ISSN 2524-0080
Ғылыми журнал

Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің

ХАБАРЛАРЫ

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА,
ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesinin

HABERLERİ

MATEMATİK, FİZİK, BİLİŞİM SERİSİ

ИЗВЕСТИЯ

Международного казахско-турецкого университета имени Х.А. Ясави

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА,
ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

NEWS

Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University

MATHEMATICS, PHYSICS,
COMPUTER SCIENCE SERIES

www.ayu.edu.kz №3 (26), 2023

ISSN 2524-0080
Ғылыми журнал

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің

ХАБАРЛАРЫ

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesinin

HABERLERİ

MATEMATİK, FİZİK, BİLİŞİM SERİSİ

ИЗВЕСТИЯ

Международного казахско-турецкого университета имени Ходжа Ахмеда Ясави

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА

NEWS

Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University

MATHEMATICS, PHYSICS, COMPUTER SCIENCE SERIES

Қазақстан Республикасы Инвестициялар және даму министрлігінің Байланыс, ақпараттандыру және ақпарат комитетінде 04.12.2015 ж. тіркелді, куәлік №15721-Ж.

Қазақстан Республикасы Ақпарат және коммуникациялар министрлігінің Байланыс, ақпараттандыру және бұқаралық ақпарат құралдары саласындағы мемлекеттік бақылау комитетінде 10.03.2017 ж. қайта тіркелген, куәлік №16387-Ж.
Жылына 4 рет шығарылады.

Ғылыми басылым
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары (математика, физика, информатика сериясы) ***№3 (26) 2023 ж.***

Журнал 2016 жылдың мамыр айының 30 жұлдызынан бастап Париж қаласындағы ISSN орталығында тіркелген.

Редакцияның мекен-жайы:
Редакцияның мекен-жайы: 161200, Қазақстан Республикасы, Түркістан қаласы, Б. Саттарханов даңғылы, 29В, ректорат, 404 бөлме.
Байланыс телефондары: 8(725-33)6-38-26(19-60)
e-mail:ayu-habarlari@ayu.edu.kz

РЕДАКЦИЯЛЫҚ АЛҚА МҮШЕЛЕРІ

МАТЕМАТИКА

ӘОЖ 517.954;
МҒТАР 27.31.44
https://doi.org/10.47526/2023-3/2524-0080.01

Б.Х.ТУРМЕТОВ[1], З.Н.БАЙМЕТОВА[2]
[1]*физика-математика ғылымдарының докторы, профессор*
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті
(Қазақстан, Түркістан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2]*Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты,*
(Қазақстан, Түркістан), E-mail: zilola.baimetova@ayu.edu.kz

ЕРЕКШЕЛІГІ БАР ИНТЕГРАЛДЫҚ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ШЕШІМІН ҚҰРУДЫҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа. Бұл жұмыста бөлшек ретті интеграл және туындының жаңа кластары қарастырылады. Бұл операторлар әйгілі Риман-Лиувилл интегралы, туындысы және Капуто туындысының жалпыламалары болып табылады. Мақалада бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық әдісі қарастырылады. Бұл әдіс интегралдық және дифференциалдық операторларға қатысты нормаланған жүйелерді құруға негізделген. Нормаланған жүйені құру алгоритмі төрт қадамда беріледі. Бұл әдіс алдымен тұрақты коэффициентті сызықтық интегралдық теңдеудің шешімін құру үшін қолданылады. Қарастырылатын интегралдық теңдеудің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теорема дәлелденеді. Шешімнің айқын түрі анықталады және ол мультивариантты Миттаг-Леффлер түріндегі функция арқылы өрнектелуі көрсетіледі. Мақаланың кейінгі бөлімдерінде біртекті және біртекті емес бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі табылады. Бұл шешімдер айқын түрде анықталып, олар мультивариантты Миттаг-Леффлер түріндегі функция арқылы өрнектеледі.

Түйін сөздер: бөлшек ретті интеграл, бөлшек туынды, интегралдық теңдеу, дифференциалдық теңдеу, нормаланған жүйе, операторлық әдіс, айқын шешім, Миттаг-Леффлер түріндегі функция.

Б.Х.Турметов[1] , З.Н.Байметова[2] ,
[1]*доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави*
(Казахстан, Туркестан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2]*магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави*
(Казахстан, Туркестан),E-mail: zilola.baimetova@ayu.edu.kz

Об операторном методе построения решения интегральных и дифференциальных уравнений с особеностью

Абстракт. В настоящей работе рассматриваются новые классы дробного интеграла и производной. Данные операторы являются обобщениями известных интегралов и производной Римана-Лиувилля и производной Капуто. В статье рассматривается операторный метод решения интегральных и дифференциальных уравнений дробного порядка. Данный метод основан на построении нормированных систем относительно интегральных и дифференциальных операторов. Алгоритм построения нормированных систем задается в виде четырех шагов. Данный метод сперва применяется для построения решения линейных интегральных уравнений с постоянными коэффициентами. Доказывается теорема о существовании и единственности решения рассматриваемого интегрального уравнения. Решения определяются в явном виде и показывается их представимость через мультивариантных функции типа Миттаг-Леффлера В последующих разделах статьи находятся общее решение однородных и неоднородных дифференциальных уравнений дробного порядка. Эти решения определяются в явном виде и они представляются через мультивариантных функции типа Миттаг-Леффлера.

Ключевые слова: интеграл дробного порядка, дробная производная, интегральное уравнение, дифференциальное уравнение, нормированная система, операторный метод, явное решение, функция типа Миттаг-Леффлера.

B.Kh. Turmetov[1] , Z.N.Baimetova[2]

[1]doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2]master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: zilola.baimetova@ayu.edu.kz

On an operator method for constructing solutions to integral and differential equations with a singularity

Abstract. In this paper, we consider new classes of fractional integral and derivative. These operators are generalizations of well-known integrals and the Riemann-Liouville derivative and the Caputo derivative. The article considers an operator method for solving integral and differential equations of fractional order. This method is based on the construction of normalized systems with respect to integral and differential operators. The algorithm for constructing normalized systems is given in the form of four steps. This method is first used to construct solutions to linear integral equations with constant coefficients. A theorem on the existence and uniqueness of a solution of the considered integral equation is proved. Solutions are defined explicitly and their representability in terms of multivariant functions of the Mittag-Leffler type is shown. These solutions are defined explicitly and they are represented in terms of multivariant functions of the Mittag-Leffler type.

Keywords: fractional order integral, fractional derivative, integral equation, differential equation, normalized system, operator method, explicit solution, Mittag-Leffler type function.

Кіріспе

Бұл жұмыс ерекшелігі бар бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық әдісін зерттеуге арналған.

Табығаттың көптеген физикалық және химиялық процесстерін, экономикалық және әлеуметтік-биологиялық құбылыстарын математикалық моделдеу бөлшек ретті дифференциалдық және интегралдық теңдеулер арқылы сиппаталады. Бөлшек ретті дифференциалдық және интегралдық теңдеулер теориясының 300 жылдық тарихы бар болғанымен, оны шын мәнісінде құру өткен ғасырдың 60 - жылдарынан басталған. Бұл теорияның қалыптасуына Р.Горенфло, Ф.Майнарды, Х.Шристава, А.Килбас, И.Подлубный, Ю.Лучко және басқа ғалымдар үлкен үлес қосқан. Бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулер теориясы және оның қолданысына қатысты мәліметтерді [1-3] әдебиеттерден алуға болады.

Бұл теорияның маңызды мәселерінен біреуі - бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін құру болып табылады. Осы таңда бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін құрудың интегралдық теңдеуге келтіру [4], біртіндеп жуықтап шешу [5], Грин функциясы әдісі [6], Микусинскийдің операторлық әдісі [7,8], Адомайн әдісі [9] сияқты әдістер жасалынған. Осы әдістермен қатар бүтін ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімін құруға арналған Б.Бондаренконың нормаланған жүйеге негізделген әдісіде бар [10]. Бұл әдістің жалпыламасы В.В.Карачиктің [11,12] жұмыстарында және оның бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулерге бейімделген модификациясы [13-17] жұмыстарда еңгізілген.

Бұл аталған әдістерді тұрақты немесе айнымалы коэффициентті бүтін және бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін құруда қолдануға болады. Бірақ, ерекшелігі бар айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулердің шешімін құруда бұл аталған әдістерді тікелей қолдануға болмайды. Бұл жұмыста Б.Бондаренко әдісінің осы түрдегі теңдеулердің шешімін құруда қолданылатын модификациясын жасалынады. Бұл әдісті қолдану нәтижесінде шешімдері айқын түрде құрылатын бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулердің жаңа кластары анықталады, осыған сәйкес арнайы функциялардың жаңа класстары енгізіледі.

Енді бұл жұмыста қолданылатын интегралдық және дифференциалдық операторлардың анықтамаларды келтірейік. Айталық, $0<a<b<\infty$, $0<\alpha,\beta$ нақты сандары берілген болсын. Келесі белгілеулерді еңгіземіз:

$$ {}_aT^{\alpha} f(x)=(x-a)^{1-\alpha} f'(x), \alpha>0\,,\ {}_a^nT^{\alpha}=\underbrace{{}_aT^{\alpha}\cdot{}_aT^{\alpha}\cdot\ldots\cdot{}_aT^{\alpha}}_{n}, n=1,2,\ldots. $$

Кез-келген $0<\alpha,\beta$ үшін

$$ {}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}},\ {}_a^0J^{\alpha} f(x)\equiv f(x), \tag{1} $$

және кез-келген $0<\alpha, n-1<\beta\le n$ үшін

$$ {}_a^{\beta}D^{\alpha} f(x)=\frac{{}_a^nT^{\alpha}}{\Gamma(n-\beta)}\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-\beta-1} f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}, \tag{2} $$

$$ {}_a^{C\beta}D^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-\beta-1} {}_a^nT^{\alpha} f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}, \tag{3} $$

операторларды қарастырайық.

Бұл операторлар алдымен $\alpha=1$ болған дербес жағдайда 2014 жыл U.N.Katugampola [18] жұмысында еңгізілген және оның кейбір қолданыстары көрсетілген. Жалпы жағдайда бұл операторлар F.Jarad және бірлескен авторлардың [19] жұмысында еңгізілген және осы операторларға қатысты теңдеулер зерттелінген.

(1) – формуламен анықталған операторды $f(x)$ функциясының жалпыланған Риман-Лиувилл мағынасындағы β - ретті интегралы, ал (2) және (3) теңдіктермен анықталған ${}_a^{\beta}D^{\alpha}$ және ${}_a^{C\beta}D^{\alpha}$ операторларын сәйкес түрде жалпыланған Риман-Лиувилл және Капуто мағынасындағы β - ретті туындысы деп атаймыз.

Егер $\alpha = 1$ болса ${}_a^{\beta} J^{\alpha}$ операторы Риман-Лиувиллдің β - ретті интегралы, ал ${}_a^{\beta} D^{\alpha}$, ${}_a^{C\beta} D^{\alpha}$ операторлары Риман-Лиувилл және Капутонің β - ретті туындысымен сәйкес келеді.

${}_a T^{\alpha}$ дифференциалдық оператор ${}_a T^{\alpha} = (x-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt}$ түрінде беріледі және $0 < \alpha$ болғандықтан $x = a$ нүкте бұл оператордың ерекше нүктесі болып табылады. Сол себептен ${}_a^{\beta} D^{\alpha}$, ${}_a^{C\beta} D^{\alpha}$ операторларды ерекшелігі бар бөлшек ретті дифференциалдық операторлар, ал осы операторлар қатысқан теңдеулерді ерекшелігі бар бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер деп атаймыз.

Біз алдағы зерттеуде ${}_a^{\beta} J^{\alpha}$, ${}_a^{\beta} D^{\alpha}$, ${}_a^{C\beta} D^{\alpha}$ операторлары қатысқан интегралдық және дифференциалдық теңдеулерідің шешімін құру әдістерін көрсетеміз.

Бұл әдіс нормаланған жүйелерге негізделген операторлық әдіс деп аталып, оның бастамасы [11] жұмыста баяндалған және бүтін ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімін құруда қолданылған.

[13-17] жұмыстарда бұл әдістің бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімін құруда қолданылатын кейбір модификацияларын жасалған. Бұл жұмыстарда Риман-Лиувил және Капуто туындылары қатысқан бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің айқын шешімдері құрылған. Бұл жұмыстағы зерттеулеріміз осы жұмыстардың жалғасы болып табылады және жалпыланған Риман-Лиувилл және Капуто мағынасындағы операторлар қатысқан бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін айқын түрде табамыз.

2. Тұрақты коэффициентті сызықтық интегралдық теңдеудің шешімін құру

Айталық, m натурал сан, $j = 1, 2, ..., m$ болсын және $a, \lambda_j \in R, 0 < \alpha, \beta_j$ нақты сандары берілсін. $x > a$ аймағында келесі есепті қарастырамыз

1-Есеп. $x > a$ аймағында келесі

$$y(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, {}_a^{\beta_j} J^{\alpha} y(x) = f(x), x > a \tag{4}$$

интегралдық теңдеудің шешімін табу қажет.

Егер E - бірлік оператор болса және $L_1 = E, L_2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, {}_a^{\beta_j} J^{\alpha}$ белгілеулерді еңгізсек, онда (4) – теңдеу

$$\left(L_1 - L_2\right) y(x) = f(x), x > a \tag{5}$$

көрініске келеді.

(5) – теңдеудің шешімін құру үшін нормаланған жүйелерге негізделген операторлық әдісті қолдануға болады. Бұл операторлық әдіс келесі алгоритм бойынша 4 қадамда орындалады:

1-қадам. $L_1 y(x) = f(x)$ бір текті емес теңдеудің барлық сызықты тәуелсіз шешімдерін табамыз және оларды $y_{0,s}(x)$ түрінде белгілейміз;

2-қадам. L_1 операторына оң жақтан кері болған, яғни $L_1 \cdot L_1^{-1} = E$ теңдікті қанағаттандыратын L_1^{-1} операторын табамыз;

3-қадам. Келесі

$$y_{k,s}(x) = \left(L_1^{-1} \cdot L_2\right)^k y_{0,s}(x), k \geq 1$$

формуламен анықталатын $y_{k,s}(x)$ тізбегін құрамыз;

4-қадам. $y_{k,s}(x)$ тізбек арқылы жазылатын

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k,s}(x)$$

функциялар (4) – теңдеудің шешімдері болатынын тексереміз.

Біздің жағдайда $L_1 = E$ - бірлік операторы, ал оған кері болған L_1^{-1} оператор сол бірлік оператордың өзі болады. Белгілеуміз бойынша $L_2 = \lambda \cdot {}_a^{\beta}J^{\alpha}$. Сонда (4) интегралдық теңдеуді (5) түрінде қайта жазуға болады. Жоғарыда келтірілген 4 қадаммен орындалатын алгоритмнің бірінші қадамында $L_1 y(x) = f(x)$ бір текті емес теңдеудің шешімін табу қажет болатын. Біздің жағдайда $L_1 = E$ - бірлік оператор болғандықтан бұл теңдеу үшін

$$L_1 y(x) = f(x) \Leftrightarrow y(x) = f(x).$$

Сонымен $L_1 y(x) = f(x)$ теңдеудің шешімі $f(x)$ функциясының өзі. Оны $y_0(x) = f(x)$ деп белгілейік. Осы функцияға негізделіп құрылған

$$y_k(x) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x), k \geq 1 \tag{6}$$

тізбекті және

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x) \tag{7}$$

қатарды қарастырамыз. (7) - қатардың қосындысы, яғни $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x)$ функциясы (4) – теңдеудің шешімі болатынын көрсетеміз. Шынында да, осы функцияға $L_1 - L_2$ операторын қолданатын болсақ, онда

$$\left(L_1 - L_2\right) y(x) = L_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x) - L_2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^{k+1} y_0(x) =$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^n y_0(x) = f(x).$$

Енді (7) функцияның айқын түрін табайық. Оның үшін (6) тізбекті үйренеміз. $k=1$ болған кезде

$$y_1(x) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha} f(x).$$

Егер $a_1, a_2, ..., a_m$ сандары берілсе жалпыланған биномиал формула бойынша

$$\left(a_1 + a_2 + ... + a_m\right)^k = \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_m=k \\ k_1\geq 0, k_2\geq 0,...,k_m\geq 0}} C\left(k, k_1, ..., k_m\right) a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_m^{k_m} \tag{8}$$

теңдік орынды. Мұнда $C\left(k, k_1, ..., k_m\right) = \dfrac{k!}{k_1! k_2! ... k_m!}$.

(8) – формуланы $\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k$ өрнекке $k \geq 1$ үшін қолданайық. Оның үшін алдымен келесі лемманы дәлелдейміз.

1 - Лемма. Егер $\alpha, \beta, \gamma > 0$ және $f(x) \in L[a,b]$ болса, онда

$${}_a^{\gamma}J^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{\gamma+\beta}J^{\alpha} f(x) \tag{9}$$

теңдік орынды.

Дәлелдеуі. Интегралдық оператордың анықтамасы бойынша

$${}_a^{\gamma}J^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1} {}_a^{\beta}J^{\alpha} f(t) \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1} \int_a^t \left(\frac{(t-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}} \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\tau) \int_{\tau}^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1} \left(\frac{(t-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} \frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}.$$

Соңғы өрнектегі ішкі интегралды I символымен белгілейік, яғни

$$I = \int_{\tau}^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1} \left(\frac{(t-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

болсын. Бұл интегралда

$$\xi = \frac{(t-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}$$

түрінде жаңа айнымалды еңгізсек, онда

$$(t-a)^{\alpha} = (\tau-a)^{\alpha} + \left((x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}\right)\xi\,,$$

$$\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\left((x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}\right)d\xi, t=\tau \to \xi = 0, t = x \to \xi = 1\,,$$

$$\left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{(t-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{\alpha^{1-\beta-\gamma}\left((x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha} - \left((x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}\right)\xi\right)^{\gamma-1}}{\left((\tau-a)^{\alpha} + \left((x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}\right)\xi - (\tau-a)^{\alpha}\right)^{1-\beta}}\left((x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}\right)d\xi =$$

$$= \frac{\alpha^{1-\beta-\gamma}\left((x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}\right)^{\gamma}\left(1-\xi\right)^{\gamma-1}}{\left((x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}\right)^{1-\beta}\xi^{1-\beta}}d\xi = \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}\left(1-\xi\right)^{\gamma-1}\xi^{\beta-1}d\xi\,.$$

Бұл еептеулерден I интегралы үшін

$$I = \int_0^1 \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}\left(1-\xi\right)^{\gamma-1}\xi^{\beta-1}d\xi =$$

$$= \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}\int_0^1 \left(1-\xi\right)^{\gamma-1}\xi^{\beta-1}d\xi = \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\gamma)}$$

нәтиже келіп шығады.

Олай болса

$${}_a^{\gamma}J^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha}f(x)\right) = \frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}\,.$$

Соңғы өрнек анықтама бойынша $f(x)$ функциясының ${}_a^{\beta+\gamma}J^{\alpha}f(x)$ интегралы. Осымен лемма толық дәлелденді.

Осы лемма нәтижесін, яғни (9) – теңдікті ${}_a^{\beta_p}J^{\alpha}$ және ${}_a^{\beta_q}J^{\alpha}$ операторлары үшін қолдансақ, онда

$${}_a^{\beta_p}J^{\alpha} \cdot {}_a^{\beta_q}J^{\alpha} = {}_a^{\beta_p+\beta_q}J^{\alpha}$$

теңдік орынды. Бұдан

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \,{}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k = \sum_{k_1+k_2+...+k_m=k} C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\,{}_a^{k_1\beta_1}J^{\alpha}\,{}_a^{k_2\beta_2}J^{\alpha}...{}_a^{k_m\beta_m}J^{\alpha} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+...+k_m=k} C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\,{}_a^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m}J^{\alpha} .$$

Олай болса, (7) – формуламен анықталған қатар үшін

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \,{}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k = \left(k \to n+1\right) = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \,{}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^{n+1} =$$

$$= f(x) + \left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \,{}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \,{}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k =$$

$$= f(x) + \left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \,{}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k} C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\,{}_a^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m}J^{\alpha} y_0(x)\right) =$$

$$= f(x) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j \left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k} C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\,{}_a^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j}J^{\alpha} y_0(x)\right).$$

Соңғы өрнекте дөңгелек жақша ішіндегі қосындыны зерттейік. Интегралдық оператордың анықтамасы бойынша келесі

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k} C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\,{}_a^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j}J^{\alpha} y_0(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k} \frac{C\left(k,k_1,k_2,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}}{\Gamma\left(k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j\right)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j-1} f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

$$= \int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta_j-1} P\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right) f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

теңдік орынды.

Мұнда

$$P\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k} \frac{C\left(k,k_1,k_2,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}}{\Gamma\left(k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j\right)}\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m}$$

Егер [20] жұмыста еңгізілген көп аргументті Миттаг-Леффлер түріндегі

$$E_{(a_1,a_2,...,a_m),b}\left(z_1,z_2,...,z_m\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k}C\left(k,k_1,k_2,...,k_m\right)\frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}...z_m^{k_m}}{\Gamma\left(b+a_1k_1+a_2k_2+...+a_mk_m\right)}$$

функцияны қолдансақ, онда

$$P(x)=E_{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m),\beta_j}\left(x^{\beta_1},x^{\beta_2},...,x^{\beta_m}\right).$$

Сонымен біз келесі нәтижені алдық.

1- Теорема. Егер $f(x)\in C[a,b]$ болса, онда (4) – теңдеудің шешімі бар, жалғыз және

$$y(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\int_a^x\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta_j-1}P\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

түрінде өрнектеледі. Бұл жерде

$$P\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)=$$

$$=E_{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m),\beta_j}\left(\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta_1},\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta_2},...,\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta_m}\right).$$

1-Салдары. Егер 1-Есепте $\alpha=1$ болса, онда бұл есептің шешімі

$$y(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\int_a^x\left(x-t\right)^{\beta_j-1}E_{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m),\beta_j}\left(\left(x-t\right)^{\beta_1},\left(x-t\right)^{\beta_2},...,\left(x-t\right)^{\beta_m}\right)f(t)dt$$

түрінде өрнектеледі.

Бұл нәтиже [21] жұмыста дәлелденген.

3. Жалпыланған Риман- Лиувилл туындысы қатысқан сызықтық бөлшек ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін құру

Бұл бөлімде біз жалпыланған Риман- Лиувилл туындысы қатысқан бөлшек ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін құру мәселесін қарастырамыз.

Айталық $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ нақты сандар және $0<\alpha, n-1<\beta\le n, n=1,2,...$ берілсін. $x>a$ аймағында келесі

$$ {}_a^{\beta}D^{\alpha}y(x)-a_{n-1}\cdot{}_a^{\beta-1}D^{\alpha}y(x)-...-a_1\cdot{}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha}y(x)-a_0y(x)=0 \qquad (10)$$

теңдеуді қарастырайық.

Бұл теңдеудің шешімін құру үшін s параметрдің $s=\beta-j, 1\le j\le n$ мәндеріне сәйкес келетін келесі

$$f_{k,s}(x)=\frac{x^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma(\beta k+s+1)},k\ge 0 \tag{11}$$

функциялардың жүйесін қарастырамыз.

Бұл жүйенің қасиеттерін зерттеу үшін алдымен келесі тұжырымды дәлелдейміз.

2-Лемма. Егер $f(x)=(x-a)^{\alpha\mu},\mu>n-1$ болса, онда

$$\left({}_a^\beta D^\alpha (t-a)^{\alpha\mu}\right)(x)=\alpha^\beta\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\beta)}(x-a)^{\alpha(\mu-\beta)},\mu>n-1, \tag{12}$$

Дәлеледуі. Егер $\beta=n$ - бүтін сан болса, онда ${}_a^\beta D^\alpha f(x)={}_a^n T^\alpha$. Сол себептен $s>n-1$ үшін

$${}_a^n T^\alpha (x-a)^{\alpha\mu}={}_a^{n-1}T^\alpha\left((x-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dx}(t-a)^{\alpha\mu}\right)=\alpha\mu\cdot{}_a^{n-1}T^\alpha\left((x-a)^{\alpha\mu-\alpha}\right)=$$

$$=...=\alpha\mu\cdot\alpha(\mu-1)\cdot...\cdot\alpha(\mu-n+1)(x-a)^{\alpha(\mu-n)}=\alpha^n\mu\cdot(\mu-1)\cdot...\cdot(\mu-n+1)(x-a)^{\alpha(\mu-n)}=$$

$$=\alpha^n\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-n)}(x-a)^{\alpha(\mu-n)}.$$

Айталық, $n-1<\beta<n,n=1,2,...$болсын. Онда ${}_a^\beta D^\alpha$ операторының анықтамасы бойынша

$${}_a^\beta D^\alpha f(x)={}_a^n T^\alpha\left({}_a^{n-\beta}J^\alpha(t-a)^{\alpha\mu}\right)(x)={}_a^n T^\alpha\left(\frac{1}{\alpha^{n-\beta}}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+n-\beta)}(x-a)^{\alpha(\mu+n-\beta)}\right)=$$

$$={}_a^n T^\alpha\left(\frac{1}{\alpha^{n-\beta}}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+n-\beta)}(x-a)^{\alpha(\mu+n-\beta)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha^{n-\beta}}\frac{\Gamma(\mu+1)\alpha^n(\mu+n-\beta)...(\mu+1-\beta)}{\Gamma(\mu+1+n-\beta)}(x-a)^{\alpha(\mu-\beta)}=\alpha^\beta\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\beta)}(x-a)^{\alpha(\mu-\beta)}.$$

(12) – теңдік дәлелденді.

3-Лемма. Егер $0<\alpha,n-1<\beta\le n,n=1,2,...$ және s параметр $s=\beta-j,1\le j\le n$ мәндерді қабылдаса, онда (11) формуламен анықталған $f_{k,s}(x)$ функциялар жүйесі үшін $x>a$ облысында

$${}_a^\beta D^\alpha f_{0,s}(x)=0,\ {}_a^\beta D^\alpha f_{k,s}(x)=f_{k-1,s}(x),$$

теңдіктер орындалады.

