во ТПУ.
4. Дмитренко, Д. В., Бледнова, Ж. М., & Балаев, Э. Ю. О. (2017). Эволюция структуры многофазных порошковых материалов с ЭПФ на различных этапах процесса механоактивации. *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета*, (132), 1216–1229.
5. Анциферов, В. Н., Пещеренко, С. Н., & Ярмонов, А. Н. (2000). Неравновесная растворимость при механическом легировании. *Физика и химия обработки материалов*, (12), 13–18.
6. Сметкин, А. А., Кузнецов, А. В., & Петров, И. И. (2004). Влияние высокоэнергетической механоактивации порошковых смесей на формирование структуры и свойств материалов на основе титана. *Порошковая металлургия*, (27), 61–64.
7. Каченюк, М. Н., & Сметкин, А. А. (2014). Эволюция структуры композиционных частиц при механоактивации порошковых смесей на основе титана, карбида кремния и углерода. *Современные проблемы науки и образования*, (6), 111.
8. Kieback, B., Kubsch, H., & Bunke, A. (1993). Synthesis and properties of nanocrystalline compounds prepared by high-energy milling. *J. Phys. IV*, 3, 1425–1428.9. Болдырев, В. В. (2006). Механохимия и механическая активация твердых веществ. *Успехи химии*, 75(3), 203–216. <https://doi.org/10.1070/RC2006v075n03ABEH001205>
9. Болдырев, В. В. (2006). Механохимия и механическая активация твердых веществ. *Успехи химии*, 75(3), 203–216. <https://doi.org/10.1070/RC2006v075n03ABEH001205>
10. Болдырев, В. В. (1983). *Экспериментальные методы в механохимии твердых неорганических веществ*. Москва: Мир.
11. Косолапова, Т. Я. (1968). *Карбиды*. Москва: Металлургия.
12. Логинов, Ю. Н. (1984). *Технология получения заготовок из твердого сплава: учебное пособие*. Свердловск: УПИ им. С. М. Кирова.
13. Третьяков, В. И. (1976). *Основы металловедения и технологии производства спеченных твердых сплавов*.
14. Rakhimova, A. K., & Galeleyeva, A. K. (2019). Методы синтеза литий железа фосфата: микроволновой синтез – перспективный метод для синтеза LiFePO₄. *Chemical Journal of Kazakhstan*, 1(1), 1–10.
15. Morgan, D., Van der Ven, A., & Ceder, G. (2004). Li conductivity in Li_xMPO₄ (M = Mn, Fe, Co, Ni) olivine materials. *Electrochemical and Solid-State Letters*, 7, 30–32.
16. Franger, S., Bourbon, C., & Le Cras, F. (2004). Optimized lithium iron phosphate for high-rate electrochemical applications. *Journal of The Electrochemical Society*, 151, 1024.

17. Bazhenov, S. V., & Kurlov, A. S. (2022). Effect of mechanical activation and solid-state synthesis temperature on the composition and grain size of tungsten carbide. *AIP Conference Proceedings*, 2466(1).
18. Tsuchida, T., & Morita, N. (2002). Formation of ternary carbide $\text{Co}_6\text{W}_6\text{C}$ by mechanical activation assisted solid-state reaction. *Journal of the European Ceramic Society*, 22(13), 2401–2407.
19. Kariminejad, A., et al. (2014). Mechanically activated synthesis of tungsten carbide nanoparticles from tungsten oxide. *Advanced Materials Research*, 829, 622–626.
20. de Oro Calderon, R., et al. (2013). Synthesis of nanostructured tungsten carbide powders from mechanically activated mixes of tungsten oxide with different carbon sources. In *International Powder Metallurgy Congress and Exhibition, Euro PM 2013* (Vol. 1, pp. 89–94). Gothenburg, Sweden.
21. Oro, R., et al. (2017). Optimizing the synthesis of ultrafine tungsten carbide powders by effective combinations of carbon sources and atmospheres. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 63, 9–16.
22. Савостин, А. В., & Шурай, П. Е. (2009). Механохимическая активация в технологии сахарного производства. *Известия высших учебных заведений. Пищевая технология*, (1), 59–61.
23. Онищенко, Д. В., & Рева, В. П. (2011). Получение нанопорошка карбида вольфрама методом механической активации. *Физика и химия обработки материалов*, (2), 71–77.
24. Ягофаров, В. Ю. (2019). Механохимический синтез карбида вольфрама с использованием углерода различного происхождения. *Металлофизика легких сплавов*, (186).
25. Yang, R., Wang, Y., Zhang, Y., et al. (2011). Molten salt synthesis of tungsten carbide powder using a mechanically activated powder. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 29(1), 138–140.
26. Aytekin, N. Ö., Ağaoğulları, D., & Öveçoğlu, M. L. (2019). Mechanochemical synthesis of tungsten carbide powders induced by magnesiothermic reduction of WCl_6 and Na_2CO_3 raw materials. *Materials Research Express*, 6(9), 096517.
27. Shichalin, O. O., Kolesnikov, A. A., Kolesnikova, E. A., et al. (2020). SPS hard metal alloy WC-8Ni-8Fe fabrication based on mechanochemical synthetic tungsten carbide powder. *Journal of Alloys and Compounds*, 816, 152547.
28. Клубович, В. В., Костюк, В. А., & Левицкий, А. В. (2012). Ультразвуковая механоактивация порошков, используемых для синтеза электрокерамических материалов. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук*, (2), 11–16.
29. Агранат, Б. А., Кузнецов, А. Ю., & Лебедев, В. А. (1986). *Ультразвук в порошковой металлургии*. Москва: Наука.
30. Артемьев, В. В., Клубович, В. В., & Рубаник, В. В. (2003). *Ультразвук и обработка материалов*. Минск: Экоперспектива.
31. Назарова, А., Мулюков, Р., Рубаник, В., и др. (2010). Влияние ультразвуковых колебаний на структуру и свойства ультрамелкозернистого никеля. *Физика металлов и металловедение*, 110(6), 600–607.
32. Рубаник, В. В., Костюк, В. В., & Костюк, А. В. (2016). *Ультразвуковая механоактивация порошков*.
33. Wang, J., et al. (2023). Ultrasonic-induced grain refinement in laser cladding nickel-based superalloy reinforced by WC particles. *Coatings*, 13(1), 151.
34. Buravlev, I. Y., et al. (2024). Microstructural evolution and mechanical behavior of WC-4wt.% TiC-3wt.% TaC-12wt.% Co refractory cermet consolidated by spark plasma sintering of mechanically activated powder mixtures. *Advanced Powder Technology*, 35(10), 104625.
35. da Silva, E. N., et al. (2021). Investigation of characteristics and properties of spark plasma sintered ultrafine WC-6.4 Fe-3.6Ni alloy as potential alternative WC-Co hard metals. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 101, 105669.
36. Schubert, W. D., Weiss, H. J., et al. (2015). Aspects of sintering of cemented carbides with Fe-based binders. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 49, 110–123.
37. Chuvil'deev, V. N., et al. (2014). Sintering of nano- and ultradispersed mechanically activated W-Ni-Fe powders and the manufacture of ultrahigh-strength heavy tungsten alloys. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2014, 215–228.
38. Баженов, С. В., & Курлов, А. С. (2020). Твердофазный синтез карбида вольфрама в вакууме из механоактивированной смеси вольфрама и углерода. В *Современные синтетические методологии для создания лекарственных препаратов и функциональных материалов (MOSM 2020)* (с. 104). Екатеринбург.
39. Chuvil'deev, V. N., et al. (2023). Effect of mechanical activation time on the density of fine-grained tungsten alloy 90W-7Ni-3Fe, obtained by spark plasma sintering. *Физика металлов и металловедение*, 124(10), 931–938.
40. Abdulmenova, E. V., & Kulkov, S. N. (2020). The studies of the effect of mechanical activation of WC-based powder on its properties. *AIP Conference Proceedings*, 2310(1).

41. Abdulmenova, E. V., Rumyantsev, M. V., & Kulkov, S. N. (2022). Effect of mechanical treatment of powder on the structure and phase composition of hard alloys. *AIP Conference Proceedings*, 2509(1).
42. Li, X., et al. (2010). WC–8Co–2Al (wt%) cemented carbides prepared by mechanical milling and spark plasma sintering. *Materials Science Forum*, 638, 1817–1823.

References

1. Kurlov, A. S., & Gusev, A. I. (2013). *Fizika i khimiya karbidov vol'frama: monografiya*. Moskva: Fizmatlit.
2. Lyakishev, N. P. (2000). *Entsiklopedicheskiy slovar' po metallurgii: v 2 t. T. 1*. Moskva: Internet Inzhiniring.
3. Malik, A. A., Zakusilov, V. V., & Ryzhkov, A. A. (2014). Issledovanie vliyaniya chastoty mekhanoktivatsii komponentov shikhty na protsess polucheniya poristyykh materialov samoraspranyayushchimsya vysokotemperaturnym sintezom. V *Energetika: effektivnost', nadezhnost', bezopasnost': materialy XX Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* (T. 2, s. 176–179). Tomsk: Izd-vo TPU.
4. Dmitrenko, D. V., Blednova, Zh. M., & Balaev, E. Yu. O. (2017). Evolyutsiya struktury mnogofaznykh poroshkovykh materialov s ÉPF na razlichnykh etapakh protsessa mekhanoktivatsii. *Politematicheskii setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*, (132), 1216–1229.
5. Antsiferov, V. N., Peshcherenko, S. N., & Yarmonov, A. N. (2000). Neravnovesnaya rastvorimost' pri mekhanicheskom legirovanii. *Fizika i khimiya obrabotki materialov*, (12), 13–18.
6. Smetkin, A. A., Kuznetsov, A. V., & Petrov, I. I. (2004). Vliyanie vysokoyenergeticheskoy mekhanoktivatsii poroshkovykh smesey na formirovanie struktury i svoystv materialov na osnove titana. *Poroshkovaya metallurgiya*, (27), 61–64.
7. Kachenyuk, M. N., & Smetkin, A. A. (2014). Evolyutsiya struktury kompozitsionnykh chastits pri mekhanoktivatsii poroshkovykh smesey na osnove titana, karbida kremniya i ugleroda. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, (6), 111.
8. Kieback, B., Kubsch, H., & Bunke, A. (1993). Synthesis and properties of nanocrystalline compounds prepared by high-energy milling. *J. Phys. IV*, 3, 1425–1428.
9. Boldyrev, V. V. (2006). Mekhanokhimiya i mekhanicheskaya aktivatsiya tverdykh veshchestv. *Uspekhi khimii*, 75(3), 203–216. <https://doi.org/10.1070/RC2006v075n03ABEH001205>
10. Boldyrev, V. V. (1983). *Eksperimental'nye metody v mekhanokhimi tverdykh neorganicheskikh veshchestv*. Moskva: Mir.
11. Kosolapova, T. Ya. (1968). *Karbidy*. Moskva: Metallurgiya.
12. Loginov, Yu. N. (1984). *Tekhnologiya polucheniya zagotovok iz tverdogo splava: uchebnoe posobie*. Sverdlovsk: UPI im. S. M. Kirova.
13. Tretyakov, V. I. (1976). *Osnovy metallovedeniya i tekhnologii proizvodstva spechennykh tverdykh splavov*.
14. Rakhimova, A. K., & Galeleyva, A. K. (2019). Metody sinteza litii zheleza fosfata: mikrovolnovoy sintez – perspektivnyy metod dlya sinteza LiFePO₄. *Chemical Journal of Kazakhstan*, 1(1), 1–10.
15. Morgan, D., Van der Ven, A., & Ceder, G. (2004). Li conductivity in Li_xMPO₄ (M = Mn, Fe, Co, Ni) olivine materials. *Electrochemical and Solid-State Letters*, 7, 30–32.
16. Franger, S., Bourbon, C., & Le Cras, F. (2004). Optimized lithium iron phosphate for high-rate electrochemical applications. *Journal of The Electrochemical Society*, 151, 1024.
17. Bazhenov, S. V., & Kurlov, A. S. (2022). Effect of mechanical activation and solid-state synthesis temperature on the composition and grain size of tungsten carbide. *AIP Conference Proceedings*, 2466(1).
18. Tsuchida, T., & Morita, N. (2002). Formation of ternary carbide Co₆W₆C by mechanical activation assisted solid-state reaction. *Journal of the European Ceramic Society*, 22(13), 2401–2407.
19. Kariminejad, A., et al. (2014). Mechanically activated synthesis of tungsten carbide nanoparticles from tungsten oxide. *Advanced Materials Research*, 829, 622–626.
20. de Oro Calderon, R., et al. (2013). Synthesis of nanostructured tungsten carbide powders from mechanically activated mixes of tungsten oxide with different carbon sources. In *International Powder Metallurgy Congress and Exhibition, Euro PM 2013. Vol. 1*, 89–94. Gothenburg, Sweden.
21. Oro, R., et al. (2017). Optimizing the synthesis of ultrafine tungsten carbide powders by effective combinations of carbon sources and atmospheres. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 63, 9–16.
22. Savostin, A. V., & Shuray, P. E. (2009). Mekhanokhimicheskaya aktivatsiya v tekhnologii sakharogo proizvodstva. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Pishchevaya tekhnologiya*, (1), 59–61.
23. Onishchenko, D. V., & Reva, V. P. (2011). Poluchenie nanoporoshka karbida vol'frama metodom mekhanicheskoy aktivatsii. *Fizika i khimiya obrabotki materialov*, (2), 71–77.