Дәлелдеуі. Егер $s\in\{\beta-1,\beta-2,...,\beta-n\}$ болса ${}_a^\beta D^\alpha f_{0,s}(x)=0$ теңдігі болатынын көрсету қиын емес. Енді ${}_{a}^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x) = f_{k-1,s}(x)$ теңдікті дәлелдейік. ${}_{a}^{\beta}D^{\alpha}$ операторының анықтамасы бойынша

$$ {}_{a}^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x) = {}_{a}^{n}T^{\alpha}\left[{}_{a}^{n-\beta}J^{\alpha} f_{k,s}(x)\right] = {}_{a}^{n}T^{\alpha}\left[{}_{a}^{n-\beta}J^{\alpha} \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right]. $$

Тік жақша ішіндегі өрнекті зерттейік:

$$ {}_{a}^{n-\beta}J^{\alpha} \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)} = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_{a}^{x}\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-\beta-1} \frac{(t-a)^{\alpha(\beta k+s)}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta-1)+\alpha\beta k+\alpha s+\alpha}}{\alpha^{n-\beta}\Gamma(n-\beta)}\int_{a}^{x}\left(1-\xi\right)^{n-\beta-1}\xi^{\beta k+s}d\xi = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{n-\beta}\Gamma(n-\beta)}\frac{\Gamma(n-\beta)\Gamma(\beta k+s+1)}{\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)} = \frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{n}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)}. $$

Бұдан

$$ {}_{a}^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x) = {}_{a}^{n}T^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)}\right] = $$

$$ = {}_{a}^{n-1}T^{\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)}\right] = $$

$$ = {}_{a}^{n-1}T^{\alpha}\left[\frac{\left(\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s\right)(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s-\alpha}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)}\right] = \ldots = $$

$$ = \frac{\left(\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s\right)\ldots\left(\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s-(n-1)\alpha\right)(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s-n\alpha}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)} = $$

$$ = \frac{\alpha^{n}\left(\beta k+s+n-\beta\right)\ldots\left(\beta k+s+1-\beta\right)(x-a)^{\alpha\beta(k-1)+\alpha s}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)} = $$

$$ = \frac{(x-a)^{\alpha\beta(k-1)+\alpha s}}{\alpha^{(k-1)\beta}\Gamma\left(\beta(k-1)+s+1-\beta\right)} = f_{k-1,s}(x). $$

Лемма дәлелденді.

4 - Лемма. Егер $0<\alpha, n-1<\beta\le n, n=1,2,\ldots$ және s параметр $s=\beta-j, 1\le j\le n$ мәндерді қабылдаса, онда (11) формуламен анықталған $f_{k,s}(x)$ функциялар жүйесі үшін $x>a$ облысында

$$ {}_a^{\beta}D^{\alpha}\ {}_a^{\beta-m}D^{\alpha} f_{k,s}(x) = {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\ {}_a^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x), m=1,2,...,n-1 \qquad (13) $$

теңдіктер орындалады.

Дәлелдеуі. $\beta_m = \beta - m, m=1,2,...,n$ деп белгілейікте (13)-теңдіктің сол жағын есептейік. Егер ${}_a^{\beta-m}D^{\alpha} f_{k,s}(x) \neq 0$ болса, онда сол жақтағы өрнек үшін

$$ {}_a^{\beta}D^{\alpha}\ {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\left[\frac{x^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right] = {}_a^{\beta}D^{\alpha}\left[\alpha^{\beta-m}\frac{\Gamma(\beta k+s+1)}{\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m)}\frac{x^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha(\beta-m)}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right] = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta+m-\beta}\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m)}\ {}_a^{\beta}D^{\alpha}\left[(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha(\beta-m)}\right] = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta+m-\beta}\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m)}\alpha^{\beta}\frac{\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m)}{\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m-\beta)}(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha(\beta-m)-\alpha\beta} = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta+m-2\beta}}\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha(\beta-m)-\alpha\beta}}{\Gamma\left(\beta k+s+1-(\beta-m)-\beta\right)}. $$

Осы сияқты ${}_a^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x) \neq 0$ болса, онда оң жақтағы өрнек үшін

$$ {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\ {}_a^{\beta}D^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right] = {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\left[\alpha^{\beta}\frac{\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}{\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta\right)}\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha\beta}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right] = $$

$$ = \alpha^{\beta}\frac{\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}{\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta\right)}\frac{1}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\ {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\left[(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha\beta}\right] = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta-\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta\right)}\alpha^{\beta-m}\frac{\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta\right)}{\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta-\beta+m\right)}(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha\beta-\beta+m} = $$

$$ = \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha\beta-\beta+m}}{\alpha^{k\beta+m-2\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta-\beta+m\right)}. $$

Демек, осы жағдайда (13) теңдік орынды. Қалған жағдайлар осы сияқты тексеріледі. Лемма дәлелденді.

Енді келесі

$$ y_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + ... + a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0\right)^k \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)} \qquad (14) $$

түрде берілген n функцияларды қарастырайық. Мұндағы $s=\beta-j, 1\le j\le n$.

Алдымен (14) формуламен анықталған $y_s(x)$ функциялары (10) – теңдеудің шешімі болатынын көрсетейік. Егер бұл функцияға операторын қолдансақ, онда (14) теңдіктер және

4-Лемманың нәтижесі бойынша

$$ {}_a^{\beta}D^{\alpha} y_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0 \right)^k {}_a^{\beta}D^{\alpha} \left[\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)} \right] = $$

$$ = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0 \right)^k \frac{(x-a)^{\alpha\beta(k-1)+\alpha s}}{\alpha^{(k-1)\beta}\Gamma\left(\beta(k-1)+s+1\right)} = $$

$$ = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0 \right)^k \frac{(x-a)^{\alpha\beta(k-1)+\alpha s}}{\alpha^{(k-1)\beta}\Gamma\left(\beta(k-1)+s+1\right)} = $$

$$ = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0 \right)^{k+1} \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)} = $$

$$ = \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0 \right) y_s(x) . $$

Сонымен

$$ {}_a^{\beta}D^{\alpha} y_s(x) = \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0 \right) y_s(x) . $$

Ал бұл теңдік (10) теңдеумен пара-пар.

Енді $\left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0 \right)^k$ түрдегі операторларды жалпыланған биномиал формуладан пайдаланып ықшамдаймыз. Егер $\beta - j = \beta_j, 1 \le j \le n$ деп белгілесек, онда жалпыланған биномиал формула бойынша

$$ \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0 \right)^k \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)} = $$

$$ = \sum_{k_0+\ldots+k_{n-1}=k} \frac{k!}{k_0! \cdot \ldots \cdot k_{n-1}!} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^{k_{n-1}} \; {}_a^{k_1\beta_1}D^{\alpha} \cdot \ldots \cdot {}_a^{k_{n-1}\beta_{n-1}} D^{\alpha} \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)} = $$

$$ = \sum_{k_0+\ldots+k_{n-1}=k} \frac{k!}{k_0! \cdot \ldots \cdot k_{n-1}!} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^{k_{n-1}} \; {}_a^{k_1\beta_1+\ldots+k_{n-1}\beta_{n-1}}D^{\alpha} \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)} = $$

$$ = \sum_{k_0+\ldots+k_{n-1}=k} \frac{k!}{k_0! \cdot \ldots \cdot k_{n-1}!} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^{k_{n-1}} \frac{(x-a)^{\alpha\beta k-\alpha k_1\beta_1-\ldots-\alpha k_{n-1}\beta_{n-1}+\alpha s}}{\alpha^{k\beta-(k_1\beta_1+\ldots+k_{n-1}\beta_{n-1})}\Gamma\left(\beta k+s+1-k_1\beta_1-\ldots-k_{n-1}\beta_{n-1}\right)} $$

Бұл нәтижені (14) формулаға қойсақ

$$ y_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_0+\ldots+k_{n-1}=k} \frac{k!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_1!} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^{k_{n-1}} \frac{(x-a)^{\alpha\beta k-\alpha k_1\beta_1-\ldots-\alpha k_{n-1}\beta_{n-1}+\alpha s}}{\alpha^{k\beta-(k_1\beta_1+\ldots+k_{n-1}\beta_{n-1})}\Gamma\left(\beta k+s+1-k_1\beta_1-\ldots-k_{n-1}\beta_{n-1}\right)} . $$

Белгілеуіміз бойынша $\beta_j = \beta - j$, $\alpha\beta k = \alpha\left(\beta k_0 + \beta k_1 + ... + \beta k_{n-1}\right)$ және

$$\alpha\beta k - \alpha k_1\beta_1 - ... - \alpha k_{n-1}\beta_{n-1} = \alpha\left(\beta k_0 + (\beta-\beta_1)k_1 + ... + (\beta-\beta_{n-1})k_{n-1}\right) =$$

$$= \alpha\left(\beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}\right).$$

Осы теңдіктерді ескерсек, онда

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_0+...+k_{n-1}=k} \frac{k!}{k_1! \cdot ... \cdot k_1!} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_{n-1}^{k_{n-1}} \frac{x^{\alpha\beta k_0 + \alpha k_1 + ... + \alpha(n-1)k_{n-1} + \alpha s}}{\alpha^{k\beta - (k_1\beta_1 + ... + k_{n-1}\beta_{n-1})}\Gamma\left(s+1+\beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_0+...+k_{n-1}=k} \frac{k!}{k_1! \cdot ... \cdot k_1!} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_{n-1}^{k_{n-1}} \frac{(x-a)^{\alpha(\beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}) + \alpha s}}{\alpha^{\beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}}\Gamma\left(s+1+\beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}\right)}.$$

Егер

$$E_{(\mu_1,\mu_2,...,\mu_m),b}(z_1, z_2, ..., z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+...+k_m=k} \frac{k!}{k_1! \cdot ... \cdot k_m!} \frac{z_1^{k_1} \cdot ... \cdot z_m^{k_m}}{\Gamma(b + \mu_1 k_1 + ... + \mu_m k_m)}$$

түріндегі көп индексті Миттаг-Леффлер функциясын ескерсек, онда $y_s(x)$ функциясын осы функция арқылы келесі

$$y_s(x) = (x-a)^{\alpha s} E_{(\beta,1,...,n-1),s+1}\left(a_0 \frac{(x-a)^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}}, a_1 \frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha}, ..., a_{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha(n-1)}}{\alpha^{n-1}}\right).$$

түрде өрнектелетінін көрсетуге болады

Сонымен келесі теорема дәлеледенді.

2-Теорема. Айталық $0 < \alpha, n-1 < \beta \le n, n = 1, 2, ..., s = \beta - j, 1 \le j \le n$ болсын. Онда

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + ... + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0\right)^k \frac{(x-a)^{\alpha\beta k + \alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k + s + 1\right)}$$

түріндегі функциялар (10) – теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдері болады.

Бұл функциялар көп индексті Миттаг-Леффлер функциясы арқылы

$$y_s(x) = (x-a)^{\alpha s} E_{(\beta,1,...,n-1),s+1}\left(a_0 \frac{(x-a)^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}}, a_1 \frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha}, ..., a_{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha(n-1)}}{\alpha^{n-1}}\right)$$

түрде өрнектеледі.

Ескерту. Егер (10) – теңдеуде $\alpha = 1, a = 0$ болса бұл теңдеудің шешімі

$$y_s(x) = x^s E_{(\beta,1,...,n-1),s+1}\left(a_0 x^{\beta}, a_1 x, ..., a_{n-1} x^{n-1}\right)$$

көрініске келеді. Бұл нәтиже [13] жұмыста алынған.

4. Жалпыланған Риман- Лиувилл туындысы қатысқан сызықтық бөлшек ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін құру

Бұл бөлімде біз жалпыланған Капуто операторы қатысқан, бір текті емес теңдеудің шешімін құру мәселесін қарастырамыз.

Айталық $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ нақты сандар және $0<\alpha, n-1<\beta\le n, n=1,2,...$ берілсін. $x>a$ аймағында келесі

$$ {}_a^{C\beta}D^\alpha y(x) - a_{n-1}\cdot {}_a^{C\beta-1}D^\alpha y(x) - ... - a_1\cdot {}_a^{C\beta-(n-1)}D^\alpha y(x) - a_0 y(x) = f(x) \tag{15}$$

теңдеуді қарастырайық.

(15)-теңдеудің шешімін құруды біз тек қана бір текті емес жағдай үшін қарастырамыз, себебі бір текті теңдеудің шешімін 3 – бөлімде көрсетілген әдіс бойынша құруға болады.

Риман-Лиувилл операторы қатысқан теңдеудегі сияқты келесі теорема орынды.

3-Теорема. Айталық $0<\alpha, n-1<\beta\le n, n=1,2,..., s=j, 0\le j\le n-1$ және $f(x)=0$ болсын. Онда

$$ y_s(x) = (x-a)^{\alpha s} E_{(\beta,1,...,n-1),s+1}\left(a_0\frac{(x-a)^{\alpha\beta}}{\alpha^\beta}, a_1\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha}, ..., a_{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha(n-1)}}{\alpha^{n-1}} \right)$$

түріндегі функциялар (15) – теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдері болады.

Енді (15) – теңдеуді бір текті емес жағдайда қарастырамыз.

Алдымен бөлшек ретті интеграл және туындыға қатысты келесі лемманы дәлелдейміз.

5 - Лемма. Айтайлық, $n-1<\beta\le n, n=1,2,...$ және $f(x)\in C[a,b]$ болсын. Онда кез-келген $0<\gamma\le\beta$ үшін

$$ {}_a^{C\gamma}D^\alpha \left({}_a^{\beta}J^\alpha f(x) \right) = {}_a^{\beta-\gamma}J^\alpha f(x) \tag{16}$$

теңдік орынды.

Дәлелдеуі. Алдымен $\gamma=k$ бүтін сан болған жағдайды қарастырайық. Егер осы жағдайда $k=1$ болса, онда берілген операторлардың анықтамасы бойынша

$$ {}_a^{C1}D^\alpha \left({}_a^{\beta}J^\alpha f(x) \right) = {}_a^{1}T^\alpha\, {}_a^{\beta}J^\alpha f(x) = \left((x-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dx} \right)\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^\alpha-(\tau-a)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}} \right) =$$

$$ = (x-a)^{1-\alpha}\left(\frac{\beta(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^\alpha-(\tau-a)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-2} f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}} \right) =$$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\beta-1)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^\alpha-(\tau-a)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-2} f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}} = {}_a^{\beta-1}J^\alpha f(x).$$

Жалпы жағдайда кез келген k натурал саны үшін операторлардың анықтамасы бойынша

$$ {}_a^{Ck}D^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{k}T^{\alpha}\ {}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x) = \left((x-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dx}\right)^k \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}\right) = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\beta-k)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-k-1} f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}} = {}_a^{\beta-k}J^{\alpha} f(x). $$

Осылайша біз ${}_a^{k}T^{\alpha}\ {}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x) = {}_a^{\beta-k}J^{\alpha} f(x)$ теңдігін дәлелдедік. $\gamma = k = \beta$ дербес жағдайда ${}_a^{k}T^{\alpha}\ {}_a^{k}J^{\alpha} f(x) = {}_a^{0}J^{\alpha} f(x) = f(x)$ теңдік орынды. Егер $k-1<\gamma\le k<\beta$ болса, онда дифференциалдық және интегралдық операторлардың анықтамалары, сондай-ақ (9) теңдікті ескере отырып, келесі нәтижеге ие боламыз

$$ {}_a^{C\gamma}D^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{k}T^{\alpha}\ {}_a^{k-\gamma}J^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{k}T^{\alpha}\ {}_a^{\beta+k-\gamma}J^{\alpha} f(x) = {}_a^{\beta-\gamma}J^{\alpha} f(x). $$

Осы сияқты

$$ {}_a^{C\beta}D^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{n}T^{\alpha}\ {}_a^{n-\beta}J^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{n}T^{\alpha}\ {}_a^{n}J^{\alpha} f(x) = f(x). $$

Лемма дәлелденді.

2 – Салдары. *Айтайлық,* $n-1<\beta\le n, n=1,2,...,0<\gamma<\beta,$ *және* $f(x)\in C[a,b]$ *болсын. Онда*

$$ {}_a^{\beta}J^{\alpha}\left({}_a^{C\gamma}D^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right)\right) = {}_a^{C\gamma}D^{\alpha}\left({}_a^{2\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{2\beta-\gamma}J^{\alpha} f(x) \qquad (17) $$

теңдіктері орынды.

Егер $L_1 = {}_a^{C\beta}D^{\alpha}, L_2 = a_{n-1}\cdot {}_a^{C\beta-1}D^{\alpha}y(x)+...+a_1\cdot {}_a^{C\beta-(n-1)}D^{\alpha}y(x)+a_0$ деп белгілесек, онда (15)- теңдеуді $\left(L_1-L_2\right)y(x)=f(x)$ түрінде жазуға болады. Ары қарай осы операторларға қатысты f нормаланған жүйе құрамыз.

6 - Лемма. Егер $L_1 = {}_a^{C\beta}D^{\alpha},\ L_2 = a_{n-1}\cdot {}_a^{C\beta-1}D^{\alpha}+a_{n-2}\cdot {}_a^{C\beta-2}D^{\alpha}+...+a_1\cdot {}_a^{C\beta-(n-1)}D^{\alpha}+a_0$ және $f_0(x) = {}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x), f(x)\in C[a,b]$ болса, онда

$$ f_k(x) = \left({}_a^{\beta}J^{\alpha}\cdot L_2\right)^k f_0(x), k\ge 1 $$

функциялар жүйесі $\left(L_1, L_2\right)$ операторларға қатысты f нормаланған жүйе болады, яғни

$$ L_1 f_0(x) = f(x), L_1 f_k(x) = L_2 f_{k-1}(x), k\ge 1 \qquad (18) $$

теңдіктер орынды.

Дәлелдеуі. $L_1 f_0(x) = f(x)$ теңдігі (16) – формуладан келіп шығады. Айталық, $k \ge 1$ және $g(x) = L_2\left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)^{k-1} f_0(x)$ болсын. Онда

$$L_1 f_k(x) = L_1\left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)^k f_0(x) = L_1\left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)\left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)^{k-1} f_0(x) = L_1\, {}_a^\beta J^\alpha g(x) = g(x) =$$

$$= L_2\left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)^{k-1} f_0(x) = L_2 f_{k-1}(x).$$

Лемма дәлелденді.

3 – Салдары. Егер $f_0(x) = {}_a^\beta J^\alpha f(x),\ f(x) \in C[a,b]$ болса, онда

$$y_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\left({}_a^\beta J^\alpha \cdot \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1}D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)}D^\alpha + a_0 \right)\right)^k f_0(x) \quad (19)$$

қатар қосындысы (15)-теңдеудің дербес шешімі болады.

Дәлелдеуі. $f_k(x)$ жүйе үшін (18) теңдіктер орынды. Олай болса

$$\left(L_1 - L_2 \right) y_f(x) = L_1 f_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} L_1 f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) =$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} L_2 f_{k-1}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) = f(x).$$

Салдары дәлелденді.

Енді $f_k(x)$ жүйенің айқын түрін құрамыз. Егер $k = 1$ болса, онда (16) және (17) теңдіктерден

$$f_1(x) = \left({}_a^\beta J^\alpha \cdot \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1}D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)}D^\alpha + a_0 \right)\right) f_0(x) =$$

$$= \left(\left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1}D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)}D^\alpha + a_0 \right)\right) {}_a^{2\beta} J^\alpha f(x) =$$

$$\left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}J^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta+n-1}J^\alpha + a_0 \cdot {}_a^{2\beta}J^\alpha \right) f(x).$$

Жалпы жағдайда

$$f_k(x) = \left({}_a^\beta J^\alpha \cdot \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1}D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)}D^\alpha + a_0 \right)\right)^k f_0(x) =$$

$$= \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1}D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)}D^\alpha + a_0 \right)^k {}_a^{(k+1)\beta} J^\alpha f(x) =$$

$$= \left(\sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_{n-1} = k} C(k; k_0, \ldots, k_{n-1}) a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_{n-1}^{k_{n-1}}\ {}_a^{C\, k_1(\beta-n+1) + \ldots + k_{n-1}(\beta-1)}D^\alpha \right) {}_a^{(k+1)\beta} J^\alpha f(x) =$$

$$=\sum_{k_0+k_1+...+k_{n-1}=k} C(k;k_0,...,k_{n-1})a_0^{k_0}a_1^{k_1}...a_{n-1}^{k_{n-1}}\ {}_a^{(k+1)\beta-k_1(\beta-n+1)-...-k_{n-1}(\beta-1)}J^{\alpha} f(x)=$$

$$=\sum_{k_0+k_1+...+k_{n-1}=k} C(k;k_0,...,k_{n-1})a_0^{k_0}a_1^{k_1}...a_{n-1}^{k_{n-1}}\ {}_a^{\beta+\beta k_0+(n-1)k_1+...+k_{n-1}}J^{\alpha} f(x).$$

Бұл есептеулер нәтижесінде (19) формуламен анықталған $y_f(x)$ функциясы үшін келесі өрнекті аламыз

$$y_f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_0+k_1+...+k_{n-1}=k} C(k;k_0,...,k_{n-1})a_0^{k_0}a_1^{k_1}...a_{n-1}^{k_{n-1}}\ {}_a^{\beta+\beta k_0+(n+1)k_1+...+k_{n-1}}J^{\alpha} f(x)=$$

$$=\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}P\left((x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}\right)f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}.$$

Мұндағы

$$P\left((x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}\right)=$$

$$E_{(\beta,n-1,...,1),\beta}\left(a_0\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta},a_1\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-1},...,a_{n-1}\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)\right).$$

Сонымен келесі теореманы дәлелдедік.

4-Теорема. Айталық, $0<\alpha, n-1<\beta\le n, n=1,2,..., s=j, 0\le j\le n-1$ және $f(x)\in C[a,b]$ болсын. Онда (15) – теңдеудің жалпы шешімі

$$y_s(x)=\sum_{s=0}^{n-1}C_s(x-a)^{\alpha s}E_{(\beta,1,...,n-1),s+1}\left(a_0\frac{(x-a)^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}},a_1\frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha},...,a_{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha(n-1)}}{\alpha^{n-1}}\right)+$$

$$=\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}P\left((x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}\right)f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

түрде өрнектеледі. Мұндағы C_s кез-келген тұрақтылар.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетінің № AP09259137 грантымен қолдау тапты.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 2: Fractional Differential Equations. Edited by J. A. Tenreiro Machado. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. –527 p.
2. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 4: Applications in Physics, Part A. Edited by V. E. Tarasov. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 314 p.

3. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A. Edited by D. Baeanu, A. M. Lopes. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 259 p.
4. Pskhu A.V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order// Sb. Math., – 2011. – – Vol.202, No. 4. – P.571–582.
5. Kilbas A. A. Новые направления в теории дробных интегральных и дифференциальных уравнений// Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147. – С.72–106.
6. Мажгихова М.Г.Обобщенная задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом с производной Джрбашяна – Нерсесяна//Доклады АМАН. – 2022. – Vol. 22, No.4. – P.11 – 17.
7. Al-Refai M., Luchko Y. The General Fractional Integrals and Derivatives on a Finite Interval. Mathematics. – 2023. – Vol.11, No.1031. – P.1 – 13.
8. Tarasov V.E. Scale-Invariant General Fractional Calculus: Mellin Convolution Operators// Fractal and Fractional. – 2023. – Vol.7, No.481. – P.1 – 25.
9. Saleh M. H., Mohamed D.Sh., Ahmed M.H., Marjan M.K. System of Linear Fractional Integro-Differential Equations by using Adomian Decomposition Method//International Journal of Computer Applications. – 2015. – Vol.121, No.24. – P.1 – 11.
10. Бондаренко Б. А. Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях. - Ташкент : Фан, 1984. - 183 с.
11. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications// Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – Vol.287, No.2. – P. 577–592.
12. Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2012. – Vol.52. – P. 219–234.
13. Ashurov P., Cabada A., Turmetov B. Operator method for construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2016. – Vol.19, No.1. – P. 229–252.
14. Shinaliyev K., Turmetov B., Umarov S.A fractional operator algorithm method for construction of solutions of fractional order differential equations//Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2012. – Vol.15, No.2. – P. 267–281.
15. Turmetov B. Kh. On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order //Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2018. – No. 25. – P.1–14.
16. Turmetov B.K., Usmanov K.I., Nazarova K.Z. On the Operator Method for Solving Linear Integro-Differential Equations with Fractional Conformable Derivatives// Fractal Fractional. – 2021. – Vol.5, No.109. – P.1 – 21.
17. Turmetov B. On Certain Operator Method for Solving Differential Equations// Filomat. – 2017. – Vol.31. – P.4275–4286.
18. Katugampola U.N. A new approach to generalized fractional derivatives//Bull. Math. Anal. Appl. – 2014. – Vol.6. -- P. 1-15.
19. Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D. On a new class of fractional operators // Advances in Difference Equations. – 2017. – Vol.2017, No.247. – P.1 –16.
20. Hadid S.B., Luchko Y. An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order// Panamerican Mathematical Journal. – 1996. – Vol.6. – P. 57-73.
21. Gorenflo R., Luchko Y. Operationl method for solving generalized Abel integral equation of second kind // Integral Transforms and Special Functions. – 1997. – Vol.5, No.1-2. – P.47 – 58.

REFERENCES

1. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 2: Fractional Differential Equations. Edited by J. A. Tenreiro Machado. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. –527 p.
2. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 4: Applications in Physics, Part A. Edited by V. E. Tarasov. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 314 p.
3. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A. Edited by D. Baeanu, A. M. Lopes. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 259 p.
4. Pskhu A.V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order// Sb. Math., – 2011. – – Vol.202, No. 4. – P.571–582.
5. Kilbas A. A. Новые направления в теории дробных интегральных и дифференциальных уравнений// Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147. – С.72–106.
6. Мажгихова М.Г.Обобщенная задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом с производной Джрбашяна – Нерсесяна//Доклады АМАН. – 2022. – Vol. 22, No.4. – P.11 – 17.
7. Al-Refai M., Luchko Y. The General Fractional Integrals and Derivatives on a Finite Interval. Mathematics. – 2023. – Vol.11, No.1031. – P.1 – 13.
8. Tarasov V.E. Scale-Invariant General Fractional Calculus: Mellin Convolution Operators// Fractal and Fractional. – 2023. – Vol.7, No.481. – P.1 – 25.
9. Saleh M. H., Mohamed D.Sh., Ahmed M.H., Marjan M.K. System of Linear Fractional Integro-Differential Equations by using Adomian Decomposition Method//International Journal of Computer Applications. – 2015. – Vol.121, No.24. – P.1 – 11.
10. Бондаренко Б. А. Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях. - Ташкент : Фан, 1984. - 183 с.
11. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications// Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – Vol.287, No.2. – P. 577–592.
12. Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2012. – Vol.52. – P. 219–234.
13. Ashurov P., Cabada A., Turmetov B. Operator method for construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2016. – Vol.19, No.1. – P. 229–252.
14. Shinaliyev K., Turmetov B., Umarov S.A fractional operator algorithm method for construction of solutions of fractional order differential equations//Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2012. – Vol.15, No.2. – P. 267–281.
15. Turmetov B. Kh. On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order //Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2018. – No. 25. – P.1–14.
16. Turmetov B.K., Usmanov K.I., Nazarova K.Z. On the Operator Method for Solving Linear Integro-Differential Equations with Fractional Conformable Derivatives// Fractal Fractional. – 2021. – Vol.5, No.109. – P.1 – 21.
17. Turmetov B. On Certain Operator Method for Solving Differential Equations// Filomat. – 2017. – Vol.31. – P.4275–4286.

18. Katugampola U.N. A new approach to generalized fractional derivatives//Bull. Math. Anal. Appl. – 2014. – Vol.6. -- P. 1-15.
19. Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D. On a new class of fractional operators // Advances in Difference Equations. – 2017. – Vol.2017, No.247. – P.1 –16.
20. Hadid S.B., Luchko Y. An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order// Panamerican Mathematical Journal. – 1996. – Vol.6. – P. 57-73.
21. Gorenflo R., Luchko Y. Operationl method for solving generalized Abel integral equation of second kind // Integral Transforms and Special Functions. – 1997. – Vol.5, No.1-2. – P.47 – 58.