24. Yagofarov, V. Yu. (2019). Mekhanokhimicheskiy sintez karbida vol'frama s ispol'zovaniem ugleroda razlichnogo proiskhozhdeniya. *Metallofizika legkikh splavov*, (186).
25. Yang, R., Wang, Y., Zhang, Y., et al. (2011). Molten salt synthesis of tungsten carbide powder using a mechanically activated powder. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 29(1), 138–140.
26. Aytekin, N. Ö., Ağaoğulları, D., & Öveçoğlu, M. L. (2019). Mechanochemical synthesis of tungsten carbide powders induced by magnesiothermic reduction of WCl_6 and Na_2CO_3 raw materials. *Materials Research Express*, 6(9), 096517.
27. Shichalin, O. O., Kolesnikov, A. A., Kolesnikova, E. A., et al. (2020). SPS hard metal alloy WC-8Ni-8Fe fabrication based on mechanochemical synthetic tungsten carbide powder. *Journal of Alloys and Compounds*, 816, 152547.
28. Klubovich, V. V., Kostyuk, V. A., & Levitskiy, A. V. (2012). Ul'trazvukovaya mekhanoktivatsiya poroshkov, ispol'zuyemykh dlya sinteza elektrokeramicheskikh materialov. *Izvestiya Natsional'noy akademii nauk Belarusi. Seriya fiziko-tekhnicheskikh nauk*, (2), 11–16.
29. Agranat, B. A., Kuznetsov, A. Yu., & Lebedev, V. A. (1986). *Ul'trazvuk v poroshkovoy metallurgii*. Moskva: Nauka.
30. Artem'yev, V. V., Klubovich, V. V., & Rubanik, V. V. (2003). *Ul'trazvuk i obrabotka materialov*. Minsk: Ekoperspektiva.
31. Nazarova, A., Mulyukov, R., Rubanik, V., i dr. (2010). Vliyaniye ul'trazvukovykh kolebaniy na strukturu i svoystva ultramelkozernistogo nikelya. *Fizika metallov i metallovedenie*, 110(6), 600–607.
32. Rubanik, V. V., Kostyuk, V. V., & Kostyuk, A. V. (2016). *Ul'trazvukovaya mekhanoktivatsiya poroshkov*.
33. Wang, J., et al. (2023). Ultrasonic-induced grain refinement in laser cladding nickel-based superalloy reinforced by WC particles. *Coatings*, 13(1), 151.
34. Buravlev, I. Y., et al. (2024). Microstructural evolution and mechanical behavior of WC–4wt.% TiC–3wt.% TaC–12wt.% Co refractory cermet consolidated by spark plasma sintering of mechanically activated powder mixtures. *Advanced Powder Technology*, 35(10), 104625.
35. da Silva, E. N., et al. (2021). Investigation of characteristics and properties of spark plasma sintered ultrafine WC–6.4 Fe–3.6Ni alloy as potential alternative WC–Co hard metals. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 101, 105669.
36. Schubert, W. D., Weiss, H. J., et al. (2015). Aspects of sintering of cemented carbides with Fe-based binders. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 49, 110–123.
37. Chuvil'deev, V. N., et al. (2014). Sintering of nano- and ultradispersed mechanically activated W–Ni–Fe powders and the manufacture of ultrahigh-strength heavy tungsten alloys. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2014, 215–228.
38. Bazhenov, S. V., & Kurlov, A. S. (2020). Tverdogaznyy sintez karbida vol'frama v vakuume iz mekhanoktirovannoy smesi vol'frama i ugleroda. V *Sovremennye sinteticheskie metodologii dlya sozdaniya lekarstvennykh preparatov i funktsional'nykh materialov (MOSM 2020)*, 104. Yekaterinburg.
39. Chuvil'deev, V. N., et al. (2023). Effect of mechanical activation time on the density of fine-grained tungsten alloy 90W–7Ni–3Fe, obtained by spark plasma sintering. *Fizika metallov i metallovedenie*, 124(10), 931–938.
40. Abdulmenova, E. V., & Kulkov, S. N. (2020). The studies of the effect of mechanical activation of WC-based powder on its properties. *AIP Conference Proceedings*, 2310(1).
41. Abdulmenova, E. V., Rummyantsev, M. V., & Kulkov, S. N. (2022). Effect of mechanical treatment of powder on the structure and phase composition of hard alloys. *AIP Conference Proceedings*, 2509(1).
42. Li, X., et al. (2010). WC–8Co–2Al (wt%) cemented carbides prepared by mechanical milling and spark plasma sintering. *Materials Science Forum*, 638, 1817–1823.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Курбанбеков Ш.Р. – PhD, профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: sherzod.kurbanbekov@ayu.edu.kz
	Kurbanbekov Sh.R. –PhD, associate professor, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: sherzod.kurbanbekov@ayu.edu.kz
	Курбанбеков Ш.Р. – PhD, ассоциированный профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: sherzod.kurbanbekov@ayu.edu.kz
2	Эртаев Н.С. – магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан

	к., Қазақстан, e-mail: nursultan.ertayev@ayu.edu.kz
	Ertayev N.S. – master student, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: nursultan.ertayev@ayu.edu.kz
	Эртаев Н.С. – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: nursultan.ertayev@ayu.edu.kz
3	Айдарова М.Т. – докторант, Дәулет Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан, e-mail: maidarova@ektu.kz
	Aydarova M.T. – PhD student, East Kazakhstan Technical University named after Daulet Serikbaev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan; e-mail: maidarova@ektu.kz
	Айдарова М.Т. – докторант, Восточно-Казахстанский технический университет имени Даулета Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан; e-mail: maidarova@ektu.kz
4	Қожахметов Е.А. — PhD, доктор, Дәулет Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университетінің VERITAS артықшылық орталығының жетекшісі, Өскемен қ., Қазақстан, e-mail: ykozhakhmetov@edu.ektu.kz
	Kozhakhmetov E.A. – PhD, East Kazakhstan Technical University named after Daulet Serikbaev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan; e-mail: ykozhakhmetov@ektu.kz
	Қожахметов Е.А. – PhD, Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан; e-mail: ykozhakhmetov@ektu.kz
5	Амангельдиева Ю.О. - магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: yulduz.amangeldiyeva@ayu.edu.kz
	Amangeldieva Y.O. – master's student, International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmet Yassawi, Turkestan, Kazakhstan; e-mail: yulduz.amangeldiyeva@ayu.edu.kz
	Амангельдиева Ю.О. – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмета Ясави, г. Туркестан, Казахстан; e-mail: yulduz.amangeldiyeva@ayu.edu.kz

ИНФОРМАТИКА

UDK 004.8

GTBKT 83.00.00

<https://doi.org/10.47526/2025-2/2524-0080.28>

Kazbekova G.N.¹, Ongar A.Zh.²

¹Teknik Bilimler Doktoru, Hoca Ahmet Yesevi Türk-Kazak Üniversitesi,
(Kazakistan, Türkistan), e-mail: gulnur.kazbekova@ayu.edu.kz

²yüksek lisans öğrencisi, Hoca Ahmet Yesevi Türk-Kazak Üniversitesi,
(Kazakistan, Türkistan), e-mail: ongaradilet382@gmail.com

SOBEL VE CANNY FİLTRELERİ NİN KARŞILAŞTIRILMASI VE UYGULANMASI COMPARISON AND APPLICATION OF SOBEL AND CANNY FILTERS SOBEL ЖӘНЕ CANNY СҮЗГІЛЕРІН САЛЫСТЫРУ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ СРАВНЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ФИЛЬТРОВ SOBEL И CANNY

Özet. Sobel operatörü kenar tespitinde kullanılan bir gradyan yöntemidir. Görüntüdeki yoğunluk (gradyan) değişimini belirler ve ayrıca görüntünün yatay (x) ve dikey (y) yönlerindeki değişiklikleri de hesaplar. Ve Canny kenar tespiti, kenarları bulmanın gelişmiş bir yoludur. Her iki yöntem de kenarları tespit etmek için kullanılır, ancak her birinin avantajları ve dezavantajları vardır. Birkaç adımı takip eder ve minimum hatayla kararlı kenarları tespit etmeyi amaçlar. Bu çalışma, Sobel ve Canny kenar tespit algoritmalarının farklı görüntü veri setleri üzerindeki performansını karşılaştırmayı amaçlamaktadır. Sobel algoritması işlem süresi açısından daha hızlı sonuçlar vermesine rağmen Canny algoritması doğruluk ve gürültü toleransı açısından üstün performans gösterdi. Doğal, tıbbi ve endüstriyel görüntüler üzerinde yapılan testlerde Canny algoritması, Sobel'e kıyasla daha yüksek doğruluk ve gürültü toleransı sağladı. İşlem süresi açısından Sobel algoritması daha hızlı sonuç verir. Araştırma sonuçları, yüksek doğruluk ve gürültü toleransı gerektiren uygulamalarda Canny algoritmasının, hızlı işlem süresinin önemli olduğu durumlarda ise Sobel algoritmasının tercih edilmesi gerektiğini göstermektedir. Bu sonuçlar, çeşitli uygulama senaryolarında uygun bir kenar algılama algoritmasının seçilmesine yardımcı olacak önemli bilgiler sağlar.

Anahtar kelimeler: kenar Algılama, Sobel Algoritması, Canny Algoritması, Görüntü İşleme, İşlem Süresi, Gürültü Dayanıklılığı, Performans Karşılaştırması.

Abstract. The Sobel operator is a gradient method used in edge detection. It determines the change in intensity (gradient) in the image, and also calculates changes in the horizontal (x) and vertical (y) directions of the image. And Canny edge detection is an advanced way of finding edges. Both methods are used to detect edges, but each has advantages and disadvantages. It follows several steps and aims to detect stable edges with minimal errors. This study aims to compare the performance of Sobel and Canny edge detection algorithms on different image datasets. Although the Sobel algorithm gave faster results in terms of processing time, the Canny algorithm showed superior performance in terms of accuracy and noise tolerance. In tests on natural, medical, and industrial images, the Canny algorithm provided higher accuracy and noise tolerance compared to Sobel. In terms of processing time, the Sobel algorithm gives faster results. The research results show that the Canny algorithm should be preferred in applications that require high accuracy and noise tolerance, and the Sobel algorithm in cases where fast processing time is important. These results provide key information to help select an appropriate edge detection algorithm in various application scenarios.

Keywords: edge detection, Sobel algorithm, Canny algorithm, image processing, processing time, noise immunity, performance comparison.

Аңдатпа. Sobel операторы—жиектерді анықтауда қолданылатын градиент әдісі. Ол кескіндегі қарқындылықтың өзгерісін (градиентті) анықтайды, сонымен қатар кескіннің көлденең (x) және тік (y) бағытындағы өзгерістерін есептейді. Ал, Canny жиегін анықтау—жиектерді табудың дамыған әдісі. Екі әдіс те жиектерді анықтауға арналған, бірақ әрбірінің артықшылықтары мен кемшіліктері бар. Ол бірнеше қадамды орындайды және аз қателіктермен тұрақты жиектерді анықтауға бағытталған. Бұл зерттеу әртүрлі кескін деректер жиынындағы Sobel және Canny жиегін анықтау алгоритмдерінің өнімділігін салыстыруға бағытталған. Sobel алгоритмі өңдеу уақыты бойынша жылдамырақ нәтиже бергенімен, Canny алгоритмі дәлдік пен шуға төзімділік тұрғысынан жоғары өнімділікті көрсетті. Табиғи, медициналық және өндірістік кескіндер бойынша сынақтарда Canny алгоритмі Sobel-пен салыстырғанда жоғары дәлдік пен шуға төзімділікті қамтамасыз етті. Өңдеу уақыты бойынша Sobel алгоритмі жылдамырақ нәтиже береді. Зерттеу нәтижелері жоғары дәлдік пен шуға төзімділікті қажет ететін қолданбаларда Canny алгоритміне, ал жылдам өңдеу уақыты маңызды болған жағдайда Sobel алгоритміне артықшылық беру керек екенін

көрсетеді. Бұл нәтижелер әртүрлі қолданба сценарийлерінде сәйкес жиекті анықтау алгоритмін таңдауға көмектесетін негізгі ақпаратты береді.

Негізгі сөздер: Жиекті анықтау, Sobel алгоритмі, Canny алгоритмі, кескінді өңдеу, өңдеу уақыты, шудың беріктігі, өнімділікті салыстыру.

Аннотация. Оператор Собеля—это градиентный метод, используемый для обнаружения краев. Он определяет изменение интенсивности (градиента) изображения, а также рассчитывает изменения в горизонтальном (x) и вертикальном (y) направлениях изображения. Обнаружение краев Canny—это продвинутый способ поиска краев. Оба метода используются для обнаружения краев, но каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Он состоит из нескольких шагов и направлен на обнаружение стабильных краев с минимальными ошибками. Целью данного исследования является сравнение производительности алгоритмов обнаружения границ Собеля и Кэнни на различных наборах данных изображений. Хотя алгоритм Собеля дал более быстрые результаты с точки зрения времени обработки, алгоритм Кэнни показал превосходную производительность с точки зрения точности и устойчивости к шуму. В тестах на естественных, медицинских и промышленных изображениях алгоритм Кэнни обеспечил более высокую точность и устойчивость к шуму по сравнению с алгоритмом Собеля. С точки зрения времени обработки алгоритм Собеля дает более быстрые результаты. Результаты исследования показывают, что алгоритму Кэнни следует отдавать предпочтение в приложениях, требующих высокой точности и устойчивости к помехам, а алгоритму Собеля—в тех случаях, когда важно быстрое время обработки. Эти результаты предоставляют ключевую информацию, которая поможет выбрать подходящий алгоритм обнаружения границ в различных сценариях применения.

Ключевые слова: обнаружение краев, алгоритм Собеля, алгоритм Кэнни, обработка изображений, время обработки, помехоустойчивость, сравнение производительности.

Giriş

Görüntü işleme, son yıllarda teknolojik gelişmelerle birlikte büyük bir önem kazanmış, bilgisayarla görme ve yapay zeka gibi alanlarda geniş bir uygulama yelpazesi bulmuştur. Bu kapsamda, kenar algılama teknikleri, görüntü içerisindeki nesnelerin sınırlarının tespit edilmesi, segmentasyon, nesne tanıma ve takibi gibi temel görevlerde kritik bir rol oynamaktadır [1]. Kenar algılama, bir görüntünün önemli yapısal özelliklerini temsil eden ve bu özellikleri vurgulayarak karmaşıklığını azaltan bir işlemdir. Bu bağlamda, Sobel ve Canny kenar algılama filtreleri, literatürde en çok kullanılan ve incelenen yöntemlerden ikisidir[2].

Sobel filtresi, 1968 yılında Sobel ve Feldman tarafından geliştirilen, basit ve hızlı bir kenar algılama tekniğidir. Sobel filtresi, bir görüntüdeki parlaklık değişimlerini vurgulayarak kenarları ortaya çıkarmayı amaçlar. Bu yöntem, özellikle gürültüye karşı duyarlılığı ve hesaplama kolaylığı nedeniyle tercih edilmektedir [3]. Ancak, Sobel filtresi yüksek gürültü seviyelerine sahip görüntülerde performans kaybı yaşayabilir ve kenarların net bir şekilde tespit edilmesinde sınırlı kalabilir.

Öte yandan, Canny kenar algılama filtresi, 1986 yılında John F. Canny tarafından geliştirilen ve optimal kenar algılama için tasarlanmış bir algoritmadır [4]. Canny filtresi, kenar algılama sürecinde üç temel aşamayı içerir: gürültü azaltma, gradyan hesaplama ve kenar inceltme. Canny algoritması, görüntüdeki gerçek kenarları belirleyebilmek için birden fazla eşik değeri kullanarak sahte kenarların tespit edilmesini önler ve böylece daha doğru sonuçlar üretir [5]. Ancak, Canny filtresinin karmaşıklığı ve işlem süresi, Sobel filtresine göre daha yüksektir.

Bu çalışmada, Sobel ve Canny kenar algılama filtrelerinin performanslarının karşılaştırılması amaçlanmaktadır [6]. Araştırmamızın temel motivasyonu, farklı uygulama senaryolarında hangi filtrenin daha uygun olduğunun belirlenmesidir [7]. Bu doğrultuda, Sobel ve Canny filtrelerinin çeşitli görüntü türlerine uygulanması, kenar algılama doğruluğu, işlem süresi ve gürültüye dayanıklılık gibi kriterler açısından değerlendirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki mevcut çalışmalara katkı sağlamanın yanı sıra, uygulama geliştiricilerine ve araştırmacılara, kenar algılama yöntemleri seçiminde rehberlik edecek önemli bilgiler sunacaktır.

Kenar algılama, görüntü işleme alanında kritik bir adım olup, farklı filtrelerin performansları üzerine yapılan araştırmalar, algoritmaların avantaj ve dezavantajlarını ortaya koymaktadır. Sobel ve Canny kenar algılama filtreleri, literatürde sıklıkla karşılaştırılan iki yöntemdir. Bu bölümde, bu

yöntemler arasındaki farkları inceleyen ve performanslarını değerlendiren çalışmalar gözden geçirilecektir

Sekehravani, Babulak ve Masoodi (2020) [8] çalışmasında, Canny algoritmasının gürültülü görüntüler üzerindeki performansını araştırmış ve bu algoritmanın, özellikle yüksek gürültü seviyelerinde Sobel filtresine göre daha başarılı sonuçlar ürettiğini göstermiştir. Yazarlar, Canny algoritmasının gürültü azaltma aşaması ve çift eşikleme tekniği sayesinde, görüntü kalitesini koruyarak doğru kenar algılama sonuçları elde ettiğini belirtmiştir. Ayrıca, çalışma, Sobel algoritmasının düşük hesaplama maliyeti ile daha hızlı bir performans sergilemesine rağmen, gürültüye karşı duyarlılığı nedeniyle özellikle gürültülü ortamlarda tercih edilmemesi gerektiğini vurgulamaktadır.

Lynn, Sourav ve Santoso (2021) [9] tarafından gerçekleştirilen çalışmada, Sobel ve Canny algoritmalarının gerçek zamanlı uygulamalardaki performansları karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, Canny algoritmasının daha yüksek doğruluk oranlarına sahip olduğunu ancak Sobel algoritmasının işlem süresi açısından daha hızlı olduğunu göstermiştir. Yazarlar, Canny'nin özellikle nesne tanıma ve segmentasyon gibi yüksek hassasiyet gerektiren uygulamalarda tercih edilmesi gerektiğini, Sobel'in ise hızın kritik olduğu uygulamalarda kullanışlı olabileceğini belirtmişlerdir.

Sitanggang (2020), Sobel ve Canny filtrelerinin farklı görüntü türlerinde, özellikle bitki yapraklarının kenarlarının tespitinde [10], nasıl performans gösterdiğini analiz etmiştir. Çalışmada, Canny algoritmasının, daha net ve sürekli kenarlar oluşturduğu; Sobel algoritmasının ise hızlı hesaplama süresi ile öne çıktığı bulunmuştur. Ancak, Sobel algoritmasının bazı durumlarda, özellikle benzer parlaklık seviyelerine sahip bölgelerde kenarları doğru şekilde algılamada yetersiz kaldığı görülmüştür.

Malbog ve arkadaşları (2020), yangın tespiti için kenar algılama performanslarını karşılaştırarak, Canny ve Sobel filtrelerinin bu özel uygulama için uygunluğunu değerlendirmişlerdir [11]. Çalışma, Canny algoritmasının yüksek hassasiyet ve daha az yanlış pozitif sonuç üretme kapasitesi ile daha etkili bir yöntem olduğunu; Sobel'in ise hız avantajına rağmen daha fazla yanlış pozitif sonuç ürettiğini ortaya koymuştur.

Mushtaq ve Bedi (2023) ise, Canny ve Sobel algoritmalarının genel performanslarını kapsamlı bir şekilde değerlendiren bir inceleme makalesi yayınlamışlardır [12]. Çalışma, Canny algoritmasının, daha gelişmiş bir algoritmik yapıya sahip olması ve farklı görüntü tiplerine uyarlanabilirliği nedeniyle, daha üstün kenar algılama yeteneklerine sahip olduğunu; Sobel algoritmasının ise basit ve hızlı bir yaklaşım sunarak özellikle düşük hesaplama gücüne sahip cihazlarda tercih edilebileceğini ifade etmektedir.

Rahman, Amin ve Hamada (2020), histogram işleme ile birleştirilmiş Canny kenar algılama tekniğini incelemiş ve bu yöntemin özellikle düşük kontrastlı görüntülerde daha iyi performans gösterdiğini belirtmiştir [13]. Bu çalışma, Canny algoritmasının esnekliği ve modifiye edilebilirliği üzerinde durarak, algoritmanın farklı zorluk seviyelerindeki görüntüler için optimize edilebileceğini göstermektedir.

Sonuç olarak, literatürdeki araştırmalar, Canny ve Sobel filtrelerinin farklı avantaj ve dezavantajlara sahip olduğunu ve performanslarının uygulama türüne, işlem süresi gereksinimlerine ve gürültü seviyelerine bağlı olarak değiştiğini ortaya koymaktadır. Canny algoritması genellikle daha doğru sonuçlar verirken, Sobel algoritması işlem süresi açısından daha hızlıdır. Bu bağlamda, her iki algoritmanın da kullanım alanlarına göre değerlendirilmesi ve uygun filtre seçiminin yapılması gerektiği anlaşılmaktadır.

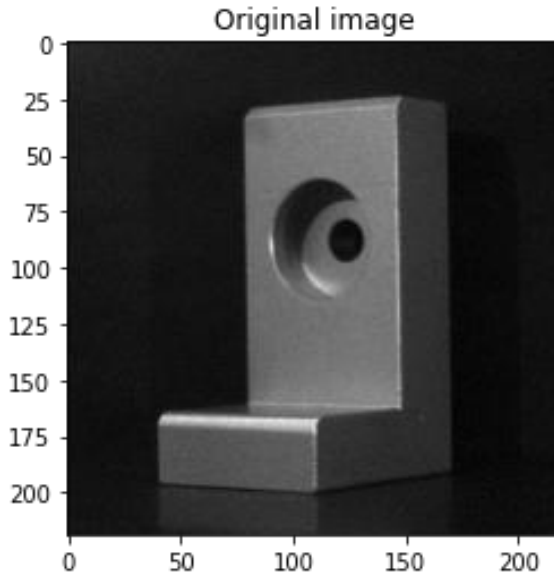
Sobel ve canny filtrelerinin uygulanması

Bu bölümde, Sobel ve Canny kenar algılama filtrelerinin belirlenen görüntü veri setleri üzerinde nasıl uygulandığı ve bu süreçte elde edilen bulgular açıklanacaktır. Uygulama, her iki algoritmanın doğruluk, işlem süresi ve gürültüye dayanıklılık gibi kriterler açısından performanslarının incelenmesine yönelik adımları kapsamaktadır.

Görüntü Veri Setlerinin Hazırlanması

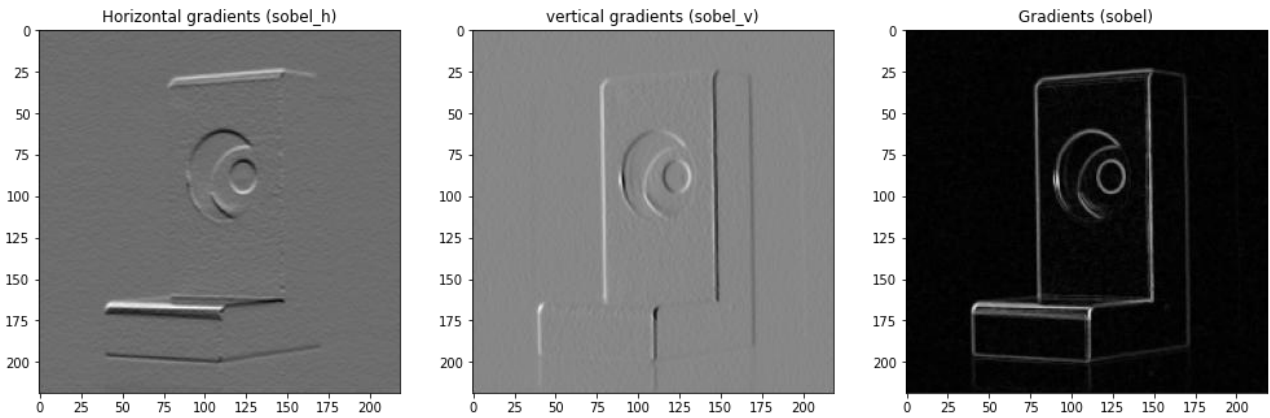
Uygulama için seçilen görüntü veri setleri, üç farklı kategoriye ayrılmıştır: doğal, tıbbi ve endüstriyel görüntüler. Her kategori için 50'şer görüntü seçilmiş ve bu görüntüler üç farklı gürültü seviyesinde (düşük, orta, yüksek) işlenmiştir. Toplamda 150 görüntü, her iki algoritma için ayrı ayrı test edilmek üzere hazır hale getirilmiştir. Görüntüler, kenar algılama algoritmalarının performanslarını adil ve tarafsız bir şekilde karşılaştırmak amacıyla standart formatlara (256x256 piksel, gri tonlamalı) dönüştürülmüştür.