УДК 372.517.1;
МРНТИ 27.23.17
ORCID https://orcid.org/0009-0009-3287-6182
https://doi.org/10.47526/2023-3/2524-0080.02

С. А. ИСМАИЛОВА[1*], К. Ж. НАЗАРОВА[2*]
[1]*Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан*
*магистрант, *e-mail: sa.ismailova014@gmail.com*
[2]*Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан*
*ф.-м.ғ.к., доцент, *e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz*

ЖОҒАРЫ СЫНЫП ОҚУШЫЛАРЫНА ШЕКТЕР ТЕОРИЯСЫН ОҚЫТУДЫҢ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Аңдатпа. Бұл мақала шектер теориясының тереңірек зерттеуге және талдауға арналған және теориялық білімді практикада қолдануға, жоғары математиканың шектер теориясын үйрену кезінде жан-жақты білім алуға мүмкіндік беретін барлық аспектілер қарастырылған. Бұл жұмыста шектер тақырыбына байланысты авторлардың зерттеген еңбектері қарастырылған. Мақалада шектер теориясымен байланысты өзекті тақырыптар және математикалық есептерді шешудің әртүрлі әдістері қарастырылған. Жаратылыстану-математикалық бағыттағы алгебра және анализ бастамалары пәнінен оқу бағдарламасы қарастырылған және оқулықтарға талдау жасалынып, оқулықтардың артықшылықтары көрсетілген. Зерттеу жұмысы барысында бақылау, сауалнама, педагогикалық әдістер қолданылып, зерттеу тақырыбына байланысты әдебиеттерге педагогикалық талдау жасалынды. Сонымен қатар, шектер теориясын оқыту барысында оқушылардың формулаларды есте ұзақ сақтауына және есептерді шығару барысында формулаларды орынды пайдалана алуына бағытталған, ақпараттарды ұсынудың тиімді түрі – презентация түрінде, біздің жағдайда сызба түрінде беру ұсынылды. Сауалнама нәтижесін талқылай келе, қиындық тудыратын есептерді шығаруға қызығушылық тудыратын, қосымша әдебиеттермен жұмыс жасауға дайын оқушылардың тапсырмаларды орындай алатындығы анықталды. Ғылыми зерттеу нәтижелерін қорытындылар болсақ, мектеп бағдарламасы бойынша алгебра және анализ курсын оқытатын математика мамандарына көмекші құрал ретінде пайдалануға болады.
Кілт сөздер: Шектер теориясы, шектер мәні, анықтау әдістемесі, функцияның шегі, оқыту әдістемесі, қасиеттері, Коши, тамаша шектер, нүктедегі мәні, анықталмағандық, анықталмағандықтарды ашу, шама.

С. А. Исмаилова[1*], К. Ж. Назарова[2*]
[1]*Международный Казахско-Турецкий Университет имени Х.А. Ясави, Туркестан, Казахстан*
*магистрант,*e-mail: sa.ismailova014@gmail.com*
[2]*Международный Казахско-Турецкий Университет имени Х.А. Ясави, Туркестан, Казахстан*
*канд.физ.-мат. наук, доцент. *e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz*

Особенности обучения теории пределов старшеклассникам

Аннотация. Эта сататья посвящена более глубокому изучению и анализу теории пределов и посвящена всем аспектам, которые позволяют применить теоретические знания на практике, получить всесторонние знания при изучении теории пределов высшей математики. В данной работе рассмотрены работы авторов, связанные с темой пределов. В статье рассматриваются актуальные темы с теорией пределов, и различные методы решения математических задач. Предусмотрена учебная программа по предмету алгебра и начало анализа естественно-математического направления и проведен анализ учебников, показаны преимущества учебников. В ходе исследовательской работы использовались контрольные, анкетные, педагогические методы, проведен педагогический анализ литературы, связанной с темой исследования. Кроме того, было предложено представить информацию в виде эффективной формы представления – презентации, в нашем случае в виде схемы, направленной на то, чтобы учащиеся дольше запоминали формулы и могли разумно использовать формулы при решении задач. Обсуждая результаты опроса, было установлено, что учащиеся, заинтересованные в решении проблемных задач, готовые к работе с дополнительной литературой, способны выполнять задания. Результаты научного исследования можно использовать в качестве вспомогательного средства для специалистов по математике, которые преподают курс алгебры и начал анализа по школьной программе.

Ключевые слова: Теория пределов, значение пределов, методика определения, предел функции, методика обучения, свойства, Коши, замечательные пределы, значение в точке, неопределенность, раскрытие неопределенностей, величина.

S. A. Ismailova[1*], G. J. Nazarova[2*]

[1]The International kazakh-turkish University named K.A. Yasavi, Turkestan, Kazakhstan
*master,*e-mail: sa.ismailova014@gmail.com*
[2]The International kazakh-turkish University named K.A. Yasavi, Turkestan, Kazakhstan
*Candidate of Physico-Mathematical Sciences, *e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz*

Features for teaching limit theory to high school students

Abstract. This article is devoted to a deeper study and analysis of the theory of limits and is devoted to all aspects that allow you to apply theoretical knowledge in practice, to gain comprehensive knowledge when studying the theory of limits of higher mathematics. In this paper, the authors' works related to the topic of restrictions are considered. The article discusses current topics related to the theory of limits and various methods of solving mathematical problems. The curriculum on the subject of algebra initiatives of analysis of the natural-matematical direction is provided and the analysis of textbooks is carried out, the advantages of textbooks are shown. In the course of research work, control, questionarre, pedagogical methods were used, a pedagogical analysis of the literature related to the research topic was carried out. In addition, it was proposed to present information in the form of an effective form of presentation – presentation, in our case, in the form of a scheme aimed at ensuring that students memorize formulas longer and can intelligently use formulas when solving problems. Discussing the results of the survey, it was found that students interested in solving problematic problems, ready to work with additional literature, are able to complete tasks. The results of the scientific research can be used as an auxiliary tool for mathematics specialists who teach algebra and analysis courses according to the school curriculum.

Key words: theory of limits, value of limits, method of definition, limit of function, teaching method, properties, Cauchy, remarkable limits, value at a point, uncertainly, disclosure of uncertainties, magnitude.

Кіріспе

Қазіргі қоғам талабы – саналы, білімді, бәсекеге қабілетті, дамуға құштар және өз ойын еркін жеткізе алатын тұлға дайындау екені сөзсіз, бұл ұстаздың алдындағы ұлы міндет.

Тұңғыш президентіміз Н.Ә. Назарбаевтың «Білімді дамыта алмайтын елдің болашағы бұлыңғыр» және ұлы педагог К.Д. Ушинскийдің «Мұғалім – өзінің білімін үздіксіз көтеріп отырғанда ғана мұғалім, ал оқуды, ізденуді тоқтатқанда оның мұғалімдігі жойылады» деген ұлағатты сөздерін тілге тиек ете отырып қоғам талабына сай, өзбетінше ізденіп, дамуға және үйренуге қызығушылық тудыратын жастарды тәрбиелеу, оқыту және білім беруді көздейтін мұғалім болуға ұмтылу қажет.

Оқушыларда математикалық анализдің және оның мектептегі принциптерінің негізінде жатқан негізгі ұғымдар, әдістер мен фактілер қалыптасқан идеялар туралы түсінік жоқ. Осы орайда көрнекті математик А.Я. Хинчиннің педагогикалық мұрасын басшылыққа алу керек, ол әрдайым баяндалған пәннің принципті сәттерін жан-жақты ашуға, тенденциялар, проблемалар, әдістер мен мақсаттар туралы, жетекші идеялардың өзара байланысы туралы және осы идеялар шеңберіндегі негізгі ұғымдар туралы айтуға тырысты. XIX ғасырдың бірінші жартысындағы көрнекті математик М.В.Остроградский мектеп курсына математикалық анализ элементтері мен кейбір ұғымдарын енгізу мәселесін тұңғыш көтерген ғалым. Ғалым математикалық амалдардың шынайы мағынасы оқушыларға толық түсінікті түрде көрсетілмеген және пәннің практикамен байланысы көрсетілмеген оқыту формасын қатаң сынға алды [1, 151 б.].

Мектеп курсында «Шектер» тақырыбын егжей-тегжейлі және терең үйретудің қажеттілігі бар ма? Мектепте математикалық анализ пәнінің ұғымдарын еңгізудің ерекшеліктері, материалды таңдау мен ұсынудың әртүрлі тәсілдердегі мүмкін болатын қателіктері туралы көптеген ресейлік педагог-ғалымдар пікірлерін ортаға сала отырып талқылады [2-4, 8].

«Егер негізгі ұғымдар, негізінен, интуитивті талдаудар негізіне сүйенер болса, онда мектеп курсында математикалық талдаудың элементтерін оқыту қажетті болады. Керісінше болған жағдайда оның қажеттілігі де жоқ» - деген А.Д. Мышкистің пікірін алға тартуымызға болады [2].

Сондай-ақ М.Д. Ломоносовтың «Математиканы оқыту міндет, өйткені ол ақыл-ойды реттейді» -деген сөзін тілге тиек ете кету керек [3].

«Біз мектепте оқушыларды тек жалпыадамзаттық мәдениеттің негізгі құрамдас бөлігі және математикалық анализдің элементтерімен ғана таныстыратынымызды ұмытпауымыз керек, оны ресми зерттеу пәні ретінде жоғары оқу орындарында баяндалған ғылыми тілді теорияларды орта мектепке көшіру орынсыз» - деп атап өтті А. Г. Мордкович [4].

Материалдың мазмұнын, оның көлемін, оқулықтар мен алгебра және анализ бастамалары пәні сабақтарында ұсынудың қиындық деңгейлерін талдау жайлы келіспеушіліктерге байланысты орта мектептерде жоғары математиканың осы бөлімін зерттеуге қатысты бірыңғай тұжырымдамалар әлі әзірленбегенін айта кету керек. Заманауи оқулықтардың авторлары қойылған сұрақтарға жауап берудің мүмкін нұсқаларын ұсынды. XIX ғасырда мектепке енгізілген шектер теориясының негізгі элементтерін зерттеудегі ең көп және ұзақ уақыт бойы келіспеушіліктерді тудырған осы алгебра және геометрия сабақтарындағы қарама-қайшылықтар болатын. Тағы В. М. Брадис өз еңбектерінде «Шектер» бөлімі аса қиын бөлімдердің бірі екенін мәлімдеп жазды, ал экспозицияны ғылыми тұрғыдан іздестіру мен оны мүмкіндігінше көрнекі және қолжетімді етуге бағытталған ұмтылыстар нәтижесі оны ұсынудың көптеген нұсқаларын жасауға мүмкіндік туғызды. Ал екінші жағынан Мемлекеттік білім стандарттарында жалпы білім берудің математикалық мазмұнының негізгі өзегі аталмыш тақырыпты, яғни шек ұғымын қамтымайды [8].

«Жалпы шектер түсінігін мектепте енгізуге болады (және керек), бірақ міндетті оқу бағдарламасы ретінде емес, болашақта жоғары математикамен айналысатын оқушылар үшін қосымша факультативті сабақ ретінде қарастыруға болады. Әсіресе, x a-ға ұмтылған сайын $f(x)$ функциясының мәні A-ға ұмтылады (жақындайды)-деген фактісін түсіндіру мұғалімнің міндеті болып табылады» - деген пікірлерінен келесі тұжырымды айта аламыз [5].

«Шектер» тақырыбындағы іргелі ұғымдарды зерттеу кезінде жүзеге асырылатын математикалық анализдің идеялық потенциалы келесі идеяларға негізделген:

- Жиындар арасындағы сәйкестік (функция түсінігі бойынша);

- Маңайы, жақындығы, яғни жиын элементтерінің салыстырмалы арақашықтығы (шек ұғымы, үзіліссіздік). [1, 153 б.].

Шектер теориясы – математикалық анализ пәнінің ең басты әрі негізгі тарауы болып табылады. Мектеп курсында «Шек» ұғымын енгізудің маңыздылығын аса көрнекті ғұлама ғалымдардың еңбектерінен көруге болады. Мектептегі анализ бастамалары пәнін оқыту, тіпті тереңдетілген сыныптарда да қиындықтар тудырады. Қиындықтар, ең алдымен, оқушылардың күрделі әрі ғылыми тілде жазылған кең ауқымды жаңа материалды қабылдауға дайын еместігінен туындайды [6]. «Шектер» ұғымын алғаш рет XVII ғасырда И. Ньютон, Г. Лейбниц және XVIII ғасырда И. Бернулли, Эйлер, Лагранж сынды ғалымдар қолдана бастады. Ол туралы нақты анықтаманы XIX ғасырда Больцано және Коши ғылымға енгізді [7].

Негізінен мектеп курсындағы «Шек» ұғымы жайлы алғашқы деректер шеңбердің ұзындығы формуласын қорытып шығаруда және есептеу барысында енгізілді. Дегенмен, шектің нақты анықтамасы мен жалпы сол ұғымның бар екендігі айтылмаған болатын. Сонымен, π саны және радиандық шама ұғымы толыққанды анықталмаған күйі қалдырылған, яғни шек анықтамасымен келтірілмеген. Осыдан математиканы үйрену барысында келесі тақырыптардың да зерттелуі қиындық тудыратынын көреміз: радиан шамасы – бірінші тамаша шек – тригонометриялық функциялардың туындылары және т.б. Мысалы, дөңгелектің ауданын анықталған интеграл көмегімен есептеу барысында бірінші тамаша шекті қолдану қажеттілігі туындайды, одан ары қарай сектордың ауданын есептеуде радиан шамасымен соқтығысамыз, ол әрине тағы да π санын қолдануға алып келеді. Осыдан, мектеп курсында математикалық анализдің кейбір тақырыптарын оқытудың маңыздылығын нақты көрсете аламыз [3, 68б.].

Зерттеу әдіснамасы

Ғылыми-зерттеу жұмыстарын жүргізу кезінде келесі әдістерде пайдаланылды: бақылау, сауалнама және педагогикалық эксперимент (іс-тәжірибе). Зерттеу базасы ретінде Түркістан облысы, Сауран ауданы адами әлеуетті дамыту бөліміне қарасты №1 жалпы орта мектебі алынды. Жоғары сынып оқушыларының зерттеу жұмысына қызығушылығын анықтау мақсатында №1 жалпы орта мектебінің 10-сыныптарына бақылау әдісі қолданылды. Бақылау барысында оқушылардың басым бөлігі мұндай ғылыми-зерттеу жұмыстарымен таныс емес екендігі айқындалды, яғни 16%-ы. Зерттеу жұмысының мақсаты мен міндеттеріне сүйене отырып, тақырып бойынша оқу-әдістемелік құралдар мен әдебиеттерге педагогикалық-психологиялық талдау жасалынды, мектеп курсындағы «Алгебра және анализ бастамалары» пәнін оқыту үрдісіне бақылау жүргізілді және оқу іс-әрекеттері талданды.Сондай-ақ, ҰБТ есептерін шығару әдістері көрсетілді. Оқушылардың тақырып бойынша білім сапасын анықтау мақсатында бақылау жұмысы алынды. Бақылау жұмысы бойынша оқушылардың 7%-ы ғана берілген тапсырманы орындай алды. Нәтижені көтеру мақсатында қосымша сабақ ретінде әдістемелік жұмыстар енгізілді. Жоғары сынып оқушыларының зерттеу жұмысына қызығушылықтарын анықтау үшін 52 оқушыдан сауалнама алынды. Ұсынылған әдістемелік жұмыстарды қолдану нәтижесінде оқушылардың 37%-ы зерттеу жұмысына қызығушылық білдіргені анықталды, ал бастапқы нәтижеміз 26%-ға өскені байқалды. Оқушыларға зерттеу тақырыбын оқыту барысында педагогикалық эксперимент жүргізілді. Оқушылардың қызығушылығын ояту үшін «Шетелдік» және «Кіммен бірге?» әдістері арқылы топтарға бөліп, сайыс сабағы өткізілді, оқушылардың жылдам ойлау қабілетін және интеллектісі мен шығармашылық ойлауын дамыту үшін «Стоп кадр» және «Синквейн» әдістері қолданылды. Аталған әдістер арқылы оқушылар есеп шартын түсініп әрі түсіндіре алуы, топпен жұмыс жасай отырып есепті талдауға және қорытынды жасай алуына жол ашылды. Әдістемелік жұмысты ұсынудың нәтижесі жақсы екені көрінді.

Зерттеу нәтижелері

«Шектер» тақырыбының бейнелеуі функцияның нүктедегі шегі және сан тізбегінің шегі ұғымдарын түсіндіргеннен кейін шектердің математикада және ғылым саласында қолданылуы бөлімімен жалғастырған жөн. Көрнекілік және уақытты үнемдеу мақсатында осы тақырыпты презентация немесе схема түрінде баяндау ыңғайлы (1-схема). Кез-келген оқытушы өтілетін пәннің стандарттарына, құзыреттілік деңгейі мен тәжірибесіне және оқытушының пәнге деген көзқарасына қарай ұсынылған схеманы өзгертуіне болады. Схеманың басында «шектер» тақырыбы математикалық ұғымдарға, содан соң оның жаратылыстану ғылымдарындағы қолданыстарына баса назар аударылады. Осы схеманы қарап шыққаннан кейін оқушылар болашақта алған білімдерін жалпылауға, талдауға, нақтылауға үйренеді, жалпы түсінік қалыптастырады және алда туындайтын сұрақтарына жауап ала алады [9].

«Алгебра және анализ бастамалары» пәнінен оқу бағдарламасы бойынша бұл тақырып негізінен 10-сыныптарда оқытылады. Жалпы мектеп курсында «Шектер» тақырыбының қай бөлімдері оқытылатынын келесі кестеден көруге болады:

Кесте 1. Жаратылыстану-математикалық бағыттағы және қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы «Алгебра және анализ бастамалары» пәнінен оқу бағдарламасына салыстырмалы талдау

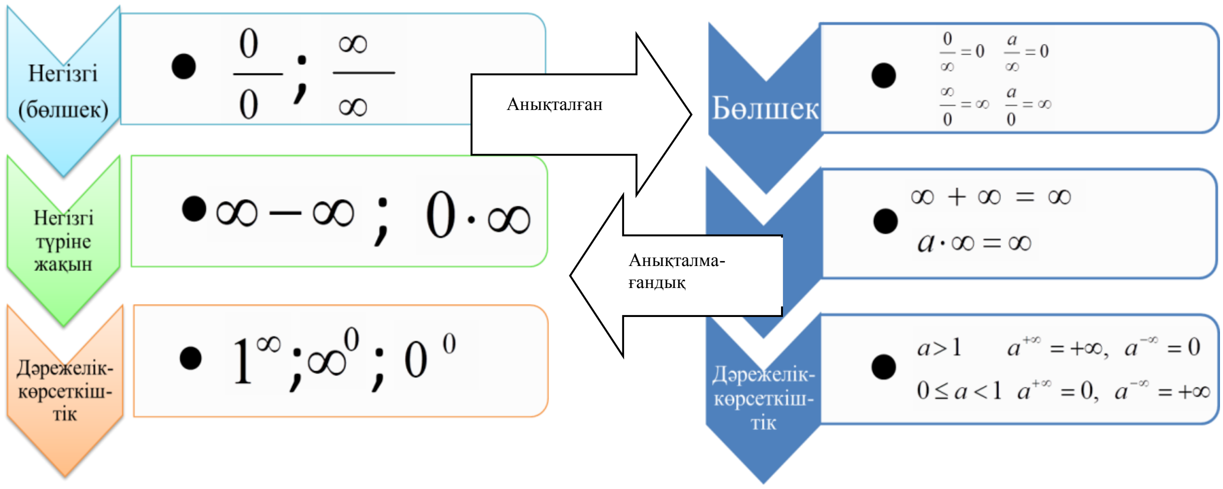
10-сынып ж.м.б.		*10-сынып қ.г.б.*	
Тақырыптар	*Сағат саны*	*Тақырыптар*	*Сағат саны*
Функция графигінің асимптоталары	*2*	*Функцияның нүктедегі және шексіздіктегі шегі*	*1*
Сан тізбегінің шегі	*2*		
Функцияның нүктедегі және жиындағы үзіліссіздігі	*2*	*Функцияның нүктедегі және жиындағы үзіліссіздігі*	*1*
Шектерді табу. Бірінші тамаша шек	*2*		

Кестеден көріп отырғанымыздай, екінші тамаша шек ұғымы мектепте оқытылмайды. Сондай-ақ, жаратылыстану бағытындағы шектерді есептеуде $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ және $\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандықтардан басқа түрдегі анықталмағандықтарды ашу әдістері қарастырылмайды және бөлшек түріндегі анықталмағандықтарды ашудың Лопиталь ережесі қарастырылмайды, себебі «Туынды» тақырыбы «Шектер» тақырыбынан кейін оқытылады.

Анықталмағандықтарды қамтитын шектерді есептеудің негізгі әдістері. Кез-келген шектерді есептеу кезінде белгілі бір алгоритммен шығарамыз, оның ішінде келесі алгоритмдерге назар аударайық:

1. Берілген өрнектегі аргументтің орнына аргументтің шектік мәнін қою;
2. Есептеу кезінде анықталмағандық пайда болатынын немесе пайда болмайтынын анықтау. Егер жоқ болса жауапты жазу;
3. Егер анықталмағандық бар болатын болса, онда қай түрдегі анықталмағандыққа жататынын анықтау және сол анықталмағандықты ашу әдістерін қарастыру;
4. Таңдалған ережеге сәйкес өрнекті түрлендіру және осы алгоритмді шектің жаңа формасына бастапқы алгоритмнен бастап қолдану.

Осы тақырыпты оқытудың көпжылдық тәжірибесі шектерді есептеуді құрылымдалған кестемен берудің ұтымды әдіс екенін көрсетеді. Сондай-ақ оқушылардың анықталмағандықтар туралы жалпы түсінігін, анықталмағандықтардың қандай түрлері бар екендігін және анықталған шаманы анықталмағандықтан қалай ажырату керектігін түсінуі үшін келесі кестелерді жасау және ұсыну ұтымдырақ (1-сурет). Бұл оқушылардың анықталмағандық ұғымы мен оларды ашу жолдарын және функцияның шегін есептеудің түрлі әдістерін игеруіне тиімді ықпал жасайды (2-кесте).



1-сурет. Функцияның шегін есептеу барысындағы «анықталған» және «анықталмағандық» жағдайлары

Кесте 2. Шектерді есептеудің негізгі әдістері

Анықталмағандықтың түрі	Анықталмағандықты ашу ережесі
$\lim\limits_{n\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	Бөлшектің бөлімінен де алымынан да «негізгі» қосылғышты (аргументтің ең үлкен дәрежесін, яғни шексіздікке тезірек ұмтылатынын) жақша сыртына шығарамыз. Егер қосылғыш дұрыс таңдалса, онда жақша ішіндегі өрнектің шегі 0-ге тең емес тұрақты санға тең болады.
$\lim\limits_{n\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$	Бөлшектің бөлімін де алымын да $x-a$ түріндегі көбейткіштерге жіктейміз және бөлшекті қысқартамыз. Егер тағы да анықталмағандық шығатын болса, онда осы әрекетті қайта орындаймыз.
$\lim\limits_{n\to a}(f(x)-g(x))=[\infty-\infty]$	Айырманы бөлшек түріне келтіреміз. Бұл жағдайда анықталмағандық бөлшек түріндегі анықталмағандыққа айналады немесе мүлдем анықталмағандық пайда болмайды

Ғылыми-зерттеу жұмыстарын жүргізу барысында 10-сыныптардың «Алгебра және анализ бастамалары» оқулығында және 11-сыныптарға арналған ҰБТ сұрақтарында шектерді қолдану арқылы шығарылатын есептер қарастырылды:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ шекті есептеңіз

Шешуі: Берілген бөлшекті түрлендіру арқылы бірінші тамаша шекті қолданып есепті шығарамыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=2\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 2\cdot 1\cdot 1=4$$

Жауабы: 4

2. Шекті табыңыз: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1}$

Шешуі: $x\to 1$ ұмтылғанда функцияның мәні $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты береді. Анықталмағандықты ашу үшін өрнекті түрлендіреміз.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x-2)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)(x-2)=(1+1)(1-2)=-2$$

Жауабы: -2

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\sqrt{n^2-1}}{n}$ функциясының шегін табыңыз.

Шешуі: $n\to\infty$ ұмтылғанда берілген функцияның мәнін есептеп көрейік: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\sqrt{n^2-1}}{n}=\dfrac{2-\sqrt{\infty^2-1}}{\infty}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Бұл түрдегі анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің бөлімін де алымын да функция аргументінің ең үлкен дәрежесіне бөлеміз, яғни n-ге бөлу қажет. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{n}-\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}{\frac{n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{n}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{\frac{n}{n}}=\dfrac{\frac{2}{\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}}{1}=-1$

Жауабы: -1

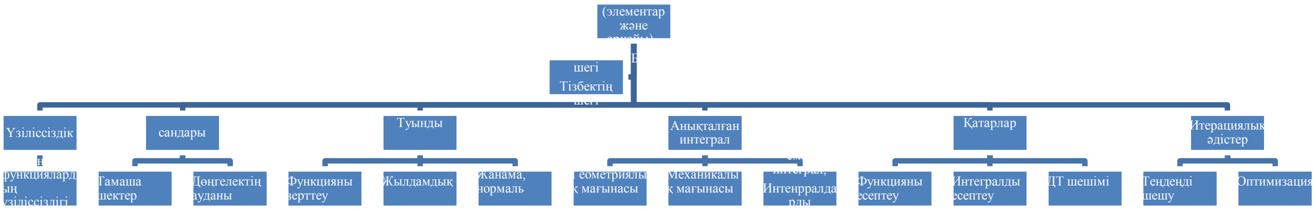
Оқушыларға «Шектер» тақырыбы бойынша негізгі ұғымдарды түсіндіріп, функцияның нүктедегі шегі және сан тізбегінің шегі тақырыптарына кіріспе жасалғаннан кейін «Математикада жиі қолданылатын шектер түрлері» бөлімімен білімдерін жалғастырған жөн. Уақытты ұтымды пайдалану және көрнекі құрал ретінде бұл тақырыптағы материалдарды презентация түрінде, соның ішінде келесі сызба түрінде беру тиімді деп санадық. Берілген схеманы әр педагог өз мамандығының стандарттарына, педагогтің өз тәжірибесі мен кәсіби құзыреттілік деңгейіне және жеке көзқарасына байланысты материалдар көлемін азайтуына, қосуына немесе өзгертуіне болады [10].

Сызбаның басында шектер арқылы анықталатын математикалық ұғымдарға баса назар аударылады, содан соң шектердің математикада және жаратылыстану ғылымдарының кейбір қосымшаларында қолданылуы қарастырылады. Осы сызбаны қарап шыққаннан кейін оқушыларда тақырып бойынша жалпы түсінік қалыптасады, яғни алған білімдерін жалпылай алады. Сондай-ақ оқушылар көптеген сұрақтарға жауап ала алатын болады (1-сызба).