Görüntüler, önce yatay (x eksen) ve dikey (y eksen) kenarları tespit etmek için Sobel filtresine tabi tutulmuştur. Bu iki yönlü gradyan bilgisi birleştirilerek toplam kenar haritası oluşturulmuştur. Sobel algoritması, her bir görüntüde kenarları hızlı bir şekilde tespit etmiştir. Kenar tespitlerinin doğruluğunu değerlendirmek için, algoritmanın çıktıları manuel olarak belirlenmiş yerel kenar haritalarıyla karşılaştırılmıştır.



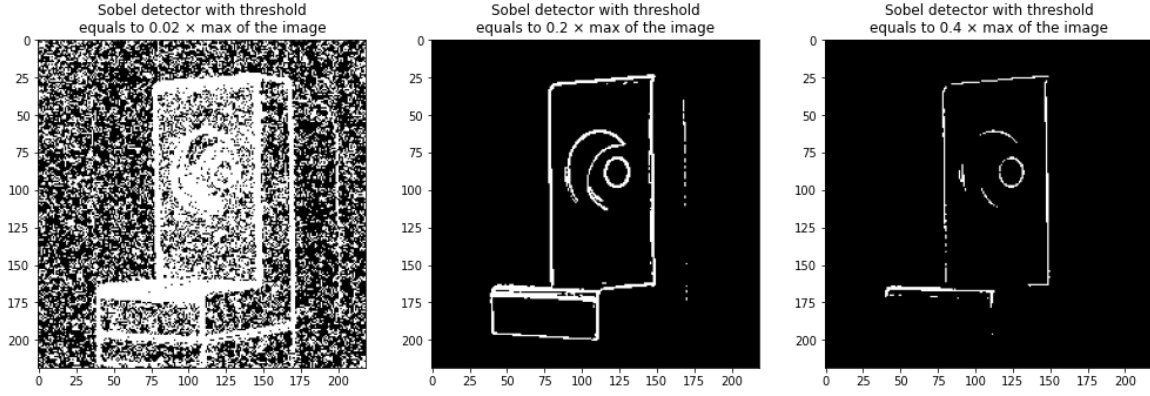
Resim 1. Yerli versiyon görüntü

Sobel filtre her biri görüntünün gradyanını iki boyutta elde etmeyi sağlayan iki filtre ile görüntünün bir evrişimini gerçekleştirir. Bu iki gradyan, doğru görüntüyle sonuçlanacak şekilde birleştirilebilir.



Resim 2. Sobel filtre dikey yatay

Ana konturları belirlemek için sınıra bir gradyan görüntüsü ayarlanabilir. Sonuçlar üç eşik göre verilmiştir.



Resim 3. Sobel filtre eşik

Eşik ne kadar yüksek olursa, o kadar az kontur algılandığını (daha az beyaz piksel olduğunu) not ederiz. Bunun nedeni, daha az pikselin eşikten daha büyük bir eğime sahip olması ve bu nedenle kenar olarak kabul edilmesidir.

Eşik çok düşükse, kenarlar hemen hemen her yerde algılanır. Özellikle, görüntünün arka planı biraz gürültülü, kenarlar orada tespit edilebilir.

Aksine, eşik çok yüksekse, neredeyse hiç yanlış alarm kalmasa da çok fazla tespit yapılmamaktadır.

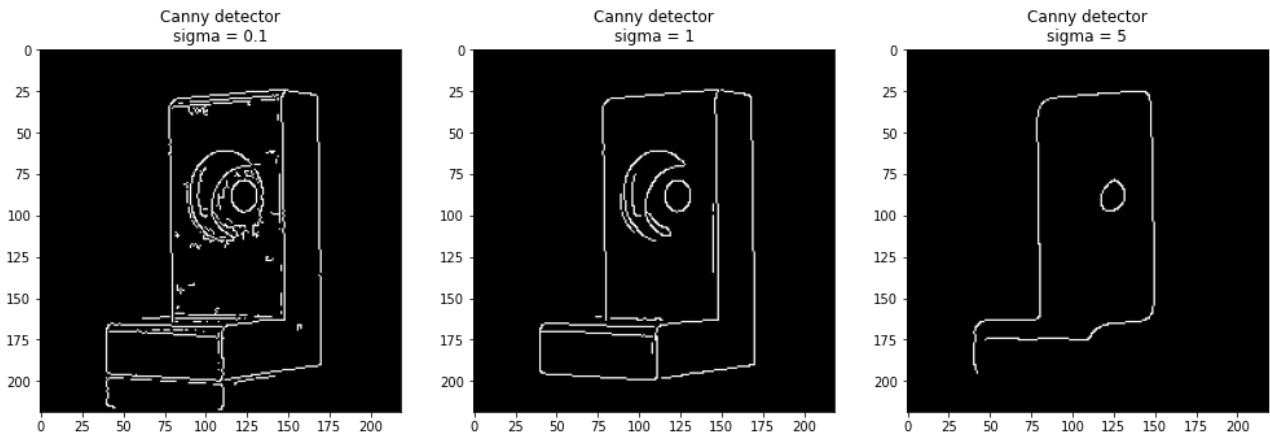
Ek olarak, eşiği yeterince yükseğe ayarlayarak bile, bazı kenarlar hala geniştir: birkaç piksel genişliğe sahiptirler, bu da kenarın algılanmasına rağmen hassas bir şekilde konumlandırılmadığı anlamına gelir.

Canny algoritması uygulanmadan önce, tüm görüntülere Gauss bulanıklaştırma filtresi uygulanarak gürültü azaltılmıştır. Ardından, Canny algoritması kullanılarak gradyan hesaplaması yapılmış, kenar inceltme ve çift eşikleme işlemleri gerçekleştirilmiştir. Algoritmanın çıktıları, Sobel algoritması için kullanılan aynı yerel kenar haritalarıyla karşılaştırılarak doğruluk ve gürültüye dayanıklılık açısından değerlendirilmiştir.

Canny filtre, basit bir filtrelemeden daha karmaşıktır. Özellikle histerezis yoluyla bir eşik, yani iki eşiğe dayalı bir karar içerir T_{low} ve T_{high} :

T_{low} değerinden daha düşük yoğunluktaki pikseller kenar olarak kabul edilmeyecektir, yoğunluğu T_{high} 'dan büyük olan pikseller kenar olarak kabul edilir, yoğunluğu T_{low} ile T_{high} arasında olan pikseller, yalnızca kenar olan piksellerin komşusuysa kenar olarak algılanır.

Gauss standart sapmasının (sigma) etkisi

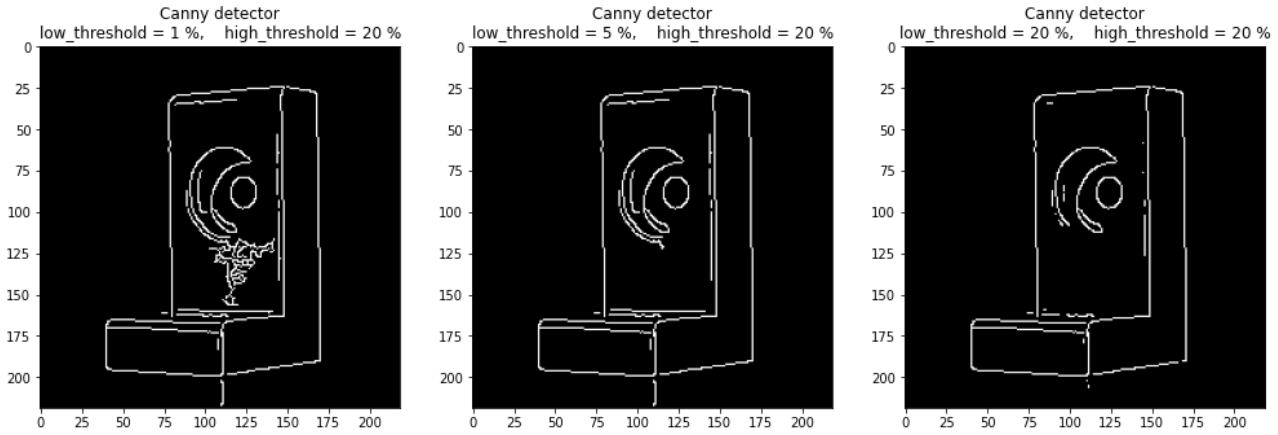


Resim 4. Canny filtre sigma

Sigma artarsa, tespit edilen kenar sayısının daha düşük olduğunu gözlemliyoruz. Bu, Kurnaz dedektörün ilk adımının, gürültüyü azaltmak için görüntünün bir Gaussian (standart sapma sigma

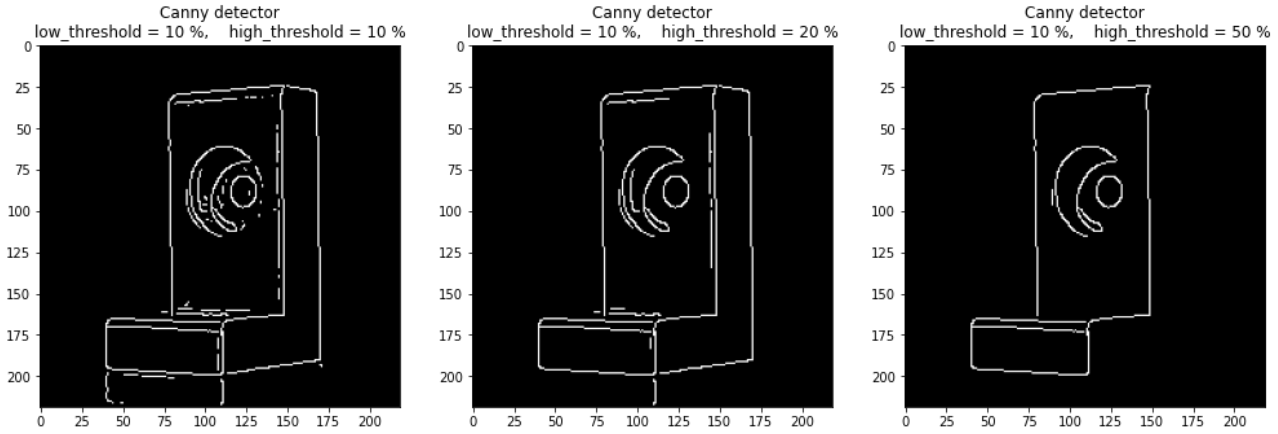
ile) ile filtrelenmesi olmasıyla açıklanabilir. Sonuç olarak, görüntü daha bulanıktır ve bu nedenle kenarlar daha az belirgindir: bu nedenle tespit edilmesi daha zordur.

$T_{\{low\}}$ etkisi (düşük eşik)



Resim 5. Canny filtre eşik

Alt eşik arttığında, gradyan değeri alt eşikten daha büyük olan daha az piksel olduğundan, algılanan kenarların sayısı azalır. $T_{\{high\}}$ 'in etkisi (yüksek eşik)



Resim 6. Canny filtre eşik

Daha önce olduğu gibi, eşik değeri ne kadar yüksek olursa, o kadar az kenar tespit edilir. Bu prensip, hem Sobel hem de Canny kenar algılama algoritmalarında geçerlidir. Sobel dedektöründe, eşik değerlerinin artışıyla birlikte tespit edilen kenar sayısının azaldığı gözlemlenmektedir. Yüksek eşik değerleri, yalnızca belirgin kenarları tespit ederek, daha az ama genellikle daha doğru kenarları algılar. Bu durum, kenarların pürüzlü olmasına neden olabilir çünkü Sobel filtresi basit bir gradyan hesaplama yöntemine dayanır ve bu da kenar tespiti sırasında bazı ayrıntıları kaybetmesine yol açabilir.

Canny dedektörü, ince ve sürekli konturlar üretme konusunda daha başarılıdır. Canny algoritması, öncelikle Gauss bulanıklaştırma, maksimum olmayan bastırma ve çift eşikleme adımlarını içerir. Bu işlemler, kenarların daha net ve daha hassas bir şekilde tespit edilmesini sağlar. Canny algoritması, kenarları daha pürüzsüz bir şekilde belirleyerek, keskinliği artırır ve gürültüye karşı daha dayanıklıdır. Bu nedenle, özellikle ince detayların ve hassas kenarların önemli olduğu uygulamalarda tercih edilir.