Мұндай түрдегі жалпы шолу сызбалары идеясының жүзеге асырылуы «Математика» курсының басқа да маңызды бөлімдерін оқыту барысында тиімдірек бола алады. Тақырыпты оқыту барысында, әсіресе шектер түсінігін қолдану қажеттілігі туындаған сайын осы сызбаға жүгіну ыңғайлы. Бұл оқушыларда тек қана жаңа материалды ұсыну логикасының жалпы түсінігін қалыптастырып қана қоймай, математиканың басқа пәндермен ортақтығын, сабақтастығын түсінуіне де жол ашады.

Біртұтас ғылым ретінде математиканың сабақтастығын және әлемнің тұтас бейнесін қабылдаудағы оның орнын түсіну оқушының математиканы оқуға деген ынтасын оятады.

Сызба1. Математиканың «Функция және тізбек» бөлімін оқытудың құрылымы



Екі түрлі бағыттағы авторлардың оқулықтарына педагогикалық талдау жүргізіп тұжырымдалған. Жалпы білім беретін мектептің 10-сыныбына арналған «Мектеп» баспасында шыққан А.Е. Әбілқасымова, В.Е. Корчевский, З.А. Жұмағұловалар авторлығындағы және «Атамұра» баспасымен шығарылған Ә.Н. Шыныбеков, Д. Ә. Шыныбеков және Р. Ә. Жұмағыловтардың авторлығындағы «Алгебра және анализ бастамалары» оқуылығына кейбір критерийлер бойынша талдау жұмысы жасалынған (3-кесте).

Кесте 3 Оқулықтарға педагогикалық талдау

Оқулықтарды талдауға қойылатын талаптар	*Оқулық авторлары*			
	А.Е. Әбілқасымова ж.б.	*Ә.Н.Шыныбеков ж.б.*	*А.Е. Әбілқасыова қ.г.б*	*О. Пак қ.г.б*
Түсіндіру	+	+	+	+
Мәтіннің сапасы		+	+	+
Оқулық дизайны (көрнекілігі)	+	+	+	+
Тапсырмалар	+	+	+	
Практикалық (өмірмен) байланысы	+			+
Электронды түрде оқу мүмкіндігі	+	+	+	
Жаңа білімді меңгерту	+		+	

Синквейн – ең алғаш XX ғасырдың бірінші жартысында жапондық поэзияның ықпалымен АҚШ-та пайда болған бес жолдан тұратын өлең формасы. Көптеген әдіскерлердің пайымдауынша «синквейн» әдісі білім алушылардың алған білімін синтездеуде сөздік қорын дамытуға, лексикалық қабілеттерін бағалау барысында жылдам шешім қабылдауға және шығармашылық қабілеттерін дамытуға өте қолайлы әрі тиімді деп саналады (4-кесте). Математика сабағында «синквейн» әдісін қолдану оқушылардың ақпараттарды өңдей алуымен қатар, тақырыпқа байланысты өз көзқарасын пайымдай алуға үйретеді, яғни кері байланыс жасай алу дағдысын қалыптастырады [11].

Кесте 4 Синквейн жазу ережесі

1-қатар	*Тақырып (1 сөз – зат есім)*	*Анықталмағандық*
2-қатар	*Қасиеттері (2 сөз-сын есім)*	*Бөлшек немесе дәрежелік-көрсеткіштік*
3-қатар	*Іс-әрекет (3 сөз - етістік)*	*Анықтау (түрін), жеңілдету, ашу*
4-қатар	*Мағынасы (4 сөз – сөз тіркесі)*	*Бұл өрнектің мәні бірмәнді емес*
5-қатар	*Алғашқы сөзбен байланысы*	*Күдік*

Дискуссия

10-сынып (жаратылыстану-математикалық бағыт) оқулықтарына талдау жүргізу нәтижесі бойынша келесі артықшылықтарын атап өткен жөн: зерттеу тақырыбы бойынша екі оқулықта да теориясы мен мысалдар арқылы жақсы түсіндірілген, деңгейлік есептер жүйелі түрде берілген. А.Е. Әбілқасымова ж.б авторлығындағы оқулықта жаңа білімді игеруге арналған түйінді сөздер қосымша түрде берілген, бұл оқушылардың кілт сөздермен жұмыс жасауын дамытады. Сондай-ақ осы оқулықта шек және шексіздік (лимит) белгілерінің енгізілу тарихы келтірілген. Ә.Н. Шыныбеков ж.б. авторлығындағы оқулықта топтық жұмыс ретінде дәлелдеуге арналған тапсырмалар қарастырылған. Алайда функция графигінің асимптоталарын табуға есептер өте аз берілген. Аталған оқулықтар бойынша артықшылықтарын көрсете отырып, 10-сыныптарда «Шетелдік» топ және «Кіммен бірге?» әдістері арқылы топтарға бөліп, «Стоп кадр» және «Синквейн» әдістерінің көмегімен топтық-жұптық, жеке жұмыстар оқушылардың өзіндік жұмыстарды орындауы арқылы тақырыпты меңгеру деңгейін, топтық жұмыстарды орындауы арқылы топпен жұмыс жасау, белсенділік таныту және топтағы зерттеушілік, жауапкершілік қабілеттері қалыптастырылады.

Конфуцийдің «Маған айтып берсең - ұмытып қаламын, көрсетсең - есімде сақтаймын, өзіме жасатсаң үйренемін» деген қанатты сөздеріне сүйене келе оқушының өзбетінше сабақты үйреніп, бір-біріне түсіндіруіне жол аша отырып оқытуды жөн көрдік.

Қорытынды

Зерттеу жұмысын жүргізу барысында зерттеу тақырыбына байланысты әдебиеттер қаралды, жоғары сыныптарға арналған оқу бағдарламасы зерттелді, жалпы орта мектептерге арналған «Алгебра және анализ бастамалары» пәнінен оқу бағдарламасына салыстырмалы талдау жасалды және оқушылардан бақылау және сауалнама алынды.

Зерттеу жұмысы Сауран ауданы, Ескі Иқан ауылындағы №1 жалпы орта мектебінде жүргізілді. Зерттеу жұмысын жүргізуге 52 оқушы атсалысты, олардың 8-і (16 пайызы) зерттеу жұмысымен таныс емес екендігі, ал 19-ы (37 пайызы) зерттеу жұмысына қызығушылық білдіргені анықталды. Әдістемелік жұмысты жүргізер алдында оқушылардың тек 3-еуі (7 пайызы) берілген тапсырмаларды орындай алса, әдістемелік жұмыстарды бергеннен кейін оқушылардың 14-і (26 пайызы) тапсырмаларды еркін орындай алатындығы анықталды.

Зерттеу нәтижелерін жалпы білім беретін мектептің жоғары сыныптарына сабақ беретін математика саласының мұғалімдері «Алгебра және анализ бастамалары» пәнінен оқу-әдістемелік құрал немесе қосымша материал ретінде пайдалануына болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Искакова У.А. Некоторые вопросы к методике преподавания теории пределов. Қостанай: «Мемлекеттік Педагогикалық Университеті», 2012.-151-153с.
2. Мышкис А.Д. Нужно ли изучать в школе высшую математику // 2004, 24с.

3. Вайнштейн И.И., Манушкина М.М. К методике преподавания темы «Предел функции» // Сибирский педагогический журнал, 2011, №5 изд. 64-69с.
4. Мордкович А.Г. О некоторых проблемах школьного математического образования / Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы I Всероссийской научно практической конференции. Красноярск, 14–15 ноября 2013 г. / отв.ред. Л.В. Шкерина; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. университет им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2013
5. Матыцина Т.Н., Гладкова Е.А. // Об одном аспекте преподавания теории пределов Костромский гос. университет им. Н. А. Некрасова, г. Костром 2015.
6. Гладкий А. В. О преподавании алгебры и начал анализа в школе, // Матем. обр., 2009, №3 выпуск, 7-16с.
7. Станиславовна А. А., Владимировна Л. М. //Об изучении предела в школьном курсе математики. Московский технологический институт, Государственное бюджетное образовательное учреждение Школа №72 // 2017, 25-30с.
8. Козлова В. В., Кондакова А. М. Фундаментальное ядро содержания общего образования // 2011, 37-39с.
9. Расчетно-графические задания по дисциплине "Математические методы и модели исследования операций". – Уфа, 2008.
10. Kalimbetov B., Kalmatayeva B., Ibragimov R., Omarova I., Training and research studies of future bachelor’s mathematicians during the study limits // Opcion. – 2019. – Año. 35, № 88. 3. – С. 346 – 363. ISSN 1012 – 1587 / ISSNe: 2477 – 9385.
11. Калимбетов Б.Т., Омарова И.М.Formation of project – and research skills of student in calculation of limits // Third Intern. Conf. on Analysis and Appl. Math. – Almaty, 2016. – p. 192.

REFERENCES

1. İskakova U.A. Nekotorye voprosy k metodike prepodavania teorii predelov [Some questions to the methodology of teaching the theory of limits]. Qostanai: «Memlekettık Pedagogikalyq Universitetı», 2012.-151-153s. [in Russian]
2. Myşkis A.D. Nujno li izuchät v şkole vysşuiu matematiku [Do need to study higher mathematics at school] // 2004, 24s. [in Russian]
3. Vainştein İ.İ., Manuşkina M.M. K metodike prepodavania temy «Predel funksii» // Sibirski pedagogicheski jurnal [To the methodology of teaching the topic "Limit of function"] // Siberian Pedagogical Journal, 2011, №5 part. P 64-69. [in Russian]
4. Mordkovich A.G. O nekotoryh problemah şkölnogo matematicheskogo obrazovania / Aktuälnye problemy kachestva matematicheskoi podgotovki şkölnikov i studentov: metodologicheski, teoreticheski i tehnologicheski aspekty: materialy I Vserossiskoi nauchno prakticheskoi konferensii.[About some problems of school mathematical education / Actual problems of the quality of mathematical training of schoolchildren and students: methodological, theoretical and technological aspects: materials of the I All-Russian Scientific and Practical Conference] Krasnoiarsk, 14–15 noiabrä 2013 g. / otv.red. L.V. Şkerina; red. kol.; Krasnoiar. gos. ped. universitet im. V.P. Astäfeva. Krasnoiarsk, 2013[in Russian]
5. Matysina T.N., Gladkova E.A. // Ob odnom aspekte prepodavania teorii predelov [About one aspect of teaching the theory of limits] Kostromski gos. universitet im. N. A. Nekrasova, g. Kostrom 2015. [in Russian]

6. Gladki A. V. O prepodavanii algebry i nachal analiza v şkole [About teaching algebra and the principles of analysis at school] // Matem. obr., 2009, №3 vypusk, 7-16s. [in Russian]
7. Stanislavovna A. A., Vladimirovna L. M. //Ob izuchenii predela v şkölnom kurse matematiki. [About studying the limit in the school mathematics course] Moskovski tehnologicheski institut, Gosudarstvennoe büdjetnoe obrazovatelnoe uchrejdenie Şkola №72 // 2017, 25-30s. [in Russian]
8. Kozlova V. V., Kondakova A. M. Fundamentälnoe iadro soderjania obşego obrazovania [The fundamental core of the content of general education] // 2011, 37-39s. [in Russian]
9. Raschetno-graficheskie zadania po disipline "Matematicheskie metody i modeli issledovania operasi"[Computational and graphical tasks in the discipline "Mathematical methods and models of operations research"] – Ufa, 2008. [in Russian]
10. Kalimbetov B., Kalmatayeva B., Ibragimov R., Omarova I., Training and research studies of future bachelor's mathematicians during the study limits // Opcion. – 2019. – Año. 35, № 88. Z. – S. 346 – 363. ISSN 1012 – 1587 / ISSNe: 2477 – 9385.
11. Kalimbetov B.T., Omarova İ.M.Formation of project – and research skills of student in calculation of limits // Third Intern. Conf. on Analysis and Appl. Math. – Almaty, 2016. – p. 192

УДК 517.953;
ГРНТИ 27.31.44
https://doi.org/10.47526/2023-3/2524-0080.03

Ф.А.ДАДАБАЕВА[1] , Б.Х.ТУРМЕТОВ[2]
[1]*магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, Туркестан),E-mail:* fazilat007@gmail.com
[2]*доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, Туркестан),* E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Аннотация. В данной работе вводится понятие нелокального бигармонического оператора. При введении этого оператора используются отображения типа инволюции. А именно в дифференциальном выражении этого оператора кроме переменных $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ участвуют также преобразованные аргументы с отображениями вида $S_j x=\left(x_1,...,x_{j-1},p_j-x_j,x_{j+1},...,x_n\right),1\le j\le n$ и их произведения. В n-мерном параллелепипеде для заданного нелокального бигармонического оператора рассматриваются спектральные задачи с краевымы условиями типа Дирихле и Неймана. В явном виде построены собственные функции и собственные значения рассматриваемых задач. При построении этих элементов существенно используются собственные функции и собственные значения классического бигармонического оператора с краевымы условиями типа Дирихле и Неймана. Доказаны теоремы о ортономированности и полноты систем собственных функций рассматриваемых задач. Приведены примеры соответствующии для частных случаев параметров участвующих в рассматриваемых задачах. Кроме того, в двухмерном случае для соответствующего нелокального бигармонического оператора исследованы также спектральные вопросы краевых задач типа Самарского-Ионкина. Найдены собственные и присоединенные функции рассматриваемой задачи и доказаны теоремы о полноте данных систем.

Ключевые слова: Спектральная задача, нелокальный оператор, бигармонический оператор, задача Дирихле, задача Неймана, задача Самарского-Ионкина, собственные функции, собственные значения, присоединенные функции, полнота.

Ф.А.Дадабаева[1] , Б.Х.Турметов[2]
[1]*Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты, (Қазақстан, Түркістан), E-mail:* fazilat007@gmail.com
[2]*физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан), E-mail:* batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Бейлокал бигармониялық операторлар үшін кейбір шеттік есептердің меншікті функциялары және меншікті мәндері туралы

Аңдатпа. Берілген жұмыста бейлокал бигармониялық оператор туралы түсінік енгізіледі. Бұл операторды енгізу кезінде инволюция түріндегі бейнелеулер қолданылады. Дәлірек айтқанда, бұл оператордың дифференциалдық өрнегінде $x=(x_1,x_2,...,x_n)$

айнымалысынан басқа $S_j x = \left(x_1,...,x_{j-1}, p_j - x_j, x_{j+1},...,x_n\right), 1 \le j \le n$ түріндегі бейнелеуі және олардың көбейтіндісі бар түрлендірілген аргументі де қатысады. Берілген бейлокал бигармониялық оператор үшін n-ші ретті параллелепипедте шеттік шарттары Дирихле және Нейман түріндегі спектральді есептер қарастырылады. Қарастырылап отырған есептердің меншікті функциялары мен меншікті мәндері нақты түрде құрастырылған. Бұл элементтерді құру кезінде Дирихле және Нейман түріндегі шеттік шарттары бар классикалық бигармониялық операторлдың меншікті функциялары мен меншікті мәндері айтарлықтай қолданылады. Қарастырылып отырған есептерге қатысты параметрлердің дербес жағдайларына сәйкес келетін мысалдар келтірілген. Сонымен қатар, екі өлшемді жағдайда сәйкес бейлокал бигармониялық оператор үшін Самарский-Ионкин типті шеттік есептердің спектрлік мәселелері де зерттелді. Қарастырылып отырған есептің меншікті және қосалқы функциялары табылды және осы жүйелердің толықтығы туралы теоремалар дәлелденді.

Түйін сөздер: Спектральді есеп, бейлокал оператор, бигармониялық оператор, Дирихле есебі, Нейман есебі, Самара-Ионкин есебі, меншікті функциялар, меншікті мәндер, қосалқы функциялар, толымдылық.

F.A.Dadabayeva[1] , B.Kh. Turmetov[2]

[1]master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), E-mail: fazilat007@gmail.com

[2]doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

On eigenfunctions and eigenvalues of some boundary value problems for a nonlocal biharmonic operator

Annotation. In this note, the concept of a nonlocal biharmonic operator is introduced. When introducing this operator, mappings of the type of involution are used. Namely, in the differential expression of this operator, in addition to the variables $x = (x_1, x_2,..., x_n)$, transformed arguments with mappings of the form $S_j x = \left(x_1,...,x_{j-1}, p_j - x_j, x_{j+1},...,x_n\right), 1 \le j \le n$ and their multiplication also involved. Spectral problems with Dirichlet and Neumann-type boundary conditions are considered in an n-dimensional parallelepiped for a given nonlocal biharmonic operator. The eigenfunctions and eigenvalues of the problems under consideration are explicitly constructed. When constructing these elements, eigenfunctions and eigenvalues of the classical biharmonic operator with Dirichlet and Neumann type boundary conditions are essentially used. Theorems on the orthonomization and completeness of the systems of eigenfunctions of the problems under consideration are proved. Examples of the corresponding parameters for special cases involved in the problems under consideration are given. In addition, in the two-dimensional case for the corresponding nonlocal biharmonic operator, spectral issues of boundary value problems of the Samarsky-Ionkin type are also investigated. The proper and attached functions of the problem under consideration are found and theorems on the completeness of these systems are proved.

Keywords: Spectral problem, nonlocal operator, biharmonic operator, Dirichlet problem, Neumann problem, Samarsky-Ionkin problem, eigenfunctions, eigenvalues, attached functions, completeness.

Введение

Пусть $p_j > 0, j = 1, 2, ..., n$, $\Pi = \left\{x \in R^n : 0 < x_j < p_j\right\}$-параллелепипед, $S_j x = \left(x_1,...,x_{j-1}, p_j - x_j, x_{j+1},...,x_n\right), 1 \le j \le n$. Очевидно, что $S_j^2 = E$. Рассмотрим всевозможные произведение отображений S_j, т.е. $S_{12} = S_1 S_2, S_{123} = S_1 S_2 S_3, \ldots$. Общее количество таких отображений с учетом тождественного отображения $S_0 x = x$ равно 2^n. Для нумерации таких отображений воспользуемся двоичной системе счисления. А именно, если i индекс суммирования, то для него в двоичной системе счисления верно равенство $(i_n \ldots i_1)_2 \equiv i$, где $i_k = 0,1$ при $k = 1, \ldots, n$. Тогда можно рассматривать отображения $S_n^{i_n} \ldots S_1^{i_1}$. Используя эти отображения введем оператор

$$Lu(x) = \sum_{i=0}^{2^n - 1} a_i \Delta^2 u\left(S_n^{i_n} \ldots S_1^{i_1} x\right),$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{2^n - 1}$ – некоторый набор действительных чисел, Δ^2 - бигармонический оператор, т.е. $\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^2$.

Отметим, что различные варианты нелокального оператора Лапласа с отображениями вида $S_n^{i_n} \ldots S_1^{i_1}$ были рассмотрены в работах [1,2]. В этих работах для соответствующего нелокального уравнения Пуассона исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач. Спектральные вопросы для нелокального оператора Лапласа изучены в работах [3,4]. В двухмерном случае аналогичные исследования проводились в работах [5-8].

В настоящей работе аналогичные исследования мы проводим для нелокального аналога бигармонического оператора. Переходим к постановке задач, которые мы будем изучать в настоящей работе. Рассмотрим в области Π следующие задачи:

Задача 1 (Задача типа Дирихле). Найти функцию $u(x) \neq 0$ из класса $u(x) \in C^4\left(\Pi\right) \cap C^2\left(\bar{\Pi}\right)$ и число $\lambda \in \square$ удовлетворяющие условиям

$$Lu(x) = \lambda u(x) \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} u(0, x_2, ..., x_n) = u(p_1, x_2, ..., x_n) = 0, 0 \le x_j \le p_j, j = 2, ..., n, \\ u(x_1, 0, ..., x_n) = u(x_1, p_2, ..., x_n) = 0, 0 \le x_j \le p_j, j = 1, ..., n, j \neq 2, \\ \ldots \\ u(x_1, x_2, ..., 0) = u(x_1, x_2, ..., p_n) = 0, 0 \le x_j \le p_j, j = 1, ..., n-1 \end{gathered}, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} u_{x_1 x_1}(0, x_2, ..., x_n) = u_{x_1 x_1}(p_1, x_2, ..., x_n) = 0, 0 \le x_j \le p_j, j = 2, ..., n, \\ u_{x_2 x_2}(x_1, 0, ..., x_n) = u_{x_2 x_2}(x_1, p_2, ..., x_n) = 0, 0 \le x_j \le p_j, j = 1, ..., n, j \neq 2, \\ \ldots \\ u_{x_n x_n}(x_1, x_2, ..., 0) = u_{x_n x_n}(x_1, x_2, ..., p_n) = 0, 0 \le x_j \le p_j, j = 1, ..., n-1 \end{gathered}. \tag{1.3}$$

Задача 2 (Задача типа Неймана). Найти функцию $u(x) \neq 0$ из класса $u(x) \in C^4\left(\Pi\right) \cap C^3\left(\bar{\Pi}\right)$ и число $\lambda \in \square$ удовлетворяющее уравнению (1.1) и условиям

$$\begin{array}{l} u_{x_1}(0,x_2,...,x_n)=u_{x_1}(p_1,x_2,...,x_n)=0,0\le x_j\le p_j,\ j=2,...,n, \\ u_{x_2}(x_1,0,...,x_n)=u_{x_2}(x_1,p_2,...,x_n)=0,0\le x_j\le p_j,\ j=1,...,n,\ j\ne 2, \\ \dots \\ u_{x_2}(x_1,x_2,...,0)=u_{x_2}(x_1,x_2,...,p_n)=0,0\le x_j\le p_j,\ j=1,...,n-1 \end{array}, \tag{1.4}$$

$$\begin{array}{l} u_{x_1x_1x_1}(0,x_2,...,x_n)=u_{x_1x_1x_1}(p_1,x_2,...,x_n)=0,0\le x_j\le p_j,\ j=2,...,n, \\ u_{x_2x_2x_2}(x_1,0,...,x_n)=u_{x_2x_2x_2}(x_1,p_2,...,x_n)=0,0\le x_j\le p_j,\ j=1,...,n,\ j\ne 2, \\ \dots \\ u_{x_nx_nx_n}(x_1,x_2,...,0)=u_{x_nx_nx_n}(x_1,x_2,...,p_n)=0,0\le x_j\le p_j,\ j=1,...,n-1 \end{array}. \tag{1.5}$$

Аналогичные задачи для уравнения четвертого порядка в случае $n=2$ исследовались в работах [9-11].

2. Исследования задачи 1.

Пусть $T_k(t)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}t, k=1,2,\dots$. Для системы $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ известно следующее утверждение (см.например,[12]).

Лемма 2.1. Система $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ обладают следующими свойствами:

1) система $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $L_2[0,p]$;

2) система $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в пространстве $L_2[0,p]$.

Лемма 2.2. Для элементов системы $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ справедливы следующие равенства:

1) $T_k(p-t)=(-1)^{k+1}T_k(t)$;

2) $T_k^{(4)}(t)=\left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 T_k(t)$.

Доказательство. По определению для $T_k(p-t)$ имеем

$$T_k(p-t)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}(p-t)=\sqrt{\frac{2}{p}}\left[\sin k\pi\cdot\cos\frac{k\pi}{p}t-\cos k\pi\cdot\sin\frac{k\pi}{p}t\right]=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{p}}\cos k\pi\cdot\sin\frac{k\pi}{p}t=-(-1)^k\sqrt{\frac{2}{p}}\cdot\sin\frac{k\pi}{p}t=(-1)^{k+1}T_k(t).$$

Свойство 1) доказано. Далее, так как

$$T_k''(t)=\frac{d^2}{dt^2}\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}t\right)=-\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2\sin\frac{k\pi}{p}t,$$

то для $T_k^{(4)}(t)$ имеем

$$T_k^{(4)}(t)=\frac{d^4}{dt^4}\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}t\right)=-\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\frac{k\pi}{p}t\right)=\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{k\pi}{p}\right)^4\sin\frac{k\pi}{p}t=\left(\frac{k\pi}{p}\right)^4T_k(t)\,.$$

Лемма доказана.

Следствие 2.1. Элементы системы $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ являются собственными функциями следующей спектральной задачи:

$$y^{(4)}(t)=\mu^2y(t),0<t<p\,, \tag{2.1}$$

$$y(0)=y(p)=0,y''(0)=y''(p)=0\,. \tag{2.2}$$

Соответствующие собственные значения определяются равенствами

$$\mu_k^2=\left(\frac{k\pi}{p}\right)^4,\mu_k=\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2,k=1,2,\ldots.$$

В работе [13] доказана следующее утверждение.

Лемма 2.3. Пусть области $G\subset R^n$ и $D\subset R^m$ ограничены, система функций $\psi_j(y),\, j=1,2,\ldots,$ ортонормально и полна в $L_2(D)$ и при каждом $j=1,2,\ldots$ система функций $\varphi_{kj}(x),k=1,2,\ldots,$ ортонормально и полна в $L_2(G)$. Тогда система функций

$$h_{kj}(x,y)=\varphi_{kj}(x)\psi_j(y),k,\,j=1,2,\ldots,$$

ортонормально и полна в $L_2(G\times D)$.

Из этой леммы и леммы 2.1 вытекают следующие утверждения.

Следствие 2.2. Если $X_k(x_1)=\sqrt{\frac{2}{p_1}}\sin\frac{k\pi}{p_1}x_1$ и $Y_j(x_2)=\sqrt{\frac{2}{p_2}}\sin\frac{j\pi}{p_2}x_2,k,\,j=1,2,\ldots,$ то система функций

$$u_{kj}(x_1,x_2)=X_k(x_1)Y_j(x_1)\equiv\sqrt{\frac{2}{p_1}}\sin\frac{k\pi}{p_1}x_1\cdot\sqrt{\frac{2}{p_2}}\sin\frac{j\pi}{p_2}x_2,k,\,j=1,2,\ldots,$$

ортонормально и полна в $L_2((0,p_1)\times(0,p_2))$.

Следствие 2.3. Система функций

$$u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=C(n,p_1,\ldots,p_n)\prod_{j=1}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j},\,k_j\in N,\,j=1,2,\ldots,n\,,$$

ортонормально и полна в $L_2((0,p_1)\times(0,p_2)\times\ldots\times(0,p_n))$. Здесь $C(n,p_1,\ldots,p_n)=2^{n/2}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p_j}}$.

Введем следующие числа $\varepsilon^D_{k_1k_2\ldots k_n}=\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n}a_i$, где где $|i|$ означает $|i|=i_1+i_2+\ldots+i_n$.