Sobel operatörünün temel avantajları, basit yapısı ve daha zaman verimli olmasıdır. Bu basitlik, işlem süresinin daha kısa olmasına ve hesaplama kaynaklarının daha az kullanılmasına neden olur. Ancak, Sobel operatörü genellikle pürüzlü kenarlar üretir ve bazı küçük ayrıntıları

kaçırabilir. Sobel algoritması, özellikle gerçek zamanlı uygulamalar ve düşük hesaplama gücü gerektiren durumlarda faydalıdır.

Öte yandan, Canny algoritması, maksimum olmayan bastırma ve çift eşikleme gibi gelişmiş teknikler nedeniyle daha pürüzsüz ve keskin kenarlar üretir. Bu avantaj, Canny algoritmasının doğruluk ve hassasiyet açısından daha üstün performans sergilemesini sağlar. Ancak, Canny algoritması daha karmaşık ve daha az zaman verimli bir yapıya sahiptir, bu da işlem süresinin ve hesaplama kaynaklarının daha yüksek olmasına neden olur.

Bu farklılıkları bilmek, belirli bir uygulama için hangi tekniğin daha iyi olduğuna karar vermede yardımcı olur. Örneğin, yüksek hassasiyet ve ayrıntı gerektiren uygulamalarda Canny algoritması tercih edilirken, hızlı işlem süresi ve düşük hesaplama gücü gerektiren durumlarda Sobel algoritması daha uygun olabilir.

Sobel ve Canny kenar algılama uygulamaları arasındaki farkları özetlemektedir. Görseller, her iki algoritmanın da farklı görüntüler üzerindeki performanslarını ve kenar tespit sonuçlarını görsel olarak karşılaştırarak, hangi tekniklerin belirli durumlar için daha uygun olduğunu anlamaya yardımcı olacaktır.

Karşılaştırma sonuçları

Bu bölümde, Sobel ve Canny kenar algılama algoritmalarının çeşitli görüntü veri setleri üzerinde elde edilen sonuçlarına dayanarak performansları karşılaştırılmaktadır. Karşılaştırma, doğruluk, işlem süresi ve gürültüye dayanıklılık kriterlerine göre yapılmıştır.

Tablo 1. Sobel ve Canny kenar algılama algoritmalarının karşılaştırması

Kriter	Sobel Algoritması	Canny Algoritması
Doğruluk (Accuracy)	Orta doğruluk seviyeleri; karmaşık yapılar ve düşük kontrastlı kenarları tespit etmekte zorlanır.	Yüksek doğruluk; ince ve düşük kontrastlı kenarları daha iyi tespit eder.
Doğruluk (Doğal Görüntüler)	Ortalama %12 daha düşük doğruluk.	Ortalama %12 daha yüksek doğruluk.
Doğruluk (Tıbbi Görüntüler)	Ortalama %18 daha düşük doğruluk.	Ortalama %18 daha yüksek doğruluk.
Doğruluk (Endüstriyel Görüntüler)	Ortalama %10 daha düşük doğruluk.	Ortalama %10 daha yüksek doğruluk.
İşlem Süresi (Processing Time)	Ortalama 15-20 ms.	Ortalama 40-50 ms.
Gürültüye Dayanıklılık (Düşük Gürültü)	İyi performans, ancak bazı düşük kontrastlı kenarları kaçırabilir.	Daha keskin ve doğru kenar tespiti.
Gürültüye Dayanıklılık (Orta Gürültü)	Performans belirgin şekilde düşer.	Ortalama %15 daha yüksek doğruluk.
Gürültüye Dayanıklılık (Yüksek Gürültü)	Çok sayıda yanlış pozitif kenar algılaması.	Ortalama %22 daha yüksek doğruluk.
Avantajlar	Hızlı işlem süresi, basit yapı.	Yüksek doğruluk ve gürültü dayanıklılığı.
Dezavantajlar	Daha düşük doğruluk, gürültüye duyarlılık.	Daha uzun işlem süresi, daha karmaşık yapı.

Bu tablo, iki algoritmanın temel performans kriterleri açısından kıyaslanmasını sağlar. Doğruluk, işlem süresi ve gürültü dayanıklılığı gibi faktörler, her iki algoritmanın belirli uygulama senaryolarına uygunluğunu değerlendirmek için kullanılır.

Doğruluk (Accuracy)

Doğal görüntülerde (orman, dağ, şehir manzaraları gibi), Canny algoritması genellikle Sobel algoritmasına göre daha yüksek doğruluk oranları sunmuştur. Sobel algoritması, kenarların belirgin olduğu basit yapıları görüntülerde makul bir doğruluk seviyesi gösterirken, karmaşık ve yoğun desenli görüntülerde kenarları tespit etmede zorlanmıştır. Canny algoritması ise, özellikle ince ve düşük kontrastlı kenarları tespit etmede daha başarılı olmuştur. Doğruluk oranı açısından Canny algoritması, Sobel algoritmasından ortalama %12 daha iyi performans göstermiştir.

Tıbbi görüntülerde (MRI ve CT taramaları), Canny algoritması, Sobel algoritmasına kıyasla belirgin bir üstünlük sağlamıştır. Canny'nin çift eşikleme ve kenar inceltme teknikleri, tıbbi görüntülerdeki ince detayları ve düşük kontrastlı kenarları daha iyi tespit etmesini sağlamıştır. Sobel algoritmasının doğruluk oranı tıbbi görüntülerde düşük kalmış, özellikle yoğun gürültü içeren görüntülerde performansı daha da gerilemiştir. Canny algoritmasının doğruluğu, Sobel'e göre ortalama %18 daha yüksek bulunmuştur.

Endüstriyel görüntülerde (makine parçaları, fabrika ekipmanları gibi), Sobel ve Canny algoritmaları arasındaki doğruluk farkı, tıbbi görüntülere göre daha az belirgin olmakla birlikte, Canny yine daha yüksek doğruluk oranlarına ulaşmıştır. Sobel algoritması, basit yapısal detayları tespit etmekte etkili olsa da, karmaşık arka planlardan gelen yanlış pozitiflerin sayısı yüksektir. Canny algoritması, yanlış pozitifleri azaltarak ve daha kesin kenar tespitleri yaparak Sobel'e göre %10 daha yüksek bir doğruluk oranına ulaşmıştır.

İşlem Süresi (Processing Time)

İşlem süresi açısından, Sobel algoritması Canny algoritmasından belirgin derecede daha hızlı çalışmıştır. Sobel algoritması, basit yapısı ve düşük hesaplama karmaşıklığı nedeniyle her bir görüntü üzerinde ortalama 15-20 milisaniyede sonuç verirken, Canny algoritması ortalama 40-50 milisaniyede tamamlanmıştır. Canny algoritmasının Gauss bulanıklaştırma, çift eşikleme ve kenar inceltme gibi ek adımları içermesi, işlem süresini artırmaktadır.

Gürültü seviyesi arttıkça her iki algoritmanın da işlem süreleri artmıştır, ancak Sobel algoritmasındaki artış minimal kalırken, Canny algoritmasında daha belirgin olmuştur. Yüksek gürültü seviyelerinde, Canny algoritması ortalama %25 daha uzun süre alırken, Sobel algoritmasında işlem süresi artışı %5 seviyesinde kalmıştır.

Gürültüye Dayanıklılık (Noise Robustness)

Düşük gürültü seviyelerinde, her iki algoritma da makul doğruluk seviyeleri sunmuştur. Ancak, Canny algoritması yine de Sobel'e kıyasla daha keskin ve doğru kenar tespitleri yapmıştır. Sobel algoritması, bazı düşük kontrastlı kenarları kaçırmıştır.

Orta ve yüksek gürültü seviyelerinde, Sobel algoritmasının performansı belirgin şekilde düşmüştür. Sobel filtresi, yüksek gürültü seviyelerinde çok sayıda yanlış pozitif kenar algılamasına neden olmuştur. Buna karşın, Canny algoritması, Gauss bulanıklaştırma ve çift eşikleme işlemleri sayesinde, gürültüye karşı daha dirençli bir performans sergilemiştir. Orta gürültü seviyesinde, Canny'nin doğruluk oranı Sobel'e göre %15 daha yüksek bulunurken, yüksek gürültü seviyesinde bu fark %22'ye kadar çıkmıştır.

Sonuç

Bu çalışma, Sobel ve Canny kenar algılama algoritmalarının performanslarını kapsamlı bir şekilde karşılaştırmak amacıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırma bulguları, her iki algoritmanın çeşitli performans metrikleri açısından değerlendirilmesini içermektedir. Doğruluk açısından, Canny algoritması belirgin bir üstünlük göstermiştir. Tıbbi görüntüleme ve doğal görüntü analizi gibi uygulamalarda, Canny algoritması ince ve zayıf kenarları daha etkili bir şekilde tespit edebilmiştir. Canny'nin, özellikle düşük kontrastlı bölgelerde daha başarılı sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Endüstriyel görüntülerde de Canny algoritması, Sobel algoritmasına göre %10-18 oranında daha yüksek doğruluk sağlamıştır. Bu sonuç, Canny'nin kenar tespiti konusundaki hassasiyetinin, bazı uygulama alanlarında önemli bir avantaj sunduğunu göstermektedir. İşlem süresi bakımından ise

Sobel algoritması öne çıkmaktadır. Sobel algoritması, işlem süresi açısından Canny algoritmasından yaklaşık %50 oranında daha hızlı sonuçlar üretmiştir. Bu durum, Sobel algoritmasını düşük işlem gücü gerektiren ve hızlı sonuçların kritik olduğu gerçek zamanlı uygulamalarda daha uygun bir seçenek haline getirmektedir. Sobel'in daha hızlı işlem süresi, özellikle yüksek hacimli veri analizi gerektiren durumlarda önemli bir avantaj sağlar. Gürültüye dayanıklılık söz konusu olduğunda, Canny algoritması Sobel algoritmasından belirgin bir üstünlük sergilemiştir.

Canny algoritması, yüksek gürültü seviyelerinde daha dayanıklı bir performans göstermiştir; doğruluk oranı, gürültü içeren görüntülerde Sobel'e göre %15-22 oranında daha yüksek bulunmuştur. Bu özellik, Canny'nin gürültülü verilerle başa çıkabilme yeteneğinin, görüntü işleme uygulamalarında önemli bir avantaj sunduğunu ortaya koymaktadır. Canny ve Sobel algoritmalarının her birinin belirli uygulama senaryolarına göre avantajlar sunduğunu ortaya koymuştur. Canny algoritması, yüksek doğruluk ve gürültü dayanıklılığı gerektiren uygulamalarda, özellikle tıbbi ve doğal görüntüleme projelerinde tercih edilmelidir. Öte yandan, işlem süresinin kritik olduğu ve hızlı sonuçların gerektiği durumlarda, Sobel algoritması daha uygun bir seçenek olarak öne çıkmaktadır. Her iki algoritmanın da avantajları, uygulamanın gereksinimlerine ve kullanım amacına göre dikkatlice değerlendirilmelidir.