Теорема 2.1. Пусть для всех $k_j\in N,\ j=1,2,\ldots,n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_n}\neq 0$. Тогда система функций $\left\{u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)\right\}_{k_j=1}^{\infty},\ j=1,2,\ldots,n$ являются собственными функциями задачи 1. Соответствующие собственные значения определяются равенствами

$$\lambda^D_{k_1k_2\ldots k_n}=\varepsilon^D_{k_1k_2\ldots k_n}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n},\ \mu_{k_1k_2\ldots k_n}=\pi^2\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j^2}{p_j^2},k_j\in N,\ j=1,2,\ldots,n. \tag{2.4}$$

Доказательство. Очевидно, что функции $u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ по построению удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3). Проверим выполнение уравнения (1.1). Если к функции $u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ применим оператор $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},1\le i\le n$, то

$$\frac{\partial^2 u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)}{\partial x_i^2}=C\left(n,p_1,\ldots,p_n\right)\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\sin\frac{k_i\pi x_i}{p_i}\right)=$$

$$=-\left(\frac{k_i\pi}{p_i}\right)^2C\left(n,p_1,\ldots,p_n\right)\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}\cdot\left(\sin\frac{k_i\pi x_i}{p_i}\right)=-\left(\frac{k_i\pi}{p_i}\right)^2u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Отсюда приеменяя к этой функции оператор Лапласа получаем

$$\Delta u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i\pi}{p_i}\right)^2\right)u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Если к функции $u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ применим бигармонический оператор, то из последнего равенства следует

$$\Delta^2u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i\pi}{p_i}\right)^2\right)^2u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\pi^4\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i^2}{p_i^2}\right)^2u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\Delta^2u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^D_{k_1k_2\ldots k_n}(x),\mu_{k_1k_2\ldots k_n}=\pi^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i^2}{p_i^2}\right).$$

Отсюда при любом $m\in\{1,2,\ldots,n\}$ получаем

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2...k_n}(x_1,...,x_{m-1},p_m-x_m,x_{m+1},...,x_n)=\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x_1,...,x_{m-1},p_m-x_m,x_{m+1},...,x_n)=$$

$$=\mu^2_{k_1k_2...k_n}C(n,p_1,...,p_n)\sin\frac{k_m\pi(p_m-x_m)}{p_m}\cdot\prod_{j=1,\,j\neq m}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}=$$

$$=\mu^2_{k_1k_2...k_n}C(n,p_1,...,p_n)(-1)^{k_m+1}\sin\frac{k_m x_m}{p_m}\cdot\prod_{j=1,\,j\neq m}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}=\mu^2_{k_1k_2...k_n}C(n,p_1,...,p_n)(-1)^{k_m+1}\prod_{j=1}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}=$$

$$=(-1)^{k_m+1}\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x)\,.$$

Пусть теперь $0\le i\le 2^n-1$ или $i=(i_n...i_2i_1)_2$, где $i_m=0$ или $i_m=1$ для всех $1\le m\le n$. Тогда если $i_m=1$, то

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2...k_n}(S_m^{i_m}x)=\mu^2_{k_1k_2...k_n}C(n,p_1,...,p_n)\sin\frac{k_m\pi(p_m-x_m)}{p_m}\cdot\prod_{j=1,\,j\neq m}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}=$$

$$=(-1)^{k_m+1}\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2...k_n}(S_m^{i_m}x)=(-1)^{i_m(k_m+1)}\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x)\,. \tag{2.4}$$

Очевидно, что равенство (2.4) верно и для случая $i_m=0$. Отсюда следует, что если i_m и i_j принимают значения 0 или 1, то

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2...k_n}(S_m^{i_m}S_j^{i_j}x)=(-1)^{i_m(k_m+1)+i_j(k_j+1)}\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x)\,.$$

Тогда в общем случае получаем следующее равенство

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2...k_n}\left(S_n^{i_n}...S_2^{i_2}S_1^{i_1}x\right)=(-1)^{i_1(k_1+1)+i_2(k_2+1)+...+i_n(k_n+1)}\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x)=$$

$$=(-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+...+i_nk_n}\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x).$$

Теперь если применим к функции оператор L, то из предыдущих равенств следует

$$Lu^D_{k_1k_2...k_n}(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta^2u^D_{k_1k_2...k_n}\left(S_n^{i_n}...S_1^{i_1}x\right)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i(-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+...+i_nk_n}\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x)=$$

$$=\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x)\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+...+i_nk_n}a_i\right)=\varepsilon^D_{k_1k_2...k_n}\mu^2_{k_1k_2...k_n}u^D_{k_1k_2...k_n}(x)\,.$$

Таким образом, функция $u^D_{k_1k_2...k_n}(x)$ кроме условии (1.2) и (1.3) удовлетворяет и равенству

$$Lu^D_{k_1k_2...k_n}(x)=\lambda^D_{k_1k_2...k_n}u_{k_1k_2...k_n}(x),$$

т.е. уравнению (1.1). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если для некоторого $m_1,m_2,...,m_n\in N$ выполняется условие

$$\varepsilon^D_{k_1k_2...k_n}=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i(-1)^{|i|+i_1m_1+i_2m_2+...+i_nm_n}=0,$$

то число $\lambda=0$ является бесконечно кратным собственным значением.

Замечание 2.2. Если для всех $k_j\in N,\ j=1,2,...,n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1k_2...k_n}>0$, то все собственные значения задачи 1 являются положительными.

Пример 2.1. Пусть $n=2$. Тогда уравнение (1.1) имеет вид

$$a_0\Delta^2u(x_1,x_2)+a_1\Delta^2u(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2u(x_1,p_2-x_2)+a_2\Delta^2u(p_1-x_1,p_2-x_2)=\lambda u(x_1,x_2).$$

а краевые условия записываются в виде

$$u(0,x_2)=u(p_1,x_2)=0,0\le x_2\le p_2;u(x_1,0)=u(x_1,p_2)=0,0\le x_1\le p_1,$$

$$u_{x_1x_1}(0,x_2)=u_{x_1x_1}(p_1,x_2)=0,0\le x_2\le p_2;u_{x_2x_2}(x_1,0)=u_{x_2x_2}(x_1,p_2)=0,0\le x_1\le p_1.$$

Собственные функции этой задаются в виде

$$u^D_{m,k}(x)=\frac{1}{\sqrt{p_1p_2}}\sin\frac{m\pi x_1}{p_1}\sin\frac{k\pi x_2}{p_2},m,k=1,2,...,$$

а соответствующие им собственные значения имеют вид

$$\lambda^D_{m,k}=\varepsilon^D_{m,k}\pi^4\left(\frac{m^2}{p_1^2}+\frac{k^2}{p_2^2}\right)^2,m,k=1,2,....,$$

где $\varepsilon^D_{m,k}$ имеет вид

$$\varepsilon^D_{m,k}=a_0+(-1)^{m+1}a_1+(-1)^{k+1}a_2+(-1)^{k+m}a_3.$$

Более точно $\varepsilon^D_{m,k}$ можно записать в виде

$$\varepsilon^D_{(2m-1),(2k-1)}=a_0+a_1+a_2+a_3;\ \varepsilon^D_{(2m-1),2k}=a_0+a_1-a_2-a_3;$$

$$\varepsilon^D_{2m,(2k-1)}=a_0-a_1+a_2-a_3;\ \varepsilon^D_{2m,2k}=a_0-a_1-a_2+a_3,m,k=1,2,....$$

3. Исследования задачи 2.

В этом пункте исследуем задачу 2. На отрезке $[0, p]$ рассмотрим систему функции

$$Y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{p}}, Y_k(t) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi}{p} t, k \in N .$$

Как и в случае системы $T_k(t)$ имеет место следующие утверждения.

Лемма 3.1. Система $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ обладают следующими свойствами:

1) система $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $L_2[0, p]$;

2) система $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $L_2[0, p]$.

Лемма 3.2. Для элементов системы $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ справедливы следующие равенства:

1) $Y_k(p-t) = (-1)^k Y_k(t), k \geq 0$;

2) $Y_k^{(4)}(t) = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t); Y_k^{(4)}(p-t) = (-1)^k \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t)$.

Доказательство. Очевидно, что для функции $Y_0(t)$ имеет место равенство $Y_0(p-t) = (-1)^0 Y_0(t)$. Если $k \geq 1$, то для $Y_k(p-t)$ имеем

$$Y_k(p-t) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi}{p}(p-t) = \sqrt{\frac{2}{p}} \left[\cos k\pi \cdot \cos\frac{k\pi}{p} t - \sin k\pi \cdot \sin\frac{k\pi}{p} t\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{p}} \cos k\pi \cdot \cos\frac{k\pi}{p} t = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{p}} \cdot \cos\frac{k\pi}{p} t = (-1)^k Y_k(t).$$

Свойство 1) доказано. Далее, дифференцируя дважды функцию $Y_k(t)$ получаем

$$Y_k''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi}{p} t\right) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 \cos\frac{k\pi}{p} t .$$

Отсюда для $Y_k^{(4)}(t)$ имеем

$$Y_k^{(4)}(t) = \frac{d^4}{dt^4}\left(\sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi}{p} t\right) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\frac{k\pi}{p} t\right) = \sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 \cos\frac{k\pi}{p} t = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) .$$

Из этого равенства и свойства 1) следует

$$Y_k^{(4)}(p-t) = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(p-t) = (-1)^k \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) .$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. Если выполняются условия $a_0 \pm a_1 \neq 0$, то элементы системы $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ являются собственными функциями следующей спектральной задачи:

$$a_0 y^{(4)}(t) + a_1 y^{(4)}(p-t) = \lambda y(t), 0 < t < p, \tag{3.1}$$

$$y'(0) = y'(p) = 0, y'''(0) = y'''(p) = 0. \tag{3.2}$$

Соответствующие собственные значения определяются равенствами

$$\lambda_k^N = \varepsilon_k \mu_k^2, \mu_k = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2, k = 0,1,\ldots,$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} a_0 + a_1, k = 2m, m = 0,1,\ldots \\ a_0 - a_1, k = 2m-1, m = 1,2,\ldots \end{cases}.$$

Доказательство. Если воспользуемся свойством 2) функции $Y_k(t)$ из Леммы 3.2, то

$$a_0 Y_k^{(4)}(t) + a_1 Y_k^{(4)}(p-t) = a_0 \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) + a_1(-1)^k \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) =$$

$$= \left(a_0 + (-1)^k a_1\right)\left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) = \varepsilon_k \mu_k^2 Y_k(t) = \lambda_k^N Y_k(t).$$

Лемма доказана.

Следствие 3.1. Если выполняются условия $a_0 \pm a_1 \neq 0$, то система собственных функции задачи (3.1), (3.2) является ортонормированной и полной в пространстве $L_2[0, p]$.

Пусть $k, m = 0,1,2,\ldots$ и

$$u_{00}^N(x_1, x_2) = Y_0(x_1) \cdot Y_0(x_2) \equiv \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2}},$$

$$u_{k0}^N(x_1, x_2) = Y_k(x_1) \cdot Y_0(x_2) \equiv \sqrt{\frac{2}{p_1 p_2}} \cos\frac{k\pi}{p_1} x_1, k \in \mathbb{N},$$

$$u_{0m}^N(x_1, x_2) = Y_0(x_1) \cdot Y_m(x_2) \equiv \sqrt{\frac{2}{p_1 p_2}} \cos\frac{m\pi}{p_2} x_1, m \in \mathbb{N}$$

$$u_{km}^{N}(x_1,x_2)=Y_k(x_1)\cdot Y_m(x_2)\equiv\frac{2}{\sqrt{p_1p_2}}\cos\frac{k\pi}{p_1}x_2\cos\frac{m\pi}{p_2}x_2,m,k\in N\ .$$

Пусть $m,k\geq 1$. Рассмотрим действие оператора Δ^2 к функции $u_{km}^{N}(x_1,x_2)$. Имеем

$$\frac{\partial^2 u_{km}^{N}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}=-\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2u_{km}^{N}(x_1,x_2),\frac{\partial^2 u_{km}^{N}(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}=-\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2u_{km}^{N}(x_1,x_2)\ .$$

Отсюда

$$\Delta u_{km}^{N}(x_1,x_2)=-\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]u_{km}^{N}(x_1,x_2),$$

$$\Delta^2 u_{km}^{N}(x_1,x_2)=\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2u_{km}^{N}(x_1,x_2)\ .$$

При преобразовании аргументов имеют место равенства

$$\Delta^2 u_{km}^{N}(p_1-x_1,x_2)=(-1)^k\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2u_{km}^{N}(x_1,x_2)\ ,$$

$$\Delta^2 u_{km}^{N}(x_1,p_2-x_2)=(-1)^m\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2u_{km}^{N}(x_1,x_2)\ ,$$

$$\Delta^2 u_{km}^{N}(p_1-x_1,p_2-x_2)=(-1)^{k+m}\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2u_{km}^{N}(x_1,x_2)\ .$$

Тогда

$$a_0\Delta^2 u_{km}^{N}(x_1,x_2)+a_1\Delta^2 u_{km}^{N}(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2 u_{km}^{N}(x_1,p_2-x_2)+a_3\Delta^2 u_{km}^{N}(p_1-x_1,p_2-x_2)=$$

$$=\left(a_0+(-1)^k a_1+(-1)^m a_2+(-1)^{k+m}a_3\right)\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2u_{km}^{N}(x_1,x_2)\ .$$

Аналогичные равенства справедливы и для функции $u_{k0}^{N}(x_1,x_2)$ и $u_{0m}^{N}(x_1,x_2)$. Действительно, по определению оператора Δ^2 имеем

$$\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^2\left(\sqrt{\frac{2}{p_1p_2}}\cos\frac{k\pi}{p_1}x_1\right)=\sqrt{\frac{2}{p_1p_2}}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}\left(\cos\frac{k\pi}{p_1}x_1\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{p_1p_2}}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}\left(\cos\frac{k\pi}{p_1}x_1\right)=\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^4\sqrt{\frac{2}{p_1p_2}}\cos\frac{k\pi}{p_1}x_1=\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^4 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,.$$

Отсюда,

$$\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)=\left(\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right)^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,,$$

$$\Delta^2 u_{k0}^N(p_1-x_1,x_2)=(-1)^k\left(\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right)^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,,$$

$$\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,p_2-x_2)=(-1)^0\left(\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right)^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,,$$

$$\Delta^2 u_{k0}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=(-1)^{k+0}\left(\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right)^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)$$

Тогда

$$a_0\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)+a_1\Delta^2 u_{k0}^N(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,p_2-x_2)+a_3\Delta^2 u_{k0}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=$$

$$=\left(a_0+(-1)^k a_1+(-1)^0 a_2+(-1)^{k+0}a_3\right)\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right]^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,,$$

и

$$a_0\Delta^2 u_{0m}^N(x_1,x_2)+a_1\Delta^2 u_{0m}^N(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2 u_{0m}^N(x_1,p_2-x_2)+a_3\Delta^2 u_{0m}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=$$

$$=\left(a_0+(-1)^0 a_1+(-1)^m a_2+(-1)^{0+m}a_3\right)\left[\left(\frac{0\cdot\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,.$$

В частности, при любых $a_0,a_1,a_2,a_3\in R$ для функции $u_{00}^N(x_1,x_2)$ получаем

$$a_0\Delta^2 u_{00}^N(x_1,x_2)+a_1\Delta^2 u_{00}^N(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2 u_{00}^N(x_1,p_2-x_2)+a_3\Delta^2 u_{00}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=$$

$$=0\cdot u_{00}^N(x_1,x_2).$$

Если введем обозначение $\varepsilon_{km}^N=a_0+(-1)^k a_1+(-1)^m a_2+(-1)^{k+m}a_3$, то для всех $i,j\ge 0$ имеют место равенства

$$\varepsilon_{2i2j}^N=a_0+a_1+a_2+a_3, \varepsilon_{2i(2j+1)}^N=a_0+a_1-a_2-a_3;$$

$$\varepsilon_{(2i+1)2j}^N=a_0-a_1+a_2-a_3, \varepsilon_{(2i+1)(2j+1)}^N=a_0-a_1-a_2-a_3.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.4. Если выполняются условия $\varepsilon_{km}^N\ne 0$, то элементы системы $\left\{u_{km}^N(x_1,x_2)\right\}_{k,m=0}^{\infty}$ являются собственными функциями следующей спектральной задачи:

$$a_0\Delta^2u(x_1,x_2)+a_1\Delta^2u(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2u(x_1,p_2-x_2)+a_3\Delta^2u(p_1-x_1x_1,p_2-x_2)=$$

$$=\lambda u(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in(0,p_1)\times(0,p_2), \tag{3.3}$$

$$u_{x_1}(0,x_2)=u_{x_1}(p_1,x_2)=0,0\le x_2\le p_2,u_{x_2}(x_1,0)=u_{x_2}(x_1,p_2)=0,0\le x_1\le p_1, \tag{3.4}$$

$$u_{x_1x_1x_1}(0,x_2)=u_{x_1x_1x_1}(p_1,x_2)=0,0\le x_2\le p_2,u_{x_2x_2x_2}(x_1,0)=u_{x_2x_2x_2}(x_1,p_2)=0,0\le x_1\le p_1. \tag{3.5}$$

Соответствующие им собственные значения определяются равенствами

$$\lambda_{km}^N=\lambda_{km}^N\mu_{km}^2, \mu_{km}=\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2, k,m=0,1,\dots.$$

Следствие 3.2. Если выполняются условия $\varepsilon_{km}^N\ne 0$, то система собственных функции задачи (3.3)-(3.5) является ортонормированной и полной в пространстве $L_2[0,p]$.

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть в задаче 2 коэффициенты a_i такие, что для всех $k_j\in\left\{N\cup 0\right\}, j=1,2,\dots,n$ выполняются условия $\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+\dots+i_nk_n}a_i\ne 0$. Тогда собственные функции задачи 2 определяются равенствами

$$u_{k_1k_2\dots k_n}^N(x)=Y_{k_1}(x_1)\cdot Y_{k_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n), k_j\in\left\{N\cup 0\right\}, j=1,2,\dots,$$

а соответствующие им собственные значения имеют вид

$$\lambda_{k_1k_2\dots k_n}^N=\varepsilon_{k_1k_2\dots k_n}^N\mu_{k_1k_2\dots k_n}^2, \mu_{k_1k_2\dots k_n}=\pi^2\sum_{j=1}^n\frac{k_j^2}{p_j^2}, k_j\in\left\{N\cup 0\right\}, j=1,2,\dots,n,$$

где $\varepsilon^N_{k_1k_2\ldots k_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n} a_i$.

Доказательство. Легко видеть, что функции $u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ удовлетворяют условиям (1.4) и (1.5). Покажем, что данная функция удовлетворяет и уравнению (1.1). Если к функции $u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ применим оператор $\frac{\partial^2}{\partial x_q^2}, 1 \le q \le n$, то

$$\frac{\partial^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)}{\partial x_q^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_q^2}\left(Y_{k_1}(x_1)\cdot Y_{k_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n)\right) = -\left(\frac{k_q\pi}{p_q}\right)^2 Y_{k_1}(x_q)\cdot Y_{k_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n) .$$

Отсюда приеменяя к этой функции оператор Лапласа получаем

$$\Delta u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x) = -\left(\sum_{q=1}^{n}\left(\frac{k_q\pi}{p_q}\right)^2\right) u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x) .$$

Из последнего равенства следует

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x) = \left(\sum_{q=1}^{n}\left(\frac{k_q\pi}{p_q}\right)^2\right)^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x) = \pi^4\left(\sum_{q=1}^{n}\frac{k_q^2}{p_q^2}\right)^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x) .$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x) = \mu^2_{k_1k_2\ldots k_n} u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x), \mu_{k_1k_2\ldots k_n} = \pi^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i^2}{p_i^2}\right).$$

Отсюда при любом $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ получаем

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x_1,\ldots,x_{m-1},p_m - x_m, x_{m+1},\ldots,x_n) = \mu^2_{k_1k_2\ldots k_n} u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x_1,\ldots,x_{m-1},p_m - x_m, x_{m+1},\ldots,x_n) =$$

$$= \mu^2_{k_1k_2\ldots k_n} Y_{k_m}(p_m - x_m)\cdot Y_{k_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot Y_{k_{m-1}}(x_{m-1})\cdot Y_{k_{m+1}}(x_{m+1})\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n) =$$

$$= (-1)^{k_m} \mu^2_{k_1k_2\ldots k_n} Y_{k_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot Y_{k_{m-1}}(x_{m-1})\cdot Y_{k_m}(x_m)\cdot Y_{k_{m+1}}(x_{m+1})\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n) =$$

$$= (-1)^{k_m} \mu^2_{k_1k_2\ldots k_n} u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x) .$$

Пусть теперь $0 \le i \le 2^n - 1$ или $i = (i_n \ldots i_2 i_1)_2$, где $i_m = 0$ или $i_m = 1$ для всех $1 \le m \le n$. Тогда если $i_m = 1$, то

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(S_m^{i_m} x) = \mu^2_{k_1k_2\ldots k_n} Y_{k_m}(p_m - x_m)\cdot Y_{k_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot Y_{k_{m-1}}(x_{m-1})\cdot Y_{k_{m+1}}(x_{m+1})\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n) =$$

$$(-1)^{k_m}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(S_m^{i_m}x)=(-1)^{i_mk_m}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x). \tag{3.6}$$

Очевидно, что равенство (3.6) верно и для случая $i_m=0$. Отсюда следует, что если i_m и i_j принимают значения 0 или 1, то

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(S_m^{i_m}S_j^{i_j}x)=(-1)^{i_mk_m+i_jk_j}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x_1,x_2).$$

Тогда в общем случае получаем следующее равенство

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}\left(S_n^{i_n}\ldots S_2^{i_2}S_1^{i_1}x\right)=(-1)^{i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Теперь если применим к функции оператор L, то из предыдущих равенств следует

$$Lu^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}\left(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x\right)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i(-1)^{|i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=$$

$$=\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n}a_i\right)=\varepsilon^N_{k_1k_2\ldots k_n}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\lambda^N_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Таким образом, функция $u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ кроме условии (1.4) и (1.5) удовлетворяет и равенству

$$Lu^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\lambda^N_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x),$$

т.е. уравнению (1.1). Теорема доказана.

4.Исследование задачи типа Самарского – Ионкина.

Пусть a_0, a_1 некоторые действительные числа. Введем оператор

$$L_2u(x_1,x_2)=a_0\Delta^2u(x_1,x_2)+a_1\Delta^2u(1-x_1,x_2).$$

Рассмотрим в области $\Pi_2=(0,1)\times(0,1)$ следующую задачу

Задача 3 (Задача типа Самарского-Ионкина). Найти функцию $u(x)\neq 0$ из класса $u(x)\in C^4\left(\Pi\right)\cap C^3\left(\bar{\Pi}\right)$ и число $\lambda\in\mathbb{C}$ удовлетворяющие условиям

$$L_2u(x_1,x_2)=\lambda u(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in\Pi_2, \tag{4.1}$$

$$u(0,x_2)=u_{x_1x_1}(0,x_2)=0,u_{x_1}(0,x_2)=u_{x_1}(1,x_2),u_{x_1x_1x_1}(0,x_2)=u_{x_1x_1x_1}(1,x_2),0\le x_2\le 1, \tag{4.2}$$

$$u(x_1,0)=u(x_1,1)=u_{x_2x_2}(x_1,0)=u_{x_2x_2}(x_1,1)=0, 0\le x_1\le 1. \qquad (4.3)$$

Сначала находим сопряженную задачу. Пусть $u(x_1,x_2)$ является решением задачи (4.1)-(4.3), а $v(x_1,x_2)$ пока произвольная достаточна гладкая функция. Рассмотрим выражение

$$\left(\Delta^2 u,v\right)=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^4}\right)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 .$$

Сперва рассмотрим интеграл

$$I_1=\int_0^1\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}v(x_1,x_2)dx_1 .$$

Интегрируя по частям этот интеграл, с учетом краевых условий (4.2) и (4.3) получаем

$$I_1=\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}v(x_1,x_2)\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=1}-\int_0^1\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}dx_1=$$

$$=u_{x_1x_1x_1}(1,x_2)v(1,x_2)-u_{x_1x_1x_1}(0,x_2)v(0,x_2)-\int_0^1\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}dx_1=$$

$$=u_{x_1x_1x_1}(1,x_2)\left[v(1,x_2)-v(0,x_2)\right]-\int_0^1\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}dx_1 .$$

Если теперь положим $v(1,x_2)=v(0,x_2)$, то

$$I_1=-\int_0^1\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}dx_1=-\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=1}+\int_0^1\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}dx_1=$$

$$=v_{x_1}(0,x_2)u_{x_1x_1}(0,x_2)-v_{x_1}(1,x_2)u_{x_1x_1}(1,x_2)+\int_0^1\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}dx_1 .$$

В последнем выражении считаем $v_{x_1}(1,x_2)=0$. Тогда с учетом условия $u_{x_1x_1}(0,x_2)=0$ получаем

$$I_1=\int_0^1\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}dx_1=\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Bigg|-\int_0^1\frac{\partial^3 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1=$$

$$=u_{x_1}(1,x_2)v_{x_1x_1}(1,x_2)-u_{x_1}(0,x_2)v_{x_1x_1}(0,x_2)-\int_0^1\frac{\partial^3 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1=$$

$$= u_{x_1}(1,x_2)\underbrace{\left[v_{x_1x_1}(1,x_2)-v_{x_1x_1}(0,x_2)\right]}_{0}-\int_0^1 \frac{\partial^3 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1 =$$

$$= v_{x_1x_1x_1}(0,x_2)\underbrace{u(0,x_2)}_{0}-\underbrace{v_{x_1x_1x_1}(1,x_2)}_{0}u(1,x_2)+\int_0^1 \frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}u(x_1,x_2)dx_1 .$$

Таким образом, если функция $v(x_1,x_2)\in C^4\left(\bar{\Pi}_2\right)$ и удовлетворяет условиям

$$v(0,x_2)=v(1,x_2), v_{x_1x_1}(0,x_2)=v_{x_1x_1}(1,x_2), v_{x_1}(1,x_2)=0, v_{x_1x_1x_1}(1,x_2)=0, 0\le x_2\le 1, \quad (4.4)$$

то справедливо равенство

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}v(x_1,x_2)dx_1=\int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}dx_1 .$$

Аналогично исследуется интеграл

$$I_2=\int_0^1 \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^4}v(x_1,x_2)dx_2 .$$

А именно,

$$I_2=u_{x_2x_2x_2}(x_1,1)\underbrace{v(x_1,1)}_{0}-u_{x_2x_2x_2}(x_1,0)\underbrace{v(x_1,0)}_{0}-\int_0^1 \frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^3}v_{x_2}(x_1,x_2)dx_2 =$$

$$=\underbrace{u_{x_2x_2}(x_1,0)}_{0}v_{x_2}(x_1,0)-\underbrace{u_{x_2x_2}(x_1,1)}_{0}v_{x_2}(x_1,1)+\int_0^1 \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}v_{x_2x_2}(x_1,x_2)dx_2 =$$

$$=u_{x_2}(x_1,1)\underbrace{v_{x_2x_2}(x_1,1)}_{0}-u_{x_2}(x_1,0)\underbrace{v_{x_2x_2}(x_1,0)}_{0}-\int_0^1 \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}v_{x_2x_2x_2}(x_1,x_2)dx_2$$

$$=\underbrace{u(x_1,0)}_{0}v_{x_2x_2x_2}(x_1,0)-\underbrace{u(x_1,1)}_{0}v_{x_2x_2x_2}(x_1,1)+\int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_2^4}dx_2=\int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_2^4}dx_2.$$

Итак, если функция $v(x_1,x_2)$ к дополнению к условиям (4.4) удовлетворяет и условиям

$$v(x_1,0)=v(x_1,1)=v_{x_2x_2}(x_1,0)=v_{x_2x_2}(x_1,1)=0, 0\le x_1\le 1, \quad (4.5)$$

то справедливо равенство

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^4} v(x_1,x_2)dx_2 = \int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_2^4} dx_2 .$$

Наконец при выполнении условий (4.4) и (4.5) для интеграла

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} v(x_1,x_2)dx_1 dx_2$$

получаем

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_{x_2x_2}(x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = -\int_0^1 \int_0^1 u_{x_2x_2}(x_1,x_2)v_{x_1x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} dx_1dx_2 .$$

Следовательно, при выполнении условий (4.4) и (4.5) имеет место равенство

$$\left(\Delta^2 u, v\right) = \int_0^1 \int_0^1 \Delta^2 u(x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 u(x_1,x_2)\Delta^2 v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \left(u, \Delta^2 v\right). \quad (4.6)$$

Заметим, что

$$\int_0^1 \Delta^2 u(1-x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1 = \left(1-x_1=\xi\right) = \int_0^1 \Delta^2 u(\xi,x_2)v(1-\xi,x_2)d\xi .$$

Тогда из равенства (4.6) вытекает

$$\int_0^1 \int_0^1 \Delta^2 u(1-x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 u(x_1,x_2)\Delta^2 v(1-x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \int_0^1 L_2 u(x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 u(x_1,x_2)L_2 v(x_1,x_2)dx_1dx_2 .$$

Таким образом, сопряженная задача определяется с условиями

$$L_2 v(x_1,x_2) = \lambda v(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in \Pi_2 , \quad (4.7)$$

$$v(0,x_2) = v(1,x_2), v_{x_1x_1}(0,x_2) = v_{x_1x_1}(1,x_2), v_{x_1}(1,x_2) = 0, v_{x_1x_1x_1}(1,x_2) = 0, 0 \le x_2 \le 1 , \quad (4.8)$$

$$v(x_1,0) = v(x_1,1) = v_{x_2x_2}(x_1,0) = v_{x_2x_2}(x_1,1) = 0, 0 \le x_1 \le 1 . \quad (4.9)$$

Теперь находим собственные и присоединенные функции задач (4.1)- (4.3) и (4.7)- (4.9). Для этого приведем некоторые известные факты. Рассмотрим следующую одномерную спектральную задачу

$$v''(t)+\mu v(t), 0<t<1, v(0)=0, v'(0)=v'(1) \tag{4.10}$$

В работе [14] показана, что задача (4.10) является несамосопряженной и сопряженной к ней будет задача

$$w''(t)+\nu w(t)=0, 0<t<1, w'(0)=0, w(0)=w(1) \tag{4.11}$$

Собственные значения и собственные функции задачи (4.10) имеют вид

$$\mu_k=(2\pi k)^2, k\ge 0, v_0(t)=t, v_k(t)=\sin(2\pi kt), k\ge 1.$$

Как показано в работе [14] собственные функции $v_k(t)$ при $k\ge 1$ попарно не ортогональны к функции $v_0(t)$ и их система не полна в $L_2(0,1)$. Их можно пополнять до полной системы присоединенными функциями задачи (4.4). Ими являются функции

$$\tilde{v}_k(t)=t\cos(2\pi kt), k=1,2,\dots .$$

Систему собственных и присоединенных функций переобозначим следующим образом:

$$v_0(t)=t, v_{2k-1}(t)=t\cos(2\pi kt), v_{2k}(t)=\sin(2\pi kt), k\ge 1. \tag{4.12}$$

Систему собственных и присоединенных функций сопряженной задачи (4.11) запишем следующим образом:

$$w_0(t)=2, w_{2k-1}(t)=4\cos(2\pi kt), v_{2k}(t)=4(1-t)\sin(2\pi kt), k\ge 1. \tag{4.13}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1 [14]. Для систем функций $\{v_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{w_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ справедливы следующие утверждения:

1) последовательности функций (4.12) и (4.13) образуют биортогональную на интервале $(0,1)$ систему функций, т.е. справедливы равенства

$$\int_0^1 v_i(t)w_j(t)dt=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\ne j\end{cases}.$$

2) последовательности функций (4.12) и (4.13) образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Пусть теперь $y_k(t)=\sqrt{2}\sin k\pi t$. Рассмотрим системы:

$$V_{0k}(x_1,x_2)=y_k(x_2), V_{(2m-1)k}(x_1,x_2)=v_{2m-1}(x_1)\cdot y_k(x_2), V_{2mk}(x_1,x_2)=v_{2m}(x_1)\cdot y_k(x_2), \tag{4.14}$$

$$W_{0k}(x_1,x_2)=w_0(x_1)\cdot y_k(x_2), W_{(2m-1)k}(x_1,x_2)=w_{2m-1}(x_1)\cdot y_k(x_2),$$
$$W_{2mk}(x_1,x_2)=w_{2m}(x_1)\cdot y_k(x_2). \qquad (4.15)$$

Легко показать, что система (4.14) удовлетворяет условиям (4.2) и (4.3), а система (4.15) условиям (4.8) и (4.9).

В работе [15] доказано следующее утверждение.

Лемма 4.2 [15]. Для систем функций $\{V_{mk}(x_1,x_2)\}_{m,k=0}^{\infty}$ и $\{W_{mk}(x_1,x_2)\}_{m,k=0}^{\infty}$ справедливы следующие утверждения:

1) последовательности функций (4.14) и (4.15) образуют биортогональную на множестве $(0,1)\times(0,1)$ систему функций, т.е. справедливы равенства: $\left(V_{km},W_{ij}\right)=1$ если $k=i, m=j$, иначе $\left(V_{km},W_{ij}\right)=0$, где $k,i=1,2,...,m,\ j=0,1,...,$ и

$$\left(V_{km},V_{ij}\right)=\int_0^1\int_0^1 V_{km}(x_1,x_2)V_{ij}(x_1,x_2)dx_1dx_2 .$$

2) последовательности функций (4.14) и (4.15) образуют базис в пространстве $L_2[(0,1)\times(0,1)]$.

Далее, исследуем некоторые дополнительные свойства систем (4.14) и (4.15).

Лемма 4.3. Система функции $\{V_{mk}(x_1,x_2)\}_{m,k=0}^{\infty}$ удовлетворяет следуюшим равенствам

$$\Delta^2 V_{0k}(x_1,x_2)=(k\pi)^4 V_{0k}(x_1,x_2), \qquad (4.16)$$

$$\Delta^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2)=\left[\left(2\pi n\right)^2+\left(k\pi\right)^2\right]^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2), \qquad (4.17)$$

$$\Delta^2 V_{2nk}(x)=\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]^2 V_{2nk}(x)-4(2\pi n)\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]V_{(2n-1)k}(x). \qquad (4.18)$$

Доказательство. Для функции $V_{0k}(x)$ имеем

$$\Delta^2 V_{0k}(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right)\sqrt{2}\sin(k\pi x_2)=(k\pi)^4\sqrt{2}\sin(k\pi x_2)=(k\pi)^4 V_{0k}(x) .$$

Аналогично для функции $V_{(2n-1)k}(x)$ получаем

$$\Delta^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2)=v_{(2n-1)}^{(4)}(x_1)y_k(x_2)+2v_{(2n-1)}''(x_1)y_k''(x_2)+v_{(2n-1)}(x_1)y_k^{(4)}(x_2)=$$

$$=\left[\left(2\pi n\right)^4+2\left(2\pi n\right)^2\left(k\pi\right)^2+\left(k\pi\right)^4\right]v_{(2n-1)}(x_1)y_k(x_2)=$$

$$=\left[\left(2\pi n\right)^2+\left(k\pi\right)^2\right]^2 v_{(2n-1)}(x_1)y_k(x_2)=\left[\left(2\pi n\right)^2+\left(k\pi\right)^2\right]^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2) .$$

И наконец для $V_{2nk}(x_1,x_2)$ имеем

$$\Delta^2 V_{2nk}(x_1,x_2) = v_{2n}^{(4)}(x_1)y_k(x_2) + 2v_{2n}''(x_1)y_k''(x_2) + v_{2n}(x)y_k^{(4)}(x_2) =$$

$$= \left[(2\pi n)^2 + (k\pi)^2\right]^2 v_{2n}(x_1)y_k(x_2) - 4(2\pi n)\left[(2\pi n)^2 + (k\pi)^2\right] v_{2n-1}(x_1)y_k(x_2) =$$

$$= \left[(2\pi n)^2 + (k\pi)^2\right]^2 V_{2nk}(x) - 4(2\pi n)\left[(2\pi n)^2 + (k\pi)^2\right] V_{(2n-1)k}(x).$$

Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.4. Система функции $\{V_{nk}(x_1,x_2)\}_{n,k=0}^{\infty}$ удовлетворяет следуюшим равенствам

$$L_2 V_{0k}(x) = \varepsilon_{k,2}(k\pi)^4 V_{0k}(x), \tag{4.19}$$

$$L_2 V_{(2n-1)k}(x) = \varepsilon_{k,2}\left[\left(2\pi n\right)^2 + \left(k\pi\right)^2\right]^2 V_{(2n-1)k}(x), \tag{4.20}$$

$$L_2 V_{2nk}(x) = \varepsilon_{k,2}\left[(2\pi n)^2 + (k\pi)^2\right]^2 V_{2nk}(x) - 4(2\pi n)\varepsilon_{k,2}\left[(2\pi n)^2 + (k\pi)^2\right] V_{(2n-1)k}(x), \tag{4.21}$$

где обозначено $\varepsilon_{k,2} = a_0 + (-1)^{k+1}a_1$.

Доказательство. Так как $y_k(1-x_2) = (-1)^{k+1}y_k(x_2)$, то из равенств (4.16), (4.17) и (4.18) следуют

$$\Delta^2 V_{0k}(x_1, 1-x_2) = (-1)^{k+1}(k\pi)^4 V_{0k}(x_1,x_2),$$

$$\Delta^2 V_{(2n-1)k}(x_1, 1-x_2) = (-1)^{k+1}\left[\left(2\pi n\right)^2 + \left(k\pi\right)^2\right]^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2),$$

$$\Delta^2 V_{2nk}(x_1, 1-x_2) = (-1)^{k+1}\left[(2\pi n)^2 + (k\pi)^2\right]^2 V_{2nk}(x_1,x_2) -$$
$$-4(2\pi n)(-1)^{k+1}\left[(2\pi n)^2 + (k\pi)^2\right] V_{(2n-1)k}(x_1,x_2).$$

Отсюда получаем выполнение равенств (4.19), (4.20) и (4.21). Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.5. Система функции $\{W_{nk}(x_1,x_2)\}_{n,k=0}^{\infty}$ удовлетворяет следуюшим равенствам

$$L_2 W_{0k}(x_1,x_2) = \varepsilon_{k,2}(k\pi)^4 W_{0k}(x_1,x_2),$$

$$L_2 W_{(2n-1)k}(x) = \varepsilon_{k,2}\left[(2\pi n)^2 + (k\pi y)^2\right]^2 W_{(2n-1)k}(x) - \varepsilon_{k,2}4(2\pi n)\left[(2\pi n)^2 + (k\pi y)^2\right] W_{2nk}(x),$$

$$L_2 W_{2nk}(x) = \varepsilon_{k,2}\left[\left(2\pi n\right)^2 + \left(k\pi\right)^2\right]^2 W_{2nk}(x).$$

Теперь приведем основное утверждение относительно задачи (4.1)-(4.3).

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия $a_0 \pm a_1 > 0$. Тогда относительно задачи (4.1)-(4.3) справедливы следующие утверждения:

1) задача (4.1)-(4.3) является несамосопряженной, сопряженным к ней является задача (4.4)-(4.6);

2) собственными функциями задачи (4.1)-(4.3) являются функции $V_{0k}(x_1,x_2), V_{(2n-1)k}(x_1,x_2), n=1,2,\ldots$. Соответствующие им собственные значения определяются равенствами

$$\lambda_{0k} = \varepsilon_{k,2}(k\pi)^4, \lambda_{(2n-1)k} = \varepsilon_{k,2}\left[\left(2\pi n\right)^2 + \left(k\pi\right)^2\right]^2, n=1,2,\ldots,k=0,1,\ldots;$$

3) присоединенные функции задачи (4.1)-(4.3) можно выбрать в виде $V_{2nk}(x_1,x_2), n=1,2,\ldots;$

4) система собственных и присоединенных функций задач (4.1)-(4.3) и (4.4)-(4.6) являются попарно ортогональными;

5) система собственных и присоединенных функций задачи (4.1)-(4.3) образуют базис в пространстве $L_2[(0,1)\times(0,1)]$;

6) система собственных и присоединенных функций сопряженной задачи (4.4)-(4.6) образуют базис в пространстве $L_2[(0,1)\times(0,1)]$.

Доказательство этой теоремы вытекает из утверждений Лемм 4.2,4.4 и 4.5.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP19677926).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation// Turkish journal of mathematics. – 2019. – Vol.43, No.3. – P.1604 – 1625. doi:10.3906/mat-1901-71
2. Турметов Б.Х., Карачик В. В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2021. – Т.31, № 4. – P. 651 – 667. DOI: 10.35634/vm210409.
3. Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution // Symmetry. – 2021. – Vol.13, No. 1781. – P. 1 – 20. https://doi.org/ 10.3390/ sym13101781.
4. Turmetov B.Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball// Complex Variables Elliptic Equation. – 2023. – Vol.68, No.7. – P. 1204–1218. DOI: 10.1080/17476933.2022.2040021.
5. Yarka U., Fedushko S., Vesely P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation// Mathematics. – 2020. – Vol.8, No.2108. – P. 1 – 13. doi:10.3390/math8122108.
6. Turmetov B.K., Kadirkulov B.J. On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol.43, No.1. – P. 249 – 262. doi.org/10.1134/S1995080222040217.
7. Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж. О разрешимости некоторых краевых задач для дробного аналога нелокального уравнения Лапласа// Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2022. –

Т.211. – С.14 – 28. DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-14-28.

8. Турметов Б., Шалхар А. О спектральных вопросах некоторых краевых задач для нелокального оператора Лапласа в прямоугольнике// Известия Международного казахско-турецкого университета имени Х.А. Ясави. Серия Математика, Физика, Информатика. – 2022. No.1. – P. 79 – 96.
9. Aziz S., Malik S.A. Identification of an unknown source term for a time fractional fourth-order parabolic equation// Electronic journal of differential equations. – 2016. – 2016, No.293.– P.1–20.
10. Kerbal S., Kadirkulov B.J., Kirane M. Direct and Inverse Problems for a Samarskii-Ionkin Type Problem for a Two-Dimensional Fractional Parabolic Equation// Progress in Fractional Differentiation and Applications. – 2018. –Vol. 4, No.3. –P.147–160. doi:10.18576/pfda/040301.
11. Muratbekova, M., Kadirkulov B., Koshanova M., Turmetov B. On Solvability of Some Inverse Problems for a Fractional Parabolic Equation with a Nonlocal Biharmonic Operator// Fractal and Fractional. – 2023. – Vol.7, No.404. – P.1–18. https://doi.org/10.3390/fractalfract7050404.
12. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. Учебное пособие для вузов.М:, «Высшая школа». 1977. 431 с.
13. Владимиров В.С.Уравнения математической физики. М:, Наука, 1988. 512с.
14. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием//Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т.13, № 2 –С.294 – 304.
15. Ионкин Н.И., Морозова В. А. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями//Дифференциальные уравнения. – 2000, – Т.36, № 7, – С. 884–888. DOI:https://doi.org/10.1007/BF02754498.

REFERENCES

1. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation// Turkish journal of mathematics. – 2019. – Vol.43, No.3. – P.1604 – 1625. doi:10.3906/mat-1901-71
2. Turmetov B. Kh., Karachik V. V. On the solvability of Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution// Vestnik Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science. – 2021. – T. 31, № 4. – P. 651 – 667. DOI: 10.35634/vm210409. [In Russian].
3. Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution // Symmetry. – 2021. – Vol.13, No. 1781. – P. 1 – 20. https://doi.org/ 10.3390/ sym13101781.
4. Turmetov B.Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball// Complex Variables Elliptic Equation. – 2023. – Vol.68, No.7. – P. 1204–1218. DOI: 10.1080/17476933.2022.2040021.
5. Yarka U., Fedushko S., Vesely P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation// Mathematics. – 2020. – Vol.8, No.2108. – P. 1 – 13. doi:10.3390/math8122108.
6. Turmetov B.K., Kadirkulov B.J. On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol.43, No.1. – P. 249 – 262. doi.org/10.1134/S1995080222040217.
7. Turmetov B.Kh., Kadirkulov B.Zh. On the solvability of some boundary value problems for the fractional analogue of the nonlocal Laplace equation // Results of science and technology. The series «Modern Mathematics and its applications. Thematic reviews». –

2022. – T.211. – P.14 – 28. DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-14-28. [In Russian].

8. Turmetov B., Shalkhar A. On spectral questions of some boundary value problems for a non-local Laplace operator in a rectangle // Proceedings of the International Kazakh-Turkish University named after H.A. Yasavi. Series Mathematics, Physics, Computer Science.– 2022. No.1. – P. 79 – 96. [In Russian].
9. Aziz S., Malik S.A. Identification of an unknown source term for a time fractional fourth-order parabolic equation// Electronic journal of differential equations. – 2016. – 2016, No.293.– P.1–20.
10. Kerbal S., Kadirkulov B.J., Kirane M. Direct and Inverse Problems for a Samarskii-Ionkin Type Problem for a Two-Dimensional Fractional Parabolic Equation// Progress in Fractional Differentiation and Applications. – 2018. –Vol. 4, No.3. –P.147–160. doi:10.18576/pfda/040301.
11. Muratbekova, M., Kadirkulov B., Koshanova M., Turmetov B. On Solvability of Some Inverse Problems for a Fractional Parabolic Equation with a Nonlocal Biharmonic Operator// Fractal and Fractional. – 2023. – Vol.7, No.404. – P.1–18. https://doi.org/10.3390/fractalfract7050404.
12. Mikhlin S. G. Linear partial differential equations. Study guide for universities.M:, «High School ». 1977. 431 p. [In Russian].
13. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. M:, The science, 1988. 512p. [In Russian].
14. Ionkin N.I. Solution of one boundary value problem of the theory of thermal conductivity with a non-classical boundary condition // Differential equations. – 1977. – T.13, № 2 – P.294 – 304. [In Russian].
15. Ionkin N.I., Morozova V. A. Two-dimensional heat equation with non-local boundary conditions // Differential equations. –2000, –T.36, №7, –P. 884–888. DOI:https://doi.org/10.1007/BF02754498. [In Russian].

ФИЗИКА

ӘОЖ 37.016:53;
МҒТАР 29.03.31
https://doi.org/10.47526/2023-3/2524-0080.04

Н. А. ШЕКТИБАЕВ[1], Б. СПАБЕК[2]
[1]PhD, аға оқытушы Қожа Ахмет Ясауи атындағы халықаралық қазақ түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан), e-mail: Nurdaulet.Shektibaev@ayu.edu.kz
[2]7M01506-Физика педагогтерін даярлау мамандығының 1 курс магистранты Қожа Ахмет Ясауи атындағы халықаралық қазақ түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан), e-mail: Bekbolatspabek@gmail.com

ОПТИКА БӨЛІМІН ОҚЫТУДАҒЫ НЕГІЗГІ МӘСЕЛЕЛЕР

Аңдатпа. «Оптика бөлімін оқытудағы негізгі мәселелер» тақырыбы осы салада алдын ала тәжірибесі немесе білімі жоқ болашақ мамандарға оптиканы тиімді оқытудың әртүрлі тәсілдері мен стратегияларын зерттеуді қамтиды. Бұл тақырып маңызды, өйткені оптика физиканың негізгі аспектісі болып табылады және медицина, инженерия және телекоммуникация сияқты көптеген салаларда қолданылады. Оптиканы бастапқы деңгейден бастап оқытудың мақсаты - болашақ мамандарды оптиканың негізгі принциптерін және олардың әртүрлі салаларда қалай қолданылатынын түсінуге көмектеседі.

Оптиканы бастапқы деңгейден бастап оқытуда қолданылатын негізгі әдістердің кейбірі болашақ мамандарға тұжырымдамаларды визуализациялауға көмектесу үшін практикалық демонстрациялар мен эксперименттерді, болашақ мамандарға сыни ойлау мен проблемаларды шешу дағдыларын дамытуға көмектесу үшін проблемалық оқытуды және оқу процесін жақсарту үшін модельдеу және интерактивті бағдарламалық қамтамасыз ету сияқты технологияларды пайдалануды қамтиды.

Осы саладағы зерттеулер тиімді оқыту әдістерін анықтауға және оптиканы нөлден бастап оқытудың инновациялық Стратегияларын жасауға бағытталған. Осы тақырып бойынша әдебиеттер әртүрлі оқыту әдістері мен технологияларын пайдалануды зерттейтін зерттеулерді, сондай-ақ болашақ мамандардың оқу деңгейі мен белсенділігін арттырудағы осы тәсілдердің тиімділігін зерттейтін зерттеулерді қамтиды.

Сонымен қатар, оптиканы нөлден оқыту тақырыбы физикалық білім берудегі әртүрлілік пен инклюзияны арттыру мәселесін шешу үшін маңызды. Көптеген болашақ мамандар, әсіресе аз қамтылған топтардан, физика бойынша алдын ала білімі немесе тәжірибесі болмауы мүмкін және физика курстарына қол жеткізу және оларды сәтті аяқтау кезінде кедергілерге тап болуы мүмкін. Оптиканы нөлден оқытудың тиімді стратегиялары бұл олқылықты жоюға және барлық болашақ мамандарға физика саласында берік негіз беруге көмектеседі.

Кілт сөздер: Оптика бойынша білім беру, оптиканы оқыту әдістері, оптика бойынша эксперименттер, оптика бойынша демонстрациялар, оптика бойынша интерактивті оқыту, оптика бойынша білім берудегі компьютерлік модельдеу

Н. А. Шектибаев[1], Б. Спабек[2]
[1] PhD, старший преподаватель, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, Туркестан), e-mail: Nurdaulet.Shektibaev@ayu.edu.kz
[2]Магистрант 1 курса специальности 7M01506-подготовка физических педагогов Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, Туркестан), e-mail: Bekbolatspabek@gmail.com

Основные вопросы обучения оптике

Аннотация. «Основные вопросы обучения оптике» предполагает изучение различных подходов и стратегий для эффективного преподавания оптики ученикам, у которых нет предварительного опыта или знаний в этой области. Эта тема важна, поскольку оптика является фундаментальным аспектом физики и используется в самых разных областях, включая медицину, инженерное дело и телекоммуникации. Цель преподавания оптики с нуля - помочь ученикам понять основные принципы оптики и то, как они применяются в различных областях.

Некоторые из ключевых методов, используемых при обучении оптике с нуля, включают использование практических демонстраций и экспериментов, чтобы помочь ученикам визуализировать концепции, проблемное обучение, чтобы помочь ученикам развить критическое мышление и навыки решения проблем, а также использование технологий, таких как моделирование и интерактивное программное обеспечение, для улучшения процесса обучения.

Исследования в этой области были сосредоточены на выявлении эффективных методов обучения и разработке инновационных стратегий обучения оптике с нуля. Литература по этой теме включает исследования, в которых исследуется использование различных методов и технологий обучения, а также те, в которых исследуется эффективность этих подходов в повышении уровня обучения и вовлеченности учащихся.

Кроме того, тема преподавания оптики с нуля важна для решения проблемы увеличения разнообразия и инклюзивности в физическом образовании. Многим ученикам, особенно из недопредставленных групп, не хватает предварительных знаний или бэкграунда в области физики, и они могут столкнуться с препятствиями при доступе к курсам физики и достижении успеха на них. Эффективные стратегии обучения оптике с нуля могут помочь преодолеть этот разрыв и обеспечить всем учащимся прочную основу в области физики.

Ключевые слова: Образование по оптике, методы преподавания оптики, эксперименты по оптике, демонстрации оптики, интерактивное обучение оптике, компьютерное моделирование в образовании по оптике

N. A. Shektibaev[1], B. Spabek[2]

[1]*PhD, Senior lecturer, Khoja Ahmed Yasawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkestan), e-mail: Nurdaulet.Shektibaev@ayu.edu.kz*

[2]*1st year master's student of the specialty 7M01506-Physics Teacher Training International Kazakh Turkish university named after Khoja Ahmed Yasawi (Kazakhstan, Turkestan), e-mail: Bekbolatspabek@gmail.com*

Basic questions of optics training

Abstract. «Basic Questions of Optics Training» involves the study of various approaches and strategies for effective teaching of optics to students who do not have prior experience or knowledge in this field. This topic is important because optics is a fundamental aspect of physics and is used in a variety of fields, including medicine, engineering, and telecommunications. The aim of teaching optics from scratch is to help students understand the basic principles of optics and how they are applied in different areas.

Some of the key methods used in teaching optics from scratch include using hands-on demonstrations and experiments to help students visualize the concepts, problem-based learning to help students develop critical thinking and problem-solving skills, and the use of technology, such as simulations and interactive software, to enhance the learning experience.

Research in this field has focused on identifying effective teaching methods and developing innovative strategies for teaching optics from scratch. The literature on this topic includes studies

that explore the use of different teaching methods and technologies, as well as those that investigate the effectiveness of these approaches in enhancing student learning and engagement.

Furthermore, the topic of teaching optics from scratch is important for addressing the challenge of increasing diversity and inclusivity in physics education. Many students, particularly those from underrepresented groups, may lack the prior knowledge or background in physics and may face barriers in accessing and succeeding in physics courses. Effective strategies for teaching optics from scratch can help to bridge this gap and provide all students with a strong foundation in physics.

Keywords: Optics education, optics teaching methods, optics experiments, optics demonstrations, interactive optics learning, computer simulations in optics education.

Кіріспе

«Оптиканы нөлден қалай үйрету керек» мұғалімдерге болашақ мамандарды осы күрделі пәнмен көңілді және тиімді таныстыруға көмектесетін көптеген стратегиялар мен ресурстарды қамтиды. Бұл әдістер негіздерден бастауды, нақты эксперименттер жүргізу үшін ұқсастықтар мен көрнекі материалдарды пайдалануды, нақты мәселелерді шешуді және зерттеуге негізделген оқытуды ынталандыруды қамтуы мүмкін. Сондай-ақ болашақ мамандардың математика мен физиканың негізгі ұғымдарын нақты түсінуі және оқыту әдістерін оқытудың әртүрлі стильдеріне бейімдеуі маңызды. Нақты қолданбаларға қосылу арқылы мұғалімдер болашақ мамандарға оптиканың өзектілігі мен маңыздылығын түсінуге көмектеседі. Сайып келгенде, оптиканы нөлден бастап тиімді оқыту шығармашылықты, шыдамдылықты және жеке болашақ мамандардың қажеттіліктеріне бейімделуге дайын болуды талап етеді.

Оптиканы нөлден сәтті оқыту үшін мұғалімдер де тақырыпты жақсы меңгергеніне көз жеткізуі керек. Бұл негізгі тұжырымдамаларды қайта қарауды және осы саладағы жаңа әзірлемелер мен жаңалықтармен танысуды қамтуы мүмкін. Мұғалімдер сонымен қатар оқулықтар, бейнежазбалар, машиналар және бағдарламалық жасақтама сияқты қол жетімді ресурстар мен құралдармен таныс болуы керек.

Оптиканы нөлден үйренудің тағы бір маңызды аспектісі-ынтымақтастыққа негізделген қолайлы оқу ортасын құру. Бұған ынталандырушы сұрақтар мен пікірталастар, сындарлы кері байланыс беру және қиындықтарға тап болған болашақ мамандарға жеке қолдау көрсету кіруі мүмкін. Позитивті оқу ортасын құру болашақ мамандарға оқуға деген сенімділік пен ынтаны арттыруға мүмкіндік береді.Сондай-ақ болашақ мамандардың Оптика бойынша әртүрлі деңгейдегі алдын ала білімі мен тәжірибесі болуы мүмкін екенін түсіну маңызды. Мұғалімдер осы айырмашылықтарды түсіндіру үшін оқыту әдістері мен жылдамдығын реттеуге дайын болуы керек. Болашақ мамандарға шағын топтарда немесе оқытушылармен бір-бірден жұмыс істеуге мүмкіндік беру де жеке қолдау көрсетудің тиімді әдісі болуы мүмкін.Соңында, мұғалімдер оқу процесін болашақ мамандар үшін жағымды және қызықты етуге тырысуы керек. Бұл ойындарды, басқатырғыштарды және басқа интерактивті әрекеттерді сыныпқа қосуды, сондай-ақ болашақ мамандардың оптикаға деген қызығушылығы мен қызығушылығын арттыру мүмкіндіктерін құруды қамтуы мүмкін.Осылайша, оптиканы нөлден оқыту пәндік білімді, оқытудың тиімді әдістерін және қолайлы оқу ортасын біріктіруді талап етеді. Оқытудың әртүрлі стильдеріне бейімделу және қызығушылық пен зерттеу әрекеттерін дамыту үшін әртүрлі стратегиялар мен ресурстарды пайдалана отырып, мұғалімдер болашақ мамандарға Оптика мен өмір бойы оқуға деген сүйіспеншілікті үйренудің берік негізін қалыптастыруға көмектесе алады.

Оптика-жарықтың мінез-құлқы мен қасиеттерін зерттейтін физика саласы. Оптиканы нөлден оқыту мұғалімдер үшін қиын міндет болуы мүмкін, өйткені ол болашақ мамандарды рефлексия, сыну, дифракция және кедергі сияқты күрделі ұғымдармен таныстыруды қамтиды. Дегенмен, барлық жастағы және білім деңгейіндегі болашақ мамандарға оптиканы тиімді оқыту үшін қолдануға болатын көптеген әдістер мен стратегиялар бар.

Оптикалық білім берудің маңызды аспектілерінің бірі-жарық толқындары мен фокустық диаграммалар сияқты негіздерден бастап, жетілдірілген тұжырымдамаларға көшу керек. Нақыл сөздер мен көрнекі құралдар болашақ мамандарға осы ұғымдарды түсінуге көмектесетін пайдалы құралдар бола алады.Өйткені олар нақтырақ және дерексіз ұғымдармен салыстыруға болады. Тәжірибелік эксперименттер мен сабақтар болашақ мамандардың Жарық қасиеттерін және линзалар мен айналар сияқты оптикалық құралдардың мінез-құлқын түсінуде тиімді болуы мүмкін [1].

Осы стратегиялардан басқа, практикалық есептерді шешу және зерттеуге негізделген оқытуды ынталандыру болашақ мамандарға оптика туралы білімдерін нақты жағдайларға қолдануға және тақырыпты тереңірек түсінуге көмектеседі. Оқытушылар болашақ мамандарға оптика негіздерін меңгеруге және физиканың осы қызықты саласын түсінуге көмектесу үшін әртүрлі оқыту әдістері мен ресурстарын пайдалана алады.

Оптиканы нөлден оқытудың тағы бір маңызды аспектісі-болашақ маманның оптиканың негізінде жатқан математикалық және физикалық ұғымдар туралы нақты түсініктерін қамтамасыз ету. Бұл геометрия, тригонометрия, алгебра және математика сияқты тақырыптарды қамтуы мүмкін. Оқытушылар бұл ұғымдарға нақты түсініктеме беріп, болашақ мамандарға оптикалық тапсырмалар контекстінде оларды қолдануға машықтануға мүмкіндік беруі керек [2].

Оқытудың әртүрлі стильдерін білу және сәйкесінше оқыту әдістерін қолдану маңызды. Кейбір болашақ мамандар көруді үйреніп, диаграммалар мен анимациялардан білімдерін жетілдіре алады, ал басқалары есту қабілетіне көбірек көңіл бөліп, дәрістер мен пікірталастардың нәтижесінде көздеген мақсаттарына жете алады. Тәжірибелік сабақтар әсіресе практикада оқитын кинестетикалық болашақ мамандар үшін тиімді болуы мүмкін. Оқытудың әртүрлі әдістерін қолдана отырып, мұғалімдер барлық болашақ мамандардың оптика саласында оқуға және өркендеуге мүмкіндік алатынына кепілдік бере алады [3].

Тағы бір маңызды мәселе - Оптика мен Нақты қолданбалар арасында байланыс орнату. Мысалы, мұғалімдер оптикада камералар, телескоптар және микроскоптар сияқты күнделікті технологияларда қалай қолданылатынын талқылай алады. Ал бұл болашақ мамандарды оптиканың өзектілігі мен маңыздылығын түсінуге және тақырып туралы көбірек білуге ынталандыруға көмектеседі.

Тұтастай алғанда, оптиканы нөлден үйрену білімнің, шығармашылықтың және табандылықтың үйлесімін қажет етеді. Ұғымдарды нақты түсіндіру және нақты қолданбалармен байланыс орнату үшін әртүрлі оқыту әдістерін пайдалана отырып, мұғалімдер болашақ мамандарға оптика туралы білудің берік негізін және осы қызықты тақырыпты өмір бойы үйренуге деген сүйіспеншілікті дамытуға көмектесе алады [4].

Оптиканы оқыту әдістемесінің негізгі тиімді мақсаттары, мәселелері мен міндеттері нақты зерттеу сұрақтары мен зерттеу контекстіне байланысты. Дегенмен, зерттеушілер оптиканы нөлден үйрететін әдістемелердің тиімділігін зерттеу кезінде ескеретін кейбір жалпы мақсаттар, мәселелер мен міндеттер бар [5]:

Мақсаты: басынан бастап оптикалық білім берудің басты мақсаты - болашақ мамандарға жарықтың мінез-құлқы мен оның материямен өзара әрекеттесуі туралы терең түсінік қалыптастыруға көмектесу. Оптиканы оқытудың тиімді әдісі болашақ мамандардың тұжырымдамалық түсінігі мен проблемаларды шешу дағдыларын, сондай-ақ нақты жағдайларда оптика тұжырымдамаларын қолдану қабілетін дамытуға бағытталуы керек.

Мәселе: оптикалық білім берудегі басты мәселелердің бірі-оптикалық құбылыстарды визуализациялау және түсіну қиындықтары. Оптиканы оқытудың тиімді әдістері болашақ мамандарға оптикалық құбылыстарды елестетуге және практикалық тәсілдермен өзара әрекеттесуге көмектесетін іс-шаралар мен демонстрацияларды қамтуы керек. Тағы бір мәселе-оптикалық тұжырымдамалардың күрделілігі және күшті математикалық дағдылардың қажеттілігі. Оптикалық білім берудің тиімді әдісі болашақ мамандарды математикалық дағдыларды дамытуда және математика мен тұжырымдамалық түсіну арасында байланыс орнатуда оқыту мен қолдауды қамтуы керек.

Мақсаты: оптикалық білім берудің тиімді әдістемесі белсенді оқыту мен қатысуға ықпал ететін әртүрлі міндеттер мен әрекеттерді қамтуы керек. Бұған нақты әлемдегі эксперименттер, компьютерлік модельдеу, мәселелерді шешу әрекеттері және топтық талқылаулар кіруі мүмкін. Тапсырмалар формулалар мен тұжырымдамаларды жаттаудың орнына терең білім мен түсінуге ықпал ететіндей етіп жасалуы керек.

Бағалау: тиімді оптикалық оқыту әдістемесі болашақ мамандардың үлгерімі мен түсінігін өлшеу үшін сенімді және жарамды бағалау әдістерін қамтуы керек. Бұған викториналар мен сауалнама парақтары сияқты дәстүрлі бағалаулар және тұжырымдамалық карталар мен портфолио сияқты инновациялық бағалаулар кіруі мүмкін. Бағалау әдісі курстың білім беру мақсаттары мен міндеттеріне сәйкес келуі керек және болашақ мамандар мен оқытушылар үшін маңызды кері байланысты қамтамасыз етуі керек.

Технологияны интеграциялау: оптикалық білім берудің тиімді әдісі болашақ мамандардың оқу деңгейі мен қатысуын арттыру үшін технологияны қолдануды талап етеді. Бұған болашақ мамандарға оптикалық құбылыстарды елестетуге және түсінуге көмектесетін компьютерлік модельдеу, интерактивті тақталар және басқа да инновациялық технологиялар кіреді. Технологияның интеграциясы курстың білім беру мақсаттары мен міндеттерін қолдай отырып, мақсатты және мұқият болуы керек.

Педагогикалық мазмұнды білу: оқытудың тиімді оптикалық әдістері мұғалімдерден білім беру педагогикасы мен оптикалық мазмұнды терең түсінуді талап етеді. Бұл болашақ мамандардың қалай оқитынын түсіну және әртүрлі болашақ мамандардың қажеттіліктерін қанағаттандыратын тиімді оқытуды дамыту мүмкіндігін қамтиды. Ол сондай-ақ оптика ұғымдарын терең түсінуді және болашақ мамандармен нақты және тиімді қарым-қатынас жасауды қажет етеді.

Оқу жоспарын әзірлеу: оптиканы оқытудың тиімді әдістемесі оқу жоспарының дизайны мен құрылымын мұқият қарастыруды қажет етеді. Бұл дұрыс оқу материалдарын таңдауды, тиімді оқу әрекеттері мен бағалауларды әзірлеуді және болашақ мамандардың оқуы мен түсінуіне ықпал ететін мазмұнды ұйымдастыруды қамтиды. Оқу жоспарын әзірлеу оқытудың тиімді тәжірибесін зерттеуге негізделуі керек және курстың оқу мақсаттары мен міндеттеріне сәйкес келуі керек. Тұтастай алғанда, оптиканы оқыту әдістемесінің тиімді мақсаттары, мәселелері мен міндеттері оптика тұжырымдамаларының күрделілігін, әртүрлі болашақ мамандардың қажеттіліктерін және оқыту мен қатысуды жақсарту үшін технологиялардың әлеуетін ескеретін біртұтас тәсілді қажет етеді.

Әдістемелік бөлім

Оптиканы оқытудағы компьютерлік модельдеу:

Бірнеше ресейлік авторлардың зерттеулеріне сәйкес,компьютер көмегімен модельдеу өзінің кәсіби және білім беру қызметі туралы зерттеу жүргізді: теория және практика [6]. Оқытуда компьютерлік модельдеуді қолдану аспектілері келесі С. А. Бешенков, Е. А. Ракитина жұмыстарында көрінеді. [7]. Дәрісті компьютерлік қолдаумен бірлескен білім беру қызметі ретінде интерактивті түрде көрсету тәсілін американдық зерттеушілер өз жұмыстарында қарастырды [8]. Ал бірнеше малайзиялық зерттеушілер электромагнетизмнің әсерін зерттеу үшін виртуалды шындықты пайдаланды: ағындық тәжірибе мен болашақ мамандарды оқытудың әсері туралы зерттеді [9]. Шығыс авторларына келетін болсақ, олар өз жұмыстарында модельдеуге негізделген дене шынықтыруды қолдаудың әсерін қарастырды [10]. Басқа елдердің көптеген ғалымдары осы салада зерттеулер жүргізді. Олардың ішінде Абдурахманова З. К Білім беру жүйесінде компьютерлік модельдеудің маңыздылығын ашты

[11].

Тиісінше, пән мұғалімдері мен оқу пәндерінің білімін жақсарту мақсатында ақпараттандыру саласында шетелдік және отандық ғалымдардың ғылыми-зерттеу жұмыстары жүргізілді және оның бағыты анықталды:

- Оқыту кезінде компьютерді пайдалану тәртібі мен егжей-тегжейлері (Х Х.Ж.Бекер) [12];
- Болашақ оқытушыларды даярлауда метрология саласындағы зертханалық практиканың маңыздылығы (М.С. Молдабекова) [13];
- Физикалық эксперименттерді виртуальды машиналық модельдеу (К.Н.Жумадиллаев) [14];
- Физика курстарындағы классикалық эксперименттерді статикалық компьютерлік модельдеу (С. А. Красиков) [15]. Жоғарыда аталған әрекеттер біздің жұмысымызға сәйкес орындалды.

Жаңа заманауи технологияларды физикада қолданып оқыту нәтижелерін келесідей ғалымдар зерттеген: Л. И. Анциферов, А. А. Богуславский, Д. В. Баяндин, Э. В. Бурсиан, Ю. А. Воронин, Ю. А. Гороховатский, В. А. Извозчиков, А. С. Кондратьев, В. В. Лаптев, А. И. Назарова, В. В. Лаптева, Р. В. Майер, Ю. С. Песоцкий, О. В. Поваляева, И. В. Роберт, А. Б. Смирнова, С. К. Стафеева, С. Б. Степанова, Г. Н. Степанова, А. И. Фишман А. С. Чирцова, П. М. Чудинский және басқалар., Орта мектептердің оптика эксперименттерін зерделеу кезінде заманауи технологияларды қолданатын әдістеме мәселесі әлі де зерттелуде.

Компьютерлік модельдеу-бұл оптиканы оқыту әдістемесінде қолдануға болатын инновациялық және тиімді құрал. Бұл болашақ мамандарға оптикалық құбылыстарды шынайы модельдеумен өзара әрекеттесуге мүмкіндік береді, бұл оларға дәстүрлі сынып жағдайында көрсету қиын күрделі ұғымдарды елестетуге және зерттеуге мүмкіндік береді.

Компьютерлік модельдеуді оптиканы оқытуды жақсарту үшін әртүрлі тәсілдермен қолдануға болады. Мысалы, болашақ мамандар әртүрлі материалдармен әрекеттесу кезінде жарықтың мінез-құлқын модельдеу үшін Бағдарламалық құралды пайдалана алады, бұл оларға сыну, шағылысу және дифракция сияқты ұғымдарды зерттеуге мүмкіндік береді. Олар сондай-ақ линзалар мен айналар сияқты оптикалық жүйелерді жобалау және талдау үшін Бағдарламалық құралды пайдалана алады және осы жүйелердің параметрлеріндегі өзгерістер олардың мінез-құлқына қалай әсер ететінін түсінеді [16].

Компьютерлік модельдеудің басты артықшылықтарының бірі-бұл болашақ мамандарға өз қарқынымен және қауіпсіз және бақыланатын ортада білім алуға мүмкіндік береді. Олар әртүрлі айнымалылармен тәжірибе жасай алады, параметрлерді реттей алады және нәтижелерді нақты уақыт режимінде жабдыққа зақым келтірместен немесе өзіне немесе басқаларға зиян келтірместен бақылай алады. Бұл болашақ мамандарға проблемаларды шешу дағдыларын дамытуға және оптиканың негізгі принциптерін тереңірек түсінуге құнды мүмкіндік береді.

Компьютерлік модельдеуді интерактивті виртуалды зертханаларды құру үшін де пайдалануға болады, оған болашақ мамандар Интернет байланысы бар кез келген жерден қол жеткізе алады. Бұл болашақ мамандарға эксперименттер жүргізуге және оптикалық құбылыстарды сыныптан тыс уақытта және оларға ыңғайлы уақытта зерттеуге мүмкіндік береді.

Компьютерлік модельдеу болашақ мамандардың белсенділігін арттыру, олардың күрделі ұғымдар туралы түсініктерін тереңдету және зерттеулер мен эксперименттерге құнды мүмкіндіктер беру үшін оптиканы оқыту әдістемесінде қолдануға болатын тиімді құрал болып табылады. Компьютерлік модельдеуді оқыту әдістемесіне қосу арқылы оқытушылар болашақ мамандарға оптика саласында оқыту мен ашудың қуатты құралын ұсына алады [17].

Оптиканы компьютерлік модельдеу арқылы оқытудағы ерекшеліктері:

Компьютерлік модельдеу оны оптиканы оқытудың құнды құралына айналдыратын бірқатар ерекшеліктерге ие. Кейбір негізгі функцияларға мыналар кіреді [18]:

1. Нақты модельдеу: компьютерлік модельдеу болашақ мамандарға дәстүрлі сынып жағдайында көрсету қиын болуы мүмкін оптикалық құбылыстардың нақты модельдерімен өзара әрекеттесуге мүмкіндік береді. Бұл болашақ мамандарға жарықтың мінез-құлқы және оның әртүрлі материалдармен өзара әрекеттесуі туралы толық түсінік береді.

2. Интерактивті оқыту: компьютерлік модельдеу болашақ мамандарға әртүрлі айнымалылармен тәжірибе жасауға, параметрлерді реттеуге және нәтижелерді нақты уақытта бақылауға мүмкіндік беру арқылы интерактивті оқытуды ынталандырады. Бұл практикалық тәсіл белсенді оқытуға ықпал етеді және болашақ мамандарға проблемаларды шешу дағдыларын дамытуға көмектеседі.

3. Қауіпсіз және бақыланатын орта: компьютерлік модельдеу болашақ мамандардың оптикалық құбылыстарды зерттеуі үшін қауіпсіз және бақыланатын ортаны қамтамасыз етеді. Бұл жабдыққа зақым келтіру немесе өзіне немесе басқаларға зиян келтіру қаупін жояды, бұл дәстүрлі зертханалық жағдайда алаңдаушылық тудыруы мүмкін.

4. Қол жетімділік: компьютерлік модельдеу болашақ мамандарға Интернет байланысы бар кез келген жерден қол жетімді. Бұл болашақ мамандарға эксперименттер жүргізуге және оптикалық құбылыстарды сыныптан тыс уақытта және оларға ыңғайлы уақытта зерттеуге мүмкіндік береді.

5. Икемділік: компьютерлік модельдеу-бұл оптикалық құбылыстар мен жүйелердің кең ауқымын модельдеу үшін қолдануға болатын икемді құрал. Ол курстың нақты оқу мақсаттарына бейімделуі мүмкін және оптикалық жүйелерді жобалау және талдау, жарықтың мінез-құлқын модельдеу және күрделі оптикалық ұғымдарды зерттеу үшін пайдаланылады.

Компьютерлік модельдеуді оптиканы оқыту әдістемесіне қосу болашақ мамандардың белсенділігін арттырады, олардың күрделі ұғымдар туралы түсініктерін тереңдетеді және зерттеулер мен эксперименттерге құнды мүмкіндіктер береді. Бұл өз болашақ мамандарына оптика саласында күшті оқу тәжірибесін ұсынғысы келетін оқытушылар үшін құнды құрал.

Зерттеу нысаны ретінде болашақ мамандар екі топқа бөлініп, оқу пәндері ретінде оқыды. Бірінші топта бақылау тобы ретінде 25 болашақ маман және эксперименттік топ ретінде 25 болашақ маман болды. Зерттеу Түркістан қаласының Н.Келімбетов атындағы № 28 мектеп-лицейінде жүргізілді. Зерттеуге қатыспас бұрын барлық болашақ мамандар сабақтарда осы тақырыптар бойынша дәстүрлі оқытудан өткені және физикалық зертханада эксперименттік жұмыс жүргізілгені анықталды. Жұмыс барысында бақылау тобында оқытудың дәстүрлі түрлері қолданылды, ал эксперименттік топта сабақтар компьютерлік модельдерді қолдана отырып өткізілді.Бұл жұмысты орындау барысында «Физикалық құбылыстар» электрондық оқу құралы дәріс сабақтарының тиімділігін арттыруда маңызды орын алды [19].

Ғылыми зерттеу әдістері, зерттеу үшін қолданған әдістер тізімі:

- Бақылау әдісі;
- Салыстыру;
- Эксперименттік әдіс;
- Талдау және сараптама әдістері;

Атап айтқанда, екі топтың бастапқы деңгейін анықтау үшін біз Бақылау әдістерін қолдана отырып, топтардың білімін салыстырдық. Зерттеуге қатысқанға дейін болашақ мамандардың іс-әрекеті математикалық теңдеулер есептерін шешуге және сандық нәтижелерге негізделген дәстүрлі әдістермен шектелетіні көрсетілген. Эксперименттік топтың болашақ мамандары бұл эксперимент жасалмас бұрын модельдеу арқылы физикалық құбылыстар негізінде тәжірибе жасамады. Кейінірек эксперименттің нәтижелерін талдағаннан кейін жалпы қорытынды жасалды.

Зерттеу барысында эксперименттік топтың болашақ мамандары сабақтас тақырыптар бойынша дәстүрлі аудиториялық білім алғаннан кейін шамамен екі апта өтті. Эксперименттік топтың барлық болашақ мамандары компьютерлік сыныпта бір сағаттық екі сабақтан өтті. Бірінші сабақта интерактивті физика зерттеушілермен қарапайым жарық құбылыстарының заңдылықтарын талдау үшін қолданды. Сонымен қатар, барлық болашақ мамандарға модельдеу ортасымен танысу үшін қысқа мерзімді тағылымдама берілді. Екінші сабақта болашақ мамандар интерактивті физикалық өрнекті қолдануды қажет ететін тапсырманы орындады. Болашақ мамандардың модельдеуге қатысуы тек «Шыныда сәулелердің сыну көрсеткішін анықтау » тақырыбы негізінде зерттеумен шектелді. Компьютер экранында шынының сыну көрсеткішін анықтау үшін компьютерлік қосымшасын (симулятор) қолдана отырып, түскен және сынған сәулені, сыну көрсеткішін, сыну көрсеткішінің мәнін және ортадағы жарықтың таралу жылдамдығын анықтау нәтижелерін бақылау ұсынылды.

Олар сондай-ақ әртүрлі физикалық шамаларды графикалық түрде көрсету, физикалық ұғымдар арасындағы байланысты түсіну және физика заңдары туралы терең түсінік алу үшін әртүрлі модельдеу бағдарламалары ұсынатын сенсорларды пайдаланды.

Оптиканы нөлден оқыту әдістемесі-бұл салада бұрынғы тәжірибесі жоқ бастаушы болашақ мамандарға бағытталған оптикалық оқыту тәсілі. Бұл әдіс болашақ мамандарға оптика негіздерін меңгеруге көмектесу үшін әртүрлі әдістер мен стратегияларды қолданады [20].

Оптиканы нөлден оқыту әдістемесінің негізгі аспектілеріне мыналар жатады:

1) болашақ мамандарға оптика ұғымдарын түсінуге көмектесу үшін қарапайым және көрнекі демонстрацияларды қолдану.

2) болашақ мамандарға практикалық мәселелерді шешуге көмектесу үшін проблемалық оқыту әдістемесін қолдану.

3) болашақ мамандарға оптика білімін іс жүзінде қолдануға көмектесу үшін жобаға бағытталған оқытуды қолдану.

4) болашақ мамандарға оптика ұғымдарын визуализациялауға және түсінуге көмектесу үшін модельдеу сияқты интерактивті және компьютерлік технологияларды қолдану.

Физиканы оқытудың негіздерін, соның ішінде оптиканы меңгеруге көмектесетін бірнеше негізгі ұғымдар [21]:

1) Физика Негіздерін Түсіну: физиканы оқытпас бұрын, механика, электромагнетизм, термодинамика және оптика сияқты физиканың негізгі ұғымдарын нақты түсіну маңызды. Бұл күштерді, энергияны, қозғалысты, толқындарды, жарық пен электр энергиясын зерттеуді қамтуы мүмкін.

2) Оқу бағдарламасын білу: сіз оқытатын оқу бағдарламасымен таныс екеніңізге көз жеткізіңіз, оның ішінде болашақ мамандар оқудың әр деңгейінде оқуы керек нақты тақырыптар. Бұл сіздің сабақтарыңыз бен бағаларыңызды тиімді жоспарлауға көмектеседі.

3) Тиімді оқыту стратегияларын әзірлеу: дәрістер, демонстрациялар, практикалық эксперименттер, топтық жұмыс және мультимедиялық ресурстар сияқты әртүрлі оқыту стратегияларын пайдалануды қарастырыңыз. Әр түрлі болашақ мамандар әртүрлі тәсілдермен оқиды, сондықтан әр түрлі стратегияларды қолдану сіздің барлық болашақ мамандарыңызбен мақсатқа жетуге көмектеседі.

4) Көрнекі құралдарды пайдалану: Оптика - бұл таза көрнекі тақырып, сондықтан диаграммалар, анимациялар және бейнелер сияқты көрнекі құралдарды пайдалану болашақ мамандарға негізгі ұғымдарды түсінуге көмектеседі. Бұған фокустық диаграммалар, толқындық фронттар және линзалар мен айналар сияқты оптикалық аспаптардың суреттері кіреді.

5) Эксперименттер жүргізу: тәжірибелік эксперименттер болашақ мамандарға физика мен Оптиканың негізгі ұғымдарын түсінуге көмектеседі, сонымен қатар болашақ мамандарды

тартудың қызықты тәсілі бола алады. Шағылысу, сыну және дифракция сияқты жарық қасиеттерін көрсететін эксперименттер жүргізуді қарастырыңыз.
6) Практикалық есептерді шешу: дәрістер мен демонстрациялардан басқа, практикалық есептерді шешу болашақ мамандарға негізгі ұғымдарды меңгеруге және оларды нақты жағдайларға қолдануға көмектеседі. Бұған Сандық есептер, тұжырымдамалық мәселелер және ауызша мәселелер кіреді.
7) Сұранысқа негізделген оқытуды ынталандыру: болашақ мамандарды сұрақтар қоюға және өз қызығушылықтарын зерттеуге ынталандыру олардың физика мен оптика туралы түсініктерін тереңдетуге көмектеседі. Сабақтарыңызға ғылыми жобалар, тәуелсіз сұрақтар және топтық пікірталастар сияқты сұраныстарға негізделген оқу іс-шараларын қосуды қарастырылады.

Физиканы оқыту қиын болуы мүмкін, бірақ бұл өте пайдалы. Пән туралы түсінігіңізді дамыта отырып, тиімді оқыту стратегияларын қолдана отырып және болашақ мамандарды практикалық эксперименттер мен сұраныстарға негізделген оқыту арқылы тарту болашақ мамандарыңызға материалды игеруге және өмір бойы физикаға деген сүйіспеншілікті дамытуға көмектесе аласыз [22].