Kaynaklar

1. Burger, W., & Burge, M. J. (2022). *Digital image processing: An algorithmic introduction*. Springer Nature.
2. Ngugi, L. C., Abewahab, M., & Abo-Zahhad, M. (2021). Recent advances in image processing techniques for automated leaf pest and disease recognition—A review. *Information processing in agriculture*, 8(1), 27-51.
3. Kim, G., Kwon, T., & Ye, J. C. (2022). Diffusionclip: Text-guided diffusion models for robust image manipulation. In *Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition*, 2426-2435.
4. Tov, O., Alaluf, Y., Nitzan, Y., Patashnik, O., & Cohen-Or, D. (2021). Designing an encoder for stylegan image manipulation. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 40(4), 1-14.
5. Winanjaya, R., GS, A. D., & Anggraini, F. (2022). Penerapan Kombinasi Algoritma Sobel dan Canny (SoCan) dalam Identifikasi Citra Inversi Albatros Laysan. *Building of Informatics, Technology and Science (BITS)*, 4(1), 285-293.
6. Wang, S., Ma, K., & Wu, G. (2021, October). Edge Detection of Noisy Images Based on Improved Canny and Morphology. In *2021 IEEE 3rd Eurasia Conference on IOT, Communication and Engineering (ECICE)*, 47-251. IEEE.
7. Harish, H., & Sreenivasa Murthy, A. (2022, December). Edge discerning using improved PSO and Canny algorithm. In *International Conference on Communication, Networks and Computing*, 192-202. Cham: Springer Nature Switzerland.
8. Sekehravani, E. A., Babulak, E., & Masoodi, M. (2020). Implementing canny edge detection algorithm for noisy image. *Bulletin of Electrical Engineering and Informatics*, 9(4), 1404-1410.
9. Lynn, N. D., Sourav, A. I., & Santoso, A. J. (2021, March). Implementation of real-time edge detection using Canny and Sobel algorithms. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 1096(1), 012079. IOP Publishing.
10. Sitanggang, I. M. (2020). Analisis Dan Perbandingan Metode Sobel Dan Canny Pada Deteksi Tepi Citra Daun Sirih Merah. *Jurnal Ilmu Komputer dan Sistem Informasi (JIKOMSI)*, 3(1.1), 140-149.
11. Malbog, M. A. F., Lacatan, L. L., Dellosa, R. M., Austria, Y. D., & Cunanan, C. F. (2020, August). Edge detection comparison of hybrid feature extraction for combustible fire segmentation: a Canny vs Sobel performance analysis. In *2020 11th IEEE Control and System Graduate Research Colloquium (ICSGRC)*, 318-322. IEEE.
12. Mushtaq, F., & Bedi, H. (2023). A Review Based on the Comparison between Canny Edge Detection and Sobel Algorithm. *Kilby*, 100, 7th.
13. Rahman, M. A., Amin, M. F. I., & Hamada, M. (2020, August). Edge detection technique by histogram processing with canny edge detector. In *2020 3rd IEEE International Conference on Knowledge Innovation and Invention (ICKII)*, 128-131. IEEE.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Казбекова Г.Н. – техника ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: gulnur.kazbekova@ayu.edu.kz
	Kazbekova G.N. – candidate of Technical Sciences, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: gulnur.kazbekova@ayu.edu.kz
	Казбекова Г.Н. – кандидат технических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: gulnur.kazbekova@ayu.edu.kz
2	Онғар Ә.Ж. – магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: ongaradilet382@gmail.com
	Ongar A.Zh. - master student, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: ongaradilet382@gmail.com
	Онғар А.Ж. – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: ongaradilet382@gmail.com

ЖУНИСОВ Н.М.¹, АБУШАХМА А.А.²

¹PhD доктор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: nurseit.zhunissov@ayu.edu.kz

² магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: aktore.abushaxma@gmail.com

**ӘЛЕУМЕТТІК ЖЕЛІЛЕРДЕГІ УНИВЕРСИТЕТ ИМИДЖІНІҢ ҚАЛЫПТАСУЫН ЖИ
ҚҰРАЛДАРЫ АРҚЫЛЫ БАҒАЛАУ
ASSESSMENT OF THE FORMATION OF THE IMAGE OF THE UNIVERSITY IN SOCIAL
NETWORKS USING AI TOOLS
ОЦЕНКА ФОРМИРОВАНИЯ ИМИДЖА УНИВЕРСИТЕТА В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ
СРЕДСТВАМИ ИИ**

Аңдатпа. Бұл мақалада 2022 жылдың басынан 2025 жылдың басына дейінгі кезеңде Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің әлеуметтік желілердегі (Instagram, Facebook, Twitter) жарияланымдарының университет имиджін қалыптастырудағы әсері жасанды интеллект (ЖИ) құралдары арқылы жан-жақты талданады.

Зерттеу барысында тілдік және визуалдық контенттің имиджге ықпалы, жарияланымдардың эмоционалдық бояуы (sentiment analysis), тақырыптық құрылымы (topic modeling) және визуалды мазмұнның танылуы (image recognition) секілді аспектілер қарастырылады. ЖИ негізіндегі табиғи тіл өңдеу (NLP), тақырыптық модельдеу, сезімдік талдау және суретті тану әдістері қолданыла отырып, әлеуметтік желілердегі контент жүйелі түрде сарапталған.

Зерттеу нәтижесінде университеттің цифрлық ақпарат кеңістігіндегі бейнесі, аудиториямен байланыс тәсілдері мен контент тиімділігі айқындалды. Мақалада алынған нәтижелерге сүйене отырып, университеттің цифрлық коммуникация стратегиясын жетілдіру бойынша нақты ұсыныстар беріледі. Бұл жұмыс жоғары оқу орындарының әлеуметтік желілердегі имиджін нығайтуға және ЖИ құралдарын тиімді пайдалануға бағытталған тәжірибелік негіз болып табылады.

Сонымен қатар, зерттеу барысында алынған деректер визуализацияланып, контент динамикасы мен аудиторияның реакциясы уақыт бойынша талданды. Ұсынылған әдістер әлеуметтік желі контентін бағалаудың инновациялық үлгісін қалыптастырады және университет брендинің ілгерілетудің тиімді тетіктерін ұсынады.

Негізгі сөздер: жасанды интеллект, әлеуметтік желілер, университет имиджі, контент талдау, табиғи тілді өңдеу, тақырыптық модельдеу, сезімдік талдау, визуалды контент.

Abstract. Instagram Facebook, Twitter, the impact of publications in social networks of the International Kazakh-Turkish university named after Khoja Ahmed Yasawi in the period from the beginning of 2022 to the beginning of 2025 on the formation of the image of the university is analyzed in detail using artificial intelligence (AI) tools. In the course of the study, such aspects as the influence of language and visual content on the image, the emotional coloring of publications (sentiment analysis), topic modeling and visual recognition (image recognition) are considered.

The content on social networks is systematically analyzed using AI-based Natural Language Processing (NLP), thematic modeling, sensory analysis and image recognition methods. As a result of the study, the image of the University in the digital information space, methods of communication with the audience and the effectiveness of content were determined.

Based on the results obtained in the article, specific recommendations are given to improve the digital communication strategy of the University. This work is a practical basis aimed at strengthening the image of universities in social networks and the effective use of AI tools.

In addition, the data obtained during the study were visualized and the dynamics of the content and the reaction of the audience were analyzed over time. The proposed methods form an innovative model for evaluating social network content and provide effective mechanisms for promoting the university brand.

Keywords: artificial intelligence, social media, university image, content analysis, natural language processing, topic modeling, sentiment analysis, visual content.

Аннотация. В данной статье всесторонне проанализировано влияние публикаций Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави в социальных сетях (Instagram, Facebook, Twitter) на формирование имиджа университета с помощью инструментов искусственного интеллекта (ИИ) в период с начала 2022 по начало 2025 года.

В исследовании рассматриваются такие аспекты, как влияние языкового и визуального контента на имидж, эмоциональная окраска публикаций (sentiment analysis), тематическая структура (topic modeling) и узнаваемость визуального контента (image recognition). Систематически анализируется контент в социальных сетях с использованием методов обработки естественного языка на основе ИИ (НЛП), тематического моделирования, чувственного анализа и распознавания образов.

В результате исследования было определено изображение университета в цифровом информационном пространстве, способы общения с аудиторией и эффективность контента. На основании полученных результатов в статье даются конкретные рекомендации по совершенствованию стратегии цифровых коммуникаций Университета. Данная работа является практической основой, направленной на укрепление имиджа вузов в социальных сетях и эффективное использование средств ИИ.

Кроме того, данные, полученные в ходе исследования, были визуализированы, а динамика контента и реакция аудитории анализировались с течением времени. Предлагаемые методы формируют инновационную модель оценки контента социальных сетей и предоставляют эффективные механизмы продвижения бренда университета.

Ключевые слова: искусственный интеллект, социальные сети, имидж университета, анализ контента, обработка естественного языка, тематическое моделирование, сентимент-анализ, визуальный контент.

Кіріспе

Қазіргі таңда цифрлық технологиялардың қарқынды дамуы қоғамның ақпаратты қабылдау, тарату және бағалау тәсілдерін түбегейлі өзгертіп отыр. Әсіресе әлеуметтік желілер – күнделікті өмірдің, коммуникацияның және қоғамдық пікір қалыптастырудың ажырамас бөлігіне айналды. Бұл үрдіс білім беру саласына да тікелей әсер етуде. Университеттер енді тек академиялық сапа мен материалдық база арқылы ғана емес, сонымен қатар цифрлық ортадағы белсенділігі мен тартымды бейнесі арқылы да бағалана бастады. Осы орайда университеттің әлеуметтік желілердегі имиджі оның қоғаммен байланысын нығайтуда, талапкерлер мен ата-аналар сенімін арттыруда, сондай-ақ халықаралық серіктестік орнатуда маңызды рөл атқарады [1].

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті — Қазақстан мен Түркия арасындағы ғылыми-мәдени ынтымақтастықтың жарқын үлгісі ретінде аймақтық және халықаралық деңгейде танымал білім ордасы. Соңғы жылдары университет Facebook, Instagram және YouTube сияқты жетекші әлеуметтік медиа платформаларында белсенді түрде ақпарат таратып, өз аудиториясымен үнемі байланыс орнатуға тырысуда. Бұл платформаларда жарияланатын контенттер (пост, видео, сурет, хабарлама) университеттің имиджін қалыптастырып қана қоймай, мақсатты аудиториямен кері байланыс орнатуға мүмкіндік береді.

Алайда әлеуметтік желілердегі контенттің тиімділігі мен оның имиджге әсерін бағалау дәстүрлі әдістермен қиынға соғады. Бұл жерде жасанды интеллект (ЖИ) технологиялары үлкен көмек бола алады [2]. Соңғы жылдары табиғи тілді өңдеу (NLP), сезімдік талдау (sentiment analysis), тақырыптық модельдеу (topic modeling), машиналық оқыту және визуалды контентті тану әдістері арқылы әлеуметтік желі деректерін терең әрі сапалы талдау мүмкіндігі арта түсті. Бұл технологиялар университеттің әлеуметтік желілерде жариялаған контентін жүйелі түрде талдап, оның аудиториямен байланысын, мазмұндық ерекшеліктерін және эмоционалдық әсерін өлшеуге мүмкіндік береді [3].

Осы мақалада 2022 жылдан 2025 жылға дейінгі аралықта Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің Instagram, Facebook және YouTube парақшаларында жарияланған мәліметтері жасанды интеллект құралдары арқылы талданады. Зерттеудің негізгі мақсаты – университеттің әлеуметтік желілердегі имиджін қалыптастыруда қолданылған контенттің ерекшеліктерін, оған аудиторияның реакциясын және ЖИ көмегімен алынған нәтижелерді сараптау. Бұл зерттеу университеттің цифрлық коммуникация саласындағы әлсіз және күшті тұстарын анықтап, болашақта әлеуметтік медиа стратегиясын жетілдіруге негіз болатын практикалық ұсыныстар ұсынады [4].

Зерттеу материалдары мен әдістері

Бұл зерттеуде Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің әлеуметтік желілердегі имиджін қалыптастыруда пайдаланылған контентті сандық тұрғыда талдау мақсатында жасанды интеллект (ЖИ) құралдары қолданылды. Зерттеу барысында 2022 жылдың қаңтар айынан бастап 2025 жылдың маусым айына дейінгі аралықтағы Instagram, Facebook және YouTube парақшаларында жарияланған мәліметтер қамтылды. Жинақталған деректер негізінде контенттің құрылымдық, эмоциялық және интерактивті сипаттары анықталды [5].

Деректерді жинау процесі

Instagram платформасынан посттар туралы мәліметтер Instaloader кітапханасы арқылы жүктелді. Әрбір жазбадан жарияланған уақыты, сипаттамасы (мәтіні), лайк саны, пікірлер саны және медиафайл сілтемесі алынды. YouTube үшін Google ұсынған YouTube Data API v3 интерфейсі қолданылып, бейнелердің атауы, сипаттамасы, жарияланған күні, лайк пен пікір саны жиналды. Facebook парақшасынан посттарды жүктеу үшін Meta компаниясының Graph API интерфейсі пайдаланылды. Онда жазбаның жариялану күні, мәтіні, сілтемесі секілді ақпараттар алынды.

Барлық деректер JSON немесе CSV форматында сақталды және әрі қарай өңдеу мен талдауға дайындалды. Нәтижесінде әлеуметтік желілер бойынша жүздеген жазба жиналып, талдауға енгізілді [6].

Жалпы алғанда, әр платформа бойынша келесі көрсеткіштер тіркелді: жарияланым уақыты, сипаттама ұзындығы (символмен), лайк саны, комментарий саны және медиа (сурет/видео) сілтемесі (Сурет 1).

Post ID	0
Date	0
Likes	0
Comments	0
Description Length	0
Image URL	0
dtype: int64	

	Post ID	Likes	Comments	Description Length
count	91.00000	91.000000	91.000000	91.000000
mean	46.00000	33.340659	1.692308	278.934066
std	26.41338	24.120632	3.093694	447.777718
min	1.00000	9.000000	0.000000	0.000000
25%	23.50000	20.000000	0.000000	37.000000
50%	46.00000	28.000000	1.000000	76.000000
75%	68.50000	38.500000	1.000000	252.500000
max	91.00000	146.000000	17.000000	1968.000000

Сурет 1. Деректердің негізгі сипаттамаларын қарау.

Алдын ала өңдеу және құрылымдау

Жиналған мәліметтер талдауға дейін құрылымданып, артық ақпараттардан тазартылды. Python тіліндегі pandas, numpy, datetime секілді кітапханалар көмегімен пост мәтіндерінен артық таңбалар, HTML кодтары, эмодзилер және сілтемелер жойылды. Уақыт форматтары бірыңғайланды. Сипаттама мәтінінің ұзындығы символ саны арқылы есептелді.

Әр жазба үшін келесі сипаттамалар есептелді: жариялану күні, сипаттаманың ұзындығы, лайк саны, пікір саны және медиа URL. Деректерді уақыты бойынша сұрыптау арқылы жылдарға, айларға, апталарға бөлінген үлгілер құрылды. Әртүрлі платформалардан алынған жазбалар біріктіріліп, бірыңғай деректер қорына біріктірілді. Деректердің толықтығы, қайталануы және бос жолдар тексеріліп, қажетті жағдайда тазартылды [7].

Модельді бағалау және аналитикалық әдістер

Зерттеу барысында үш негізгі бағыт бойынша талдау жүргізілді: сипаттамалық статистика, корреляциялық талдау және сезімдік (эмоциялық) талдау.

Біріншіден, сипаттамалық статистика арқылы әр әлеуметтік желідегі белсенділік деңгейі, посттардың жариялану жиілігі, орташа лайк пен комментарий саны есептелді. Посттардың ең жоғары және ең төмен интерактивтілік көрсеткіштері анықталды [8]. Екіншіден, корреляциялық талдау көмегімен сипаттаманың ұзындығы мен лайк саны, лайк пен пікір арасындағы өзара байланыс есептелді. Pearson және Spearman коэффициенттері қолданыла отырып, контент сипаттамалары мен аудитория реакциясы арасындағы тәуелділік деңгейі анықталды (Сурет 2).

Дәлдік (Accuracy): 100.00%

Классификация есебі:

	precision	recall	f1-score	support
0	1.00	1.00	1.00	17
1	1.00	1.00	1.00	2
accuracy			1.00	19
macro avg	1.00	1.00	1.00	19
weighted avg	1.00	1.00	1.00	19

Сурет 2. Random Forest классификаторын құру.

Үшіншіден, сезімдік талдау (sentiment analysis) жүргізілді. Бұл үшін TextBlob және VADER сияқты Python кітапханалары пайдаланылып, Instagram және Facebook посттарындағы мәтіндерден эмоционалдық реңктер анықталды. Әр постқа оң, теріс немесе бейтарап тоналдылық көрсеткіші тағайындалды. Бұл тәсіл университеттің қандай мазмұнмен аудиторияда жағымды әсер қалдыратынын бағалауға мүмкіндік берді.

Аталған әдістер нәтижесінде әлеуметтік желілердегі контенттің құрылымы мен эмоционалдық әсері сандық көрсеткіштер негізінде бағаланды. Бұл университеттің имиджін қалыптастыруда қай бағыттағы контент тиімді екенін анықтауға мүмкіндік берді [9].

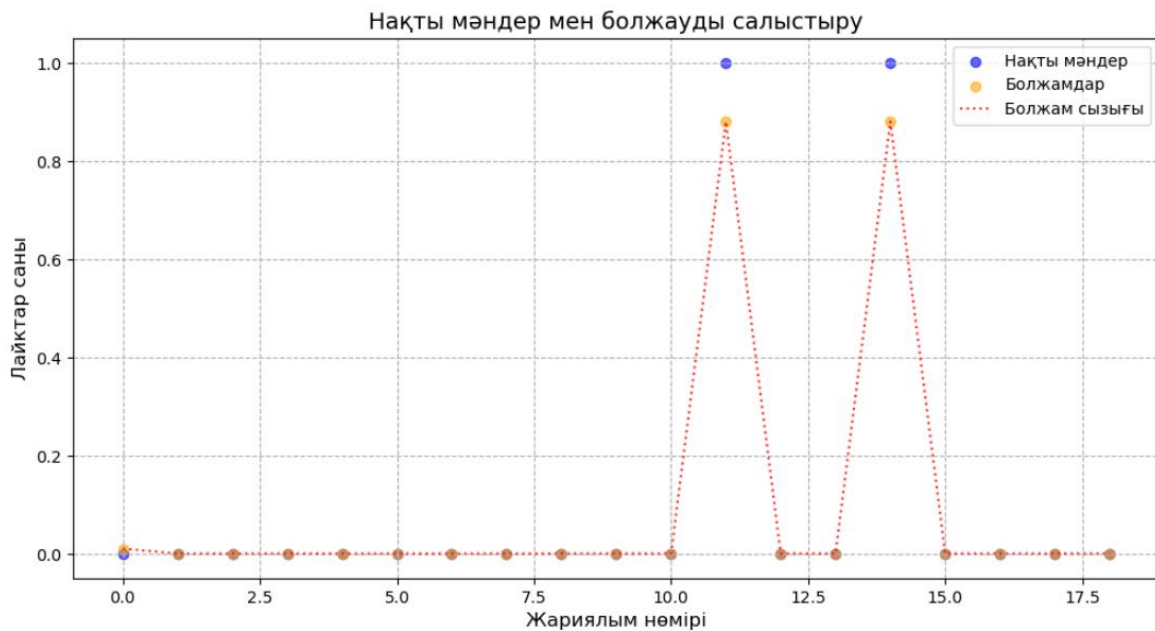
Нәтижелері және оларды талқылау

Зерттеу барысында Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің Instagram, Facebook және YouTube платформаларындағы 2022 жылдың қаңтарынан 2025 жылдың маусымына дейінгі аралықтағы жарияланымдары талданды. Жасанды интеллект құралдары арқылы 500-ден астам жазба сараланып, олардың мазмұндық сипаты, интерактивтілік деңгейі және аудиториямен өзара байланысы бойынша кешенді талдау жүргізілді. Талдау нәтижелері университеттің әлеуметтік желілердегі имиджін қалыптастыруда қолданылатын контенттің қандай ерекшеліктерге ие екенін, аудиторияның белсенділігін және эмоционалдық реакцияларын көрсетуге мүмкіндік берді [10].

Контент белсенділігінің динамикасы

Посттардың жариялану жиілігі жылдар бойынша салыстырмалы түрде өскен. 2022 жылы әр айда орта есеппен 6–8 жазба жарияланған болса, 2023 жылы бұл көрсеткіш 12–15-ке дейін жеткен. 2024 жылдың алғашқы жартысында тұрақтылық сақталып, айына 10–13 пост тұрақты түрде жарияланған. Белсенділік жоғары болған кезеңдер – қыркүйек, қазан және қараша айлары. Бұл – оқу жылының басталу кезеңімен сәйкес келеді. Ең төменгі

белсенділік қаңтар және шілде айларына тиесілі, бұл академиялық каникул кезеңімен түсіндіріледі (Сурет 3).



Сурет 3. Нақты мәндер мен болжауды салыстыру.

Instagram платформасында посттар тұрақты және жиі жарияланып отырған. Facebook-тағы белсенділік салыстырмалы түрде төмен, алайда ондағы посттар ақпараттық сипатта, ресми мазмұнға жақын. YouTube платформасында негізінен іс-шаралар, лекциялар және танымдық роликтер жарияланған. Ондағы посттар саны Instagram-мен салыстырғанда аз болғанымен, бір бейненің көрілім саны жоғары болған.

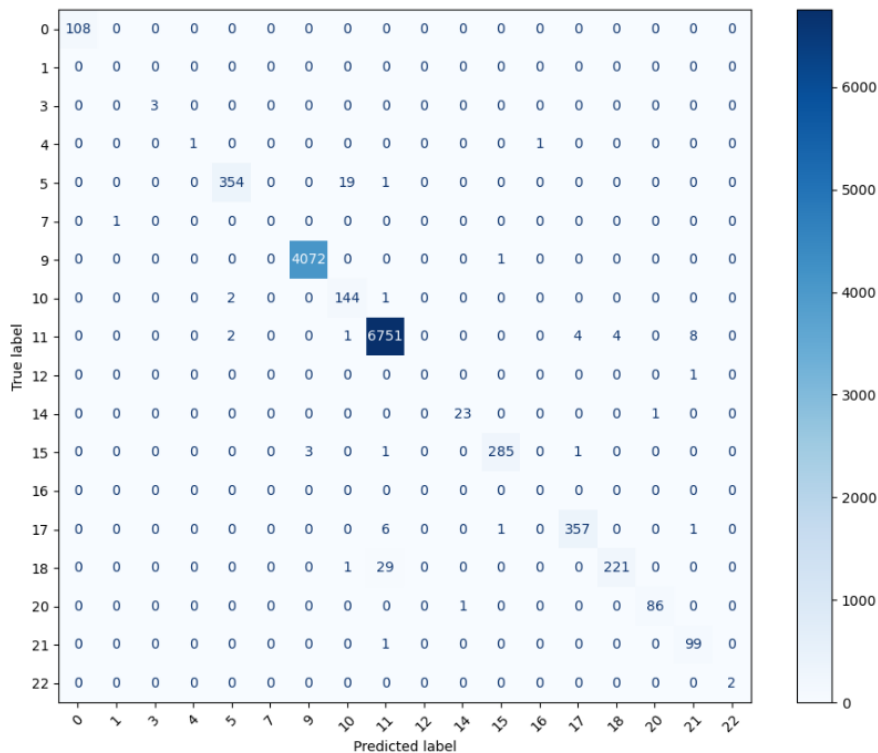
Аудитория реакциясының сипаты

Пайдаланушылардың контентке берген реакцияларын талдау нәтижесінде Instagram желісінде лайк пен пікір жазу белсенділігі айтарлықтай жоғары екені анықталды. Орташа алғанда бір постқа 700–800 лайк, 10–15 пікір тіркелген. Facebook платформасында лайктар саны орта есеппен 200–250 шамасында, пікір саны 3–5-тен аспаған. YouTube желісіндегі бейнелерге жазылған пікірлер саны аз болғанымен, қаралымдар саны мен бейнеге деген қызығушылық айтарлықтай жоғары: бір бейне орта есеппен 1500–2500 қаралым жинаған.

Реакциялар мазмұн түріне байланысты өзгеріп отырған. Университеттің жетістіктері, студенттердің өмірінен алынған кадрлар, халықаралық іс-шаралар мен мотивациялық жазбалар аудитория тарапынан жақсы қабылданып, көбірек реакция жинаған. Ал техникалық хабарламалар, ресми ескертулер мен құрылымдық ақпараттар төмен деңгейде қабылданған [11].

Контент сипаттамалары мен реакция арасындағы байланыс

Сипаттамалық талдаудан кейін жазбалардағы мәтін көлемі (сипаттама ұзындығы) мен реакция деңгейі арасында статистикалық байланыс бар-жоғы қарастырылды. Pearson корреляция коэффициенті ≈ 0.32 шамасында болып, бұл көрсеткіш мазмұн ұзындығы мен лайк саны арасында әлсіз, бірақ оң бағыттағы байланыс бар екенін көрсетті. Демек, ұзақ әрі мазмұнды сипаттамалар жазбаның танымалдығын арттыруы мүмкін, бірақ ол жалғыз әсер етуші фактор емес (Сурет 4).



Сурет 4. Контент сипаттамалары мен реакция арасындағы байланыс.

Сондай-ақ визуалды мазмұнның рөлі ерекше байқалды. Сурет немесе бейне қоса берілген посттар лайк пен пікір жинау жағынан әлдеқайда жоғары көрсеткіш көрсетті. Бұл әлеуметтік желілердегі аудиторияның визуалға тез жауап қайтаратынын және имидж қалыптастыруда визуалды контенттің шешуші рөл атқаратынын білдіреді.

Сезімдік талдау нәтижелері

Жазбалардың эмоционалдық бағытын анықтау мақсатында сезімдік талдау жүргізілді. Instagram мен Facebook жазбаларының мәтіндері Python тіліндегі TextBlob және VADER кітапханалары арқылы өңделіп, әр постқа эмоциялық реңк (тоналдылық) тағайындалды. Нәтижесінде жазбалардың 68 пайызы оң тонда жазылған, 28 пайызы бейтарап, ал тек 4 пайызы теріс тоналдылықта болған [12].