Оптиканы нөлден оқыту қиын болуы мүмкін, бірақ бұл пәнді болашақ мамандарға түсінікті және тартымды түрде ұсынуға көмектесетін бірнеше әдістер мен стратегиялар бар [23-25]. Бірнеше идеялар:
1) Негіздерден бастау: оптика саласындағы неғұрлым жетілдірілген тұжырымдамаларға кіріспес бұрын, болашақ мамандардың негіздерді түсінетініне көз жеткізу керек. Бұған жарық толқындары, фокустық диаграммалар, шағылысу және сыну сияқты ұғымдары кіреді. Болашақ мамандарға осы ұғымдарды елестетуге көмектесу үшін диаграммалар мен практикалық әрекеттерді қолданыңыз.
2) Аналогияларды қолдану: аналогиялар оптикадағы күрделі ұғымдарды түсіндірудің пайдалы құралы бола алады. Мысалы, сіз жарық толқындарының әрекетін тоған бетіндегі толқындармен немесе линзалардың жарықты қалай бұрмалайтынын үлкейткіш әйнектің заттарды қалай үлкейте алатынымен салыстыра аласыз.
3) Эксперименттер жүргізу: тәжірибелік эксперименттер болашақ мамандарға оптика саласындағы негізгі ұғымдарды түсінуге көмектеседі, сонымен қатар болашақ мамандарды тартудың қызықты тәсілі бола алады. Шағылысу, сыну және дифракция сияқты жарық қасиеттерін көрсететін эксперименттер жүргізуді қарастырыңыз. Бұл жарықты фокустау және сыну үшін айналар мен линзаларды пайдалануды және әртүрлі материалдар арқылы жарықтың әрекетін бақылауды қамтуы мүмкін.
4) Мультимедиялық ресурстарды пайдалану: Оптика - бұл таза визуалды тақырып, сондықтан диаграммалар, анимациялар және бейнелер сияқты көрнекі құралдарды пайдалану болашақ мамандарға негізгі ұғымдарды түсінуге көмектеседі. Бұған фокустық диаграммалар, толқындық фронттар және линзалар мен айналар сияқты оптикалық аспаптардың суреттері кіруі мүмкін.
5) Практикалық есептерді шешу: дәрістер мен демонстрациялардан басқа, практикалық есептерді шешу болашақ мамандарға негізгі ұғымдарды меңгеруге және оларды нақты жағдайларға қолдануға көмектеседі. Бұған Сандық есептер, тұжырымдамалық мәселелер және ауызша мәселелер кіреді.
6) Сұрақтар мен пікірталастарды көтермелеу: болашақ мамандарды сұрақтар қоюға және өз қызығушылықтарын зерттеуге шақыру олардың оптика туралы түсініктерін тереңдетуге көмектеседі. Сабақтарыңызға ғылыми жобалар, тәуелсіз тергеулер және топтық пікірталастар сияқты сұраныстарға негізделген оқу іс-шараларын қосуды қарастырыңыз.

Оптиканы нөлден оқыту шыдамдылық пен табандылықты қажет етуі мүмкін, бірақ дұрыс стратегиялар мен ресурстардың көмегімен сіз болашақ мамандарға осы қызықты және маңызды тақырыпты түсінуге көмектесе алады

Оптиканы нөлден оқыту тақырыбында зерттеу жүргізу кезінде қолдануға болатын бірнеше әдістер бар [26-29]. Бірнеше мысалдар келтірілген:

1) Әдебиеттерге шолу: бұл оптиканы нөлден үйренуге қатысты бар зерттеулерді, кітаптар мен мақалаларды зерттеуді қамтиды. Бұл білімдегі олқылықтарды анықтауға және бұрын қандай әдістер сәтті болғандығы туралы түсінік беруге көмектеседі.
2) Сауалнамалар: зерттеушілер оқытушылар мен болашақ мамандарға сауалнамалар жүргізе алады, олардың оқыту және оқыту оптикасындағы тәжірибесі туралы ақпарат жинай алады. Сауалнамалар жалпы мәселелерді анықтау және тиімді оқыту әдістері туралы деректерді жинау үшін пайдаланылуы мүмкін.
3) Бақылаулар: сыныптағы оқытушылар мен болашақ мамандарды бақылау қазіргі уақытта Оптика бойынша оқыту нөлден қалай жүргізілетіні туралы құнды ақпарат бере алады. Бақылаулар зерттеушілерге оқытудың тиімді әдістерін және жақсартуға болатын бағыттарды анықтауға көмектеседі.
4) Эксперименттік зерттеулер: зерттеушілер оптиканы оқытудың әртүрлі әдістерінің тиімділігін нөлден бастап тексеру үшін эксперименттер жүргізе алады. Мысалы, зерттеушілер практикалық сабақтардың тиімділігін дәрістерге негізделген оқытумен салыстыра алады.
5) Жағдайлық зерттеулер: зерттеушілер тиімді оқыту әдістері мен озық тәжірибелерді анықтау үшін табысты оқу бағдарламалары немесе жеке мұғалімдер үшін терең жағдайлық зерттеулер жүргізе алады.
6) Сұхбат: зерттеушілер Оптика бойынша оқытушылармен, болашақ мамандармен және сарапшылармен сұхбат жүргізе алады, олардың оптиканы оқыту және зерттеу тәжірибесі туралы ақпарат жинай алады. Сұхбаттар нақты оқыту әдістері мен олардың тиімділігі туралы толық ақпарат бере алады.
7) Фокус-топтар: фокус-топтар оқытушылар немесе болашақ мамандар тобының пікірлері мен тәжірибесін жинау үшін пайдаланылуы мүмкін. Бұл жалпы мәселелер мен Тиімді оқыту әдістерін анықтауға көмектеседі.
8) Іс-әрекетті зерттеу: іс-әрекетті зерттеу оқытудың тиімді әдістерін анықтау және болашақ мамандардың оқу нәтижелерін жақсарту мақсатында өзінің педагогикалық практикасына зерттеу жүргізетін оқытушыларды немесе зерттеушілерді қамтиды.
9) Аралас әдістермен зерттеу: зерттеушілер оптиканы нөлден бастап оқытудың сандық және сапалық деректерін жинау үшін әртүрлі зерттеу әдістерінің комбинациясын пайдалана алады. Бұл әртүрлі оқыту әдістерінің тиімділігі туралы толық түсінік бере алады.

Бұл оптикалық оқыту зерттеулерінде нөлден бастап қолдануға болатын әдістердің бірнеше мысалдары. Зерттеушілер зерттеу сұрағына жауап беру үшін қандай әдістер ең пайдалы және сәйкес деректерді алатынын мұқият қарастыруы керек.

Оптиканы нөлден оқыту тақырыбында зерттеулер жүргізу кезінде бірнеше инновациялық құрылғыларды қолдануға болады [30-31]. Бірнеше мысалдар келтірілген:

1) Оптика жинақтары: бұл жинақтарға әдетте әртүрлі оптикалық қондырғыларды жасау үшін пайдалануға болатын линзалар, айналар және басқа оптикалық компоненттер кіреді. Оптика жинақтары болашақ мамандарға жарықтың әрекетін елестетуге көмектесетін практикалық әрекеттер мен демонстрациялар үшін пайдалы.
2) Интерактивті тақталар: интерактивті тақталар - бұл пайдаланушыларға сандық мазмұнмен қалам немесе саусақ арқылы өзара әрекеттесуге мүмкіндік беретін үлкен экрандар. Оларды оптика тұжырымдамаларының визуалды көріністерін көрсету және болашақ мамандарды қамтитын интерактивті әрекеттерді қамтамасыз ету үшін пайдалануға болады.
3) Компьютерлік модельдеу: компьютерлік модельдеуді оптикалық құбылыстарды модельдеу үшін қолдануға болады және болашақ мамандарға әртүрлі айнымалыларды зерттеуге және басқаруға мүмкіндік береді. Модельдеу әсіресе елестету қиын күрделі ұғымдарды көрсету үшін пайдалы.

4) Виртуалды шындық жүйелері (VR): виртуалды шындық жүйелері болашақ мамандарға үш өлшемді ортада оптикалық құбылыстармен өзара әрекеттесуге мүмкіндік беретін иммерсивті әсерді қамтамасыз ете алады. Виртуалды шындық жүйелері әсіресе физикалық зертханада қайталануы қиын ұғымдарды көрсету үшін өте пайдалы.
5) Спектрометрлер: спектрометрлер-жарықтың толқын ұзындығы мен қарқындылығы сияқты қасиеттерін өлшеу үшін қолдануға болатын құрылғылар. Оларды жарықтың мінез-құлқын зерттейтін эксперименттер жүргізу үшін және оның көзі туралы ақпарат алу үшін жарықты қалай талдауға болатындығын көрсету үшін пайдалануға болады.
6) Лазерлік көрсеткіштер: лазерлік көрсеткіштерді шағылысу және сыну сияқты әртүрлі оптикалық құбылыстарды көрсету үшін пайдалануға болатын жарық сәулелерін жасау үшін пайдалануға болады. Олар әсіресе жарықтың әртүрлі материалдарда қалай әрекет ететінін көрсету үшін өте пайдалы.
7) Талшықты-оптикалық жиынтықтар: талшықты-оптикалық жиынтықтар ақпаратты алыс қашықтыққа беру үшін пайдалануға болатын оптикалық талшықтарда жарықты құру және басқару үшін пайдаланылуы мүмкін. Олар ақпаратты беру үшін жарықты қалай пайдалануға болатынын көрсету және әртүрлі материалдардағы жарықтың әрекетін зерттеу үшін пайдаланылуы мүмкін.
8) Поляризаторлар: Поляризаторлар - жарықтың поляризациясын басқаруға болатын оптикалық сүзгілер. Оларды поляризацияланған жарықтың мінез-құлқын зерттейтін эксперименттер жүргізу үшін және поляризаторларды жарықтың бағытын басқару үшін қалай пайдалануға болатындығын көрсету үшін пайдалануға болады.
9) Голографиялық пластиналар: голографиялық пластиналар - үш өлшемді голографиялық кескіндерді жасау үшін пайдалануға болатын фотопластинкалар. Оларды жарықтың мінез-құлқын көрсету және голографиялық кескіндердің қасиеттерін зерттеу үшін пайдалануға болады.Жалпы, жабдықты таңдау нақты зерттеу сұрағы мен зерттеу мақсаттарына байланысты болады. Зерттеушілер зерттеу сұрағына жауап беру үшін қай жабдық ең пайдалы және сәйкес деректерді беретінін мұқият қарастыруы керек. Оптиканы нөлден оқыту әдістемесін зерттеу аясында жүргізілуі мүмкін негізгі тиімді нәтижелер мен талдаулар нақты зерттеу сұрағы мен зерттеу контекстіне байланысты болады [32-33]. Дегенмен, мұнда зерттеушілер оптиканы нөлден оқыту әдістемесінің тиімділігін зерттеу кезінде ескеруі мүмкін бірнеше жалпы нәтижелер мен талдаулар берілген:
10) Оқыту нәтижелері: оптиканы нөлден оқыту әдістемесі бойынша зерттеудің маңызды нәтижелерінің бірі-оқу нәтижелерін өлшеу. Бұл болашақ мамандардың түсінігін алдын-ала және кейінгі бағалауды, сондай-ақ болашақ мамандардың жұмысы мен тапсырмалар мен емтихандардағы үлгерімін талдауды қамтуы мүмкін. Зерттеушілер сонымен қатар оқыту әдістемесінің болашақ мамандардың көзқарасына және олардың оптикаға деген сеніміне әсерін қарастырады.
11) Педагогикалық тәсілдер: оптиканы нөлден оқыту әдістемесін зерттеудің тағы бір маңызды нәтижесі-тиімді педагогикалық тәсілдерді анықтау. Бұған сұранысқа негізделген оқыту, бірлесіп оқыту және технологияны пайдалана отырып оқыту сияқты оқыту стратегияларын талдау кіреді. Зерттеушілер сонымен қатар педагогикалық тәсілдердің болашақ мамандардың қатысуы мен мотивациясына әсерін қарастырады.
12) Оқу жоспарын әзірлеу: оптиканы нөлден оқыту әдістемесін зерттеу оқу жоспарын әзірлеудің тиімділігін талдауға көмектеседі. Бұл оқулықтарды, дәріс жазбаларын және зертханалық құралдарды қоса алғанда, курс материалдарын талдауды қамтиды. Зерттеушілер сонымен қатар оқу жоспарын құрудың болашақ мамандардың түсінігі мен қатысуына әсерін қарастырады.
13) Мұғалімнің тиімділігі: оптиканы нөлден оқыту әдістемесін зерттеу сонымен қатар мұғалімнің тиімділігінің болашақ мамандардың оқу нәтижелеріне әсерін талдай алады. Бұл мұғалімнің білімі мен педагогикалық мазмұн туралы білімін талдауды, сондай-ақ мұғалім

мен оқушының өзара әрекеттесуінің болашақ мамандардың оқуына әсерін қамтиды.
14) Бағалау тиімділігі: оптиканы нөлден оқыту әдістемесін зерттеу бағалау әдістерінің тиімділігін де талдай алады. Бұл бағалаудың дұрыстығы мен сенімділігін талдауды, сондай-ақ бағалауды оқытудың мақсаттары мен міндеттеріне сәйкестендіруді қамтуы мүмкін. Зерттеушілер бағалау әдістерінің болашақ мамандардың оқуы мен мотивациясына әсерін де қарастырады.
15) Болашақ мамандарды қызықтыру: оптиканы нөлден оқыту әдістемесін зерттеу сонымен қатар әртүрлі оқыту стратегияларының болашақ мамандарды қызықтыру әсерін талдауға көмектеседі. Бұл болашақ мамандардың мотивациясы, қызығушылығы және өзін-өзі тиімділігі, сондай-ақ сыныптағы климаттың әсері және мұғалім мен оқушының өзара әрекеттесуі сияқты факторларды талдауды қамтиды.
16) Оқыту трансферті: оптиканы оқыту әдістемесін нөлден зерттеу сонымен қатар болашақ мамандардың оқуын жаңа контексттерге қаншалықты аудара алатынын талдай алады. Бұл оқыту әдістемесінің сыни ойлау дағдыларын, проблемаларды шешу дағдыларын және нақты жағдайларда оптика тұжырымдамаларын қолдану қабілетін дамытуға әсерін талдауды қамтиды.
17) Әр түрлілік және инклюзивтілік: оптиканы нөлден оқыту әдістемесін зерттеу сонымен қатар оқыту әдістемесінің әртүрлі ортадағы болашақ мамандардың оқу нәтижелеріне әсерін талдай алады. Бұған нәсіл, этникалық, жыныс және әлеуметтік-экономикалық жағдай сияқты факторларды талдау, сондай-ақ инклюзивті оқыту әдістерінің болашақ мамандардың оқуы мен қатысуына әсері кіреді.

Тұтастай алғанда, оптиканы оқыту әдістемесі бойынша зерттеулердің тиімді нәтижелері мен талдауы оптика тұжырымдамаларының күрделілігін, әртүрлі болашақ мамандардың қажеттіліктерін және оқыту мен қатысуды жақсарту үшін технологиялардың әлеуетін ескеретін кешенді және жүйелі тәсілді қажет етеді.

Нәтижелер, талдау және талқылау

Зерттеу әдісі ашық сұрақтарға негізделген сауалнама түрінде жүргізілді. Сауалнамалар екі топтағы барлық болашақ мамандарға таратылды. Болашақ мамандарға сұрақтарға жауап беру және тапсырманы орындау үшін не қажет екенін түсіндіру тапсырылды. Атап айтқанда, эксперименттік жұмыс процесін сапалы бағалау ұсынылды. Сауалнамада Жарық құбылыстары мен оптика туралы алғашқы білім туралы 3 сұрақ қойылды.

1. Сәулелер бірінші ортадан екінші ортаға ауысатын физикалық құбылыстарға байланысты.

2. Салыстырмалы және абсолютті сыну көрсеткішіне байланысты

3. Эксперимент тұрғысынан жарықтың сынуы және оның табиғатпен байланысы туралы.

Нәтижелер талданды және сауалнамалар арқылы болашақ мамандарға қойған сұрақтарға жауаптар берілді. Нәтижелерді талдау барысында оқушыдың сұрақтарына жауаптар талданып, үш санатқа бөлінді.:

Санат А: дұрыс жауаптар, сұрақтарға дұрыс әрі нақты түсіндірмелер сипаттауы.

Санат В: толық емес жауап және нақты мысал келтірмеуі.

Санат С: тақырыпқа мүлдем қатысы жоқ немесе сұрақтарға жауап бермеуі.

Бірінші (1) тапсырмада бақылау тобы болашақ мамандарының 36 % - ы және эксперименттік топ болашақ мамандардың 8% - ы 1-кестеде келтірілген мәндерге сәйкес қате жауап берді. Алайда кейбір болашақ мамандар толық жауап бермеді.
Келтірілген мысалдары мыналар:

- Сыну көрсеткіші шынының сынуына байланысты.
- Сыну заңы түсетін жарықтың күшіне байланысты жылдамдығына емес.

- Абсолютті және салыстырмалы сыну көрсеткіштері арасында ешқандай айырмашылық жоқ.

Болашақ мамандардың жауаптарын талдау кезінде жиі кездесетін қате түсінік- жарықтың сынуының ауытқуы оның жылдамдығына ешқандай қатысы жоқ. Шамасы, бақылау тобындағы болашақ мамандардың 30% - ы бұл жарықтың сынуы оның бірінші ортадан екінші ортаға ауысуымен байланысты деп есептеді. Екінші жағынан, эксперименттік топ мүшелерінің 50% - ы да осы нанымдарды ұстанды.

1-кесте – Жарық сәулесінің бірінші ортадан екінші ортаға өткенде сынған сәуленің түскен сәледен бағыты ауытқиды сұрағы бойынша алынған нәтижелер

Санаттар	Бақылау тобы-25 (100%)	Эксперименттік топ-20 (100%)
Жауаптары дұрыс	6 (24%)	14 (56%)
Толық емес жауап	10 (40%)	9 (36%)
Қате жауап	9 (36%)	2 (8%)

Бақылау тобындағы болашақ мамандардың тек 24% - ғылыми тұрғыдан дұрыс жауап берды,себебі түскен сәулемен сынған сәуле арасында бұрыштық ауытқу бар екенін көрсетті. Ал екінші (2) тапсырмаға жауап нәтижесі 2-кестеде келтірілген.

2-кесте – Салыстырмалы және абсалют сыну көрсеткіштерін салыстыру сұрағы бойынша алынған нәтижелер

Санаттар	Бақылау тобы-25 (100%)	Эксперименттік топ-25 (100%)
Жауаптары дұрыс	9 (36%)	12 (48%)
Толық емес жауап	10 (40%)	9 (36%)
Қате жауап	6 (24%)	4 (16%)

Кестеден көріп отырғанымыздай, дұрыс жауап берген екі топтағы болашақ мамандардың деңгейі онша жоғары емес екенін растай аламыз. Толық жауабы жоқ болашақ мамандар үшін жауаптардың арасында мыналар бар:

- Сыну көрсеткіштерінің екеуі де бірдей, себебі олардың формуласында жылдамдық бірдей.
- Жарық жылдамдығы меен сәуленің таралу жарық жылдамдығы бірдей, өйткені ол бір ортада таралады.

-деген толық емес жауаптар бар.Болашақ мамандар табылған қатенің салыстырмалы сыну көрсеткіші мен абсолютті сыну көрсеткіші арасында ешқандай айырмашылық жоқ екенін жиі көре алады. Болашақ мамандар жылдамдықты бірдей деп түсінгенін байқауға болады.

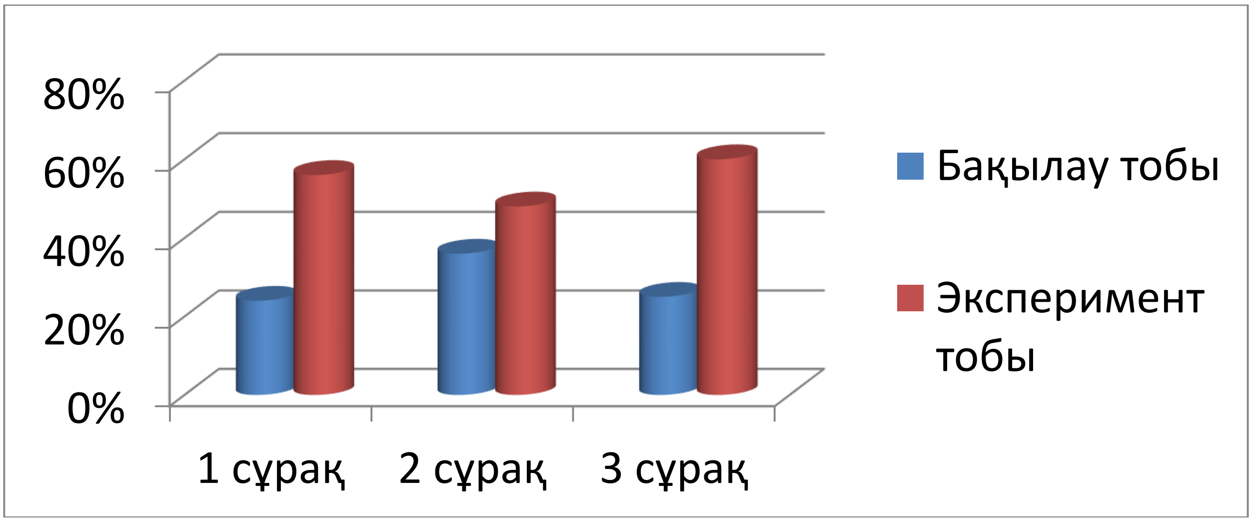
3-кесте – Әр түрлі жылдамдықпен түскен сәулелердің шыныда сыну көрсеткішін салыстыру тапсырмасының нәтижелері

Санаттар	Бақылау тобы-25 (100%)	Эксперименттік топ-25 (100%)
Жауаптары дұрыс	6 (25%)	15 (60%)
Толық емес жауап	11 (44%)	7 (28%)

Қате жауап	8 (32%)	3 (12%)

Үшінші тапсырмада сұрақтың күрделілігіне байланысты дұрыс жауап берген болашақ мамандардың аздығын көреміз.Және кестеден эксперименттік топқа қатысушы болашақ мамандардың 60% - ы және бақылау тобына қатысушы болашақ мамандардың 25% - ы дұрыс жауап берді деп нәтиже алынды. Ал кейбір болашақ мамандар мүлдем жауап бермеді.

Оларға кездескен қиындықтардың көпшілігі:
Шынының сыну көрсеткішінің мәні өте жоғары немесе өте төмен болуы,себебі түскен сәулені дұрыс бағыттау әрі дұрыс нүктесін белгілеу арқылы оқушы қағазға шынының сынған кесінділерін дәл көрсете алмауы негізінде, соңғы берілген тапсырманың шарттары бірдей.Табуға болатын мәндерде тек айырмашылықтар бар. Соңғы тапсырма басқа сұрақтарға қарағанда күрделі болғандықтан, бақылау тобында нақты жауаптар аз. Егер біз үшінші тапсырмадағы эксперименттік топтың дұрыс жауабымен байланысты статистиканың мәнін қарастыратын болсақ, онда бақылау тобында эксперименттік топқа қарағанда болашақ мамандар саны екі еседей аз болады. 3-кестеде келтірілген пайыздық мәндерге назар аудара отырып, эксперименттік топтың болашақ мамандары бақылау тобының болашақ мамандарына қарағанда екі есе көп дұрыс жауап берді. Нәтижелер бойынша толық емес жауап берген болашақ мамандардың жауаптарын талдаған кезде, жарықтың түсу бұрышы мен жарық жылдамдығы ұғымдары бір-біріне тәуелді, біреуі екіншісіне тікелей байланысты, бірақ айырмашылықты нақты терминдермен түсіндіру қиынға соғатынын анықтадық.



1 – сурет. Топ жауаптарының көрсеткіші

1-суретте эксперименттік және бақылау топтарының дұрыс жауаптарына сәйкес алынған нәтижелер салыстырылды. Екі топтағы көптеген болашақ мамандар жарық сәулелері ұғымымен байланысты тиісті сипаттамаларға емес, негізгі аргумент элементі сыну түрі болғандығына сүйенді. Бұл дегеніміз, бақылау тобындағы болашақ мамандар сыну көрсеткішін анықтаған кезде сәуле бірінші ортадан екінші ортаға өтетін құбылысты түсінбейді. Екінші жағынан, эксперименттік топ болашақ мамандарының 60% - ы дұрыс жауап беруі. Бұл олардың шыныдағы сыну көрсеткішін анықтайтын сыну бұрышы, түсу бұрышы, сыну көрсеткіші туралы түсініктерін түсінгендерін көрсетеді. Түсіндірме статистикалық нәтижелер екі топтың арасында айтарлықтай айырмашылық бар екенін көрсетеді. 1-суретте екі топ үшін болашақ мамандардың дұрыс жауаптарының салыстырмалы диаграммасы көрсетілген. Жалпы, модельдеуге негізделген оқу оқыту болашақ мамандарға физикалық түсініктерін жетілдіруге көмектесетіні анықталды.

Қорытынды

Қорытындылай келе, оптиканы нөлден оқыту әдістемесі болашақ мамандарға жарықтың қасиеттері мен мінез-құлқын тиімді оқытудың бірқатар тәсілдері мен әдістерін қамтиды. Оқытудың тиімді әдістемесі болашақ мамандардың оқу мәнерлерін, оқу мақсаттары мен бағалау әдістерін мұқият есепке алуды талап етеді. Интерактивті компьютерлік модельдеу және виртуалды зертханалар сияқты инновациялық оқыту құралдары болашақ мамандардың белсенділігін арттырып, күрделі оптикалық тұжырымдамаларды түсінуді жеңілдетеді.

Оптиканы оқыту әдістемесіндегі зерттеулер әртүрлі оқыту стратегияларының тиімділігін, болашақ мамандардың оқуына бағалаудың әсерін, сыни ойлау дағдыларын дамытуды, нақты жағдайларға оптикалық тұжырымдамаларды қолдану қабілетін және инклюзивті оқыту әдістерінің болашақ мамандардың оқуы мен қатысуына әсерін талдай алады. Осы факторларды талдай отырып, зерттеушілер оқытудың тиімді әдістерін анықтай алады және жоғары сапалы оптикалық оқу бағдарламалары мен оқыту стратегияларын үздіксіз әзірлеуге үлес қоса алады.

Оптиканы нөлден оқыту әдістемесі білім деңгейіне және курстың нақты оқу мақсаттарына байланысты өзгеруі мүмкін екенін ескеру маңызды. Мысалы, орта мектептің кіріспе физика сабағында оптиканы оқытуға деген көзқарас колледж деңгейіндегі жетілдірілген курсқа деген көзқарастан өзгеше болуы мүмкін. Дегенмен, оптиканы оқытудың тиімді әдістемесінің кейбір жалпы элементтеріне практикалық эксперименттер, Көрнекі құралдар, интерактивті компьютерлік модельдеу және мәселелерді шешу әрекеттері жатады.

Оқытудың инновациялық құралдарын пайдаланудан басқа, оптиканы оқытудың тиімді әдістемесі оқушыға бағытталған оқытуға, инклюзивтілікке және бағалауға баса назар аударуды қамтуы керек. Болашақ мамандарды оқу процесіне тарту, олардың қызығушылығын ояту және оларға оптикалық тұжырымдамаларды нақты жағдайларға қолдануға мүмкіндік беру арқылы оқытушылар болашақ мамандардың белсенділігін арттырып, материалды түсінуін тереңдете алады.

Бағалау сонымен қатар оптиканы оқытудың тиімді әдістемесінің маңызды құрамдас бөлігі болып табылады. Викториналар, емтихандар, тапсырмалар жинақтары және жобаға негізделген тапсырмалар сияқты бірқатар бағалау әдістерін пайдалана отырып