Оң реңктегі посттарға негізінен мотивациялық жазбалар, жетістіктер мен құттықтаулар, шаралардан түсірілген сәттер жатты. Теріс реңктегі жазбалар өте аз және көбіне техникалық сипаттағы ескертулермен байланысты болды (мысалы, сабақ кестесінің өзгеруі, жүйелік үзілістер туралы хабарламалар). Бұл университеттің әлеуметтік желілердегі мазмұнының аудиторияға жағымды әсер қалдыруға бағытталғанын және позитивті имиджді қалыптастыруға басымдық берілетінін көрсетеді [13].

Қорытынды

Зерттеу нәтижелері Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің әлеуметтік желілердегі имиджінің жасанды интеллект құралдары арқылы талдануы білім беру ұйымдарының цифрлық кеңістіктегі беделін бағалаудың жаңа әдістерін ұсынуға мүмкіндік беретінін көрсетті. Университеттің 2022–2025 жылдар аралығындағы Instagram, Facebook және YouTube платформаларындағы жарияланымдары контент мазмұны, құрылымы және аудиториямен өзара байланысы тұрғысынан жан-жақты талданды.

Жиналған деректерге сүйене отырып, университеттің әлеуметтік желілердегі белсенділігі жылдан жылға артып келе жатқаны, жарияланым мазмұнының негізінен ресми және жағымды сипатта екені белгілі болды. Аудитория тарапынан берілген реакциялар —

лайк пен комментарий саны — мазмұнның түріне, визуалдың сапасына және жариялану уақытына тікелей байланысты. Визуалды мазмұнмен күшейтілген жазбалар жоғары интерактивтілікке ие болып, аудиториямен тиімді байланыс орнатуға ықпал еткені байқалды.

Сондай-ақ, сезімдік талдау нәтижелері университеттің әлеуметтік медиа контентінің басым бөлігі жағымды эмоционалдық реңкке ие екенін көрсетті. Бұл университеттің өз аудиториясымен сенімді және позитивті байланыс орнатуға бағытталған саналы стратегиясын көрсетеді. Мәтін ұзындығы мен реакция деңгейі арасында әлсіз оң байланыс байқалғанымен, ең бастысы — контенттің мазмұндылығы мен визуалды сапасы аудиторияның назарын аударуда шешуші рөл атқарады [14].

Жасанды интеллект әдістерін қолдану арқылы әлеуметтік желідегі деректерді құрылымдап, жүйелі түрде сараптау университеттердің цифрлық имиджін ғылыми негізде бағалауға мүмкіндік береді. Бұл тәсіл тек жағдайды сипаттап қана қоймай, нақты шешім қабылдауға, контент стратегиясын жетілдіруге және мақсатты аудиториямен тиімді коммуникация орнатуға негіз болады.

Болашақта бұл зерттеуді кеңейту мақсатында басқа әлеуметтік платформалар (мысалы, TikTok, LinkedIn), видео контентке терең мазмұндық талдау жүргізу және қолданушылар пікірін мәтіндік деңгейде жіктеу бағыттарында қосымша жұмыстар жүргізуге болады. Сонымен қатар, әр жазбаның жарияланғаннан кейінгі нақты таралу жылдамдығы, репост саны, охват көрсеткіштері де университеттің цифрлық әсерін толық бағалауға көмектеседі [15].

Жалпы алғанда, бұл зерттеу әлеуметтік желілердегі белсенділіктің университет имиджіне әсерін ғылыми-тәжірибелік тұрғыдан бағалау үшін пайдалы әдіс ұсынды және болашақта жоғары оқу орындарының сандық коммуникация стратегиясын жетілдіруге бағытталған нақты ұсыныстар негізін қалады.

Әдебиеттер тізімі

1. Kietzmann, J. H., Hermkens, K., McCarthy, I. P., & Silvestre, B. S. (2011). Social media? Get serious! Understanding the functional building blocks of social media. *Business Horizons*, 54(3), 241–251.
2. Kaplan, A. M., & Haenlein, M. (2010). Users of the world, unite! The challenges and opportunities of social media. *Business Horizons*, 53(1), 59–68.
3. Chen, H., Chiang, R. H. L., & Storey, V. C. (2012). Business intelligence and analytics: From big data to big impact. *MIS Quarterly*, 36(4), 1165–1188.
4. Soboleva, M., & Frolova, E. (2020). Social media as a tool of university marketing: A content analysis approach. *International Journal of Educational Management*, 34(7), 1171–1187.
5. Saura, J. R., Palos-Sanchez, P. R., & Correia, M. B. (2019). Digital marketing strategies based on the e-business model: Literature review and future directions. *International Journal of Information Management*, 49, 132–144.
6. Ahmed, S., & Lugmayr, A. (2020). Social media big data analytics: A survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 53(3), 1–37.
7. Pang, B., & Lee, L. (2008). Opinion mining and sentiment analysis. *Foundations and Trends® in Information Retrieval*, 2(1–2), 1–135.
8. Alalwan, A. A., Rana, N. P., Dwivedi, Y. K., & Algharabat, R. (2017). Social media in marketing: A review and analysis of the existing literature. *Telematics and Informatics*, 34(7), 1177–1190.
9. Dwivedi, Y. K., Ismagilova, E., Hughes, D. L., Carlson, J., Filieri, R., Jacobson, J., ... & Wang, Y. (2021). Setting the future of digital and social media marketing research: Perspectives and research propositions. *International Journal of Information Management*, 59, 102168.
10. Zeng, D., Chen, H., Lusch, R., & Li, S. (2010). Social media analytics and intelligence. *IEEE Intelligent Systems*, 25(6), 13–16.
11. Sloan, L., & Quan-Haase, A. (Eds.). (2017). *The SAGE handbook of social media research methods*. SAGE Publications.
12. Kumar, A., & Jaiswal, A. (2021). *Sentiment analysis using Python: Natural language processing with real-life projects*. Apress.
13. Younus, A., Qureshi, M. A., Aslam, M., & Khan, F. (2015). Sentiment analysis and mining of social media content using contemporary tools and techniques. In *2015 IEEE International Conference on Information and Communication Technology (ICICT)* (pp. 1–7). IEEE.

14. Pak, A., & Paroubek, P. (2010). Twitter as a corpus for sentiment analysis and opinion mining. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'10)* (pp. 1320–1326).
15. Gonçalves, P., Araújo, M., Benevenuto, F., & Cha, M. (2013). Comparing and combining sentiment analysis methods. In *Proceedings of the First ACM Conference on Online Social Networks* (pp. 27–38). ACM.

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Жунисов Н. М. – PhD доктор, аға оқытушы, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: nurseit.zhunissov@ayu.edu.kz , https://orcid.org/0000-0001-6531-9408 , +7701 234 88 85
	Zhuniso N. M. - PhD, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: nurseit.zhunissov@ayu.edu.kz , https://orcid.org/0000-0001-6531-9408 , +7701 234 88 85
	Жунисов Н. М. - доктор PhD, старший преподаватель, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: nurseit.zhunissov@ayu.edu.kz , https://orcid.org/0000-0001-6531-9408 , +7701 234 88 85
2	Абушахма А. А. – магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: aktore.abushaxma@gmail.com , +775 698 2560
	Abushakhma A. A. - master student, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: aktore.abushaxma@gmail.com , +775 698 2560
	Абушахма А. А. – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: aktore.abushaxma@gmail.com , +775 698 2560

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА

Усманов К.И.

Зикиш З.А.

ПАНОГРАФ ТИПТЕГІ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР
ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

7-17

Шалхар А.Ә.

Турметов Б.Х.

Қошанова М.Д.

БӨЛШЕК РЕТТІ ШЕКАРАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛАРЫ БАР БЕЙЛОКАЛ
ПОЛИГАРМОНИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕЙБІР ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ
ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

18-35

ФИЗИКА

Измайлов Л.Н.

Сағымбекова Э.С.

Аубакирова Д.М.

Қожахметов Е.А.

НІТІСУ НЕГІЗІНДЕГІ ҰНТАҚТАРДЫ ЖОҒАРҒЫ ЭНЕРГИЯМЕН ҰНТАҚТАУ
АРҚЫЛЫ ІІШІНДІЕСТЕ САҚТАЙТЫН ҚОРЫТПАЛАРДЫ ӘЗІРЛЕУ

36-45

Курбанбеков Ш.Р.

Эртаев Н.С.

Айдарова М.Т.

Қожахметов Е.А.

Амангельдиева Ю.О.

МЕХАНОАКТИВАЦИЯ ТҮРЛЕРІНІҢ ВС ҚОРЫТПАЛАРЫНА ӘСЕРІ

46-59

ИНФОРМАТИКА

Казбекова Г.Н.

Онғар Ә.Ж.

SOBEL ЖӘНЕ CANNY СҮЗГІЛЕРІН САЛЫСТЫРУ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ

60-69

Жунисов Н.М.

Абушахма А.А.

ӘЛЕУМЕТТІК ЖЕЛІЛЕРДЕГІ УНИВЕРСИТЕТ ИМИДЖІНІҢ ҚАЛЫПТАСУЫН ЖИ
ҚҰРАЛДАРЫ АРҚЫЛЫ БАҒАЛАУ

70-77

МАЗМҰНЫ

78-80

CONTENT

MATHEMATICS

Usmanov K.I.

Zikish Z.A.

SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PANTOGRAPH TYPE

7-17

Shalkhar A.A

Turmetov B.Kh.

Koshanova M.D.

ON THE SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A NONLOCAL POLYHARMONIC EQUATION WITH FRACTIONAL-ORDER BOUNDARY OPERATORS

18-35

PHYSICS

Izmailov L.N.

Sagymbekova E.S.

Aubakirova D.M.

Kozhakhmetov Y.A.

DEVELOPMENT OF SHAPE MEMORY ALLOYS USING HIGH ENERGY MILLING OF NITICU BASED POWDERS

36-45

Kurbanbekov Sh.R.

Ertayev N.S.

Aydarova M.T.

Kozhakhmetov E.A.

Amangeldieva Y.O.

INFLUENCE OF TYPES OF MECHANOACTION ON WC ALLOYS

46-59

COMPUTER SCIENCE

Kazbekova G.N.

Ongar A.Zh.

COMPARISON AND APPLICATION OF SOBEL AND CANNY FILTERS

60-69

Zhunisov N. M.

Abushakhma A. A.

ASSESSMENT OF THE FORMATION OF THE IMAGE OF THE UNIVERSITY IN SOCIAL NETWORKS USING AI TOOLS

70-77

CONTENT

78-80

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Усманов К.И.

Зикиш З.А.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО -
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯМ ТИПА ПАНТОГРАФА

7-17

Шалхар А.А.

Турметов Б.Х.

Кошанова М.Д.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО
ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА

18-35

ФИЗИКА

Измайлов Л.Н.

Сагымбекова Э.С.

Аубакирова Д.М.

Кожахметов Е.А.

РАЗРАБОТКА СПЛАВОВ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ, С ПОМОЩЬЮ
ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ПОРОШКОВ НА ОСНОВЕ NiTiCu

36-45

Курбанбеков Ш.Р.

Эртаев Н.С.

Айдарова М.Т.

Кожахметов Е.А.

Амангельдиева Ю.О.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕТАЛЛОВ Pd, Pt
И Rh МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

46-59

ИНФОРМАТИКА

Казбекова Г.Н.

Онғар А.Ж.

СРАВНЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ФИЛЬТРОВ SOBEL И CANNY

60-69

Жунисов Н.М.

Абушахма А.А.

ОЦЕНКА ФОРМИРОВАНИЯ ИМИДЖА УНИВЕРСИТЕТА В СОЦИАЛЬНЫХ
СЕТЯХ СРЕДСТВАМИ ИИ

70-77

СОДЕРЖАНИЕ

78-80

**Қ.А. ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ
ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРЛАРЫ
(МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ)**

Редакцияның мекен-жайы:

*161200, Қазақстан Республикасы, Түркістан қаласы,
Б. Саттарханов даңғылы, 29В, ректорат, 404 бөлме.
Байланыс тетіктері: 8 (725-33) 6-38-26 (19-60) e-mail: ayu-habarlari@ayu.edu.kz*

Ғылыми редакторлар:

Қошанова М.Д., Курбанбеков Ш.Р., Жунисов Н.М.

Жауапты хатшы: Мұсахан Н.П.

Техникалық редактор: Камбарбеков С.Х.

Жарияланған мақала авторларының пікірі редакция көзқарасын білдірмейді.

Мақала мазмұнына автор жауап береді.

Қолжазбалар өңделеді және авторларға қайтарылмайды.

Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары
(математика, физика, информатика сериясы) журналына жарияланған материалдарды
сілтемесіз көшіріп басуға болмайды.

14.07.2025 ж. баспаға жіберілді

*Журнал Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің
«Тұран» баспаханасында көбейтілді.*

Қағаздың пішімі: 70x100. Қағазы офсеттік А4.

Офсеттік басылым. Шартты баспа табағы 6.

Таралымы 110 дана. Тапсырыс 145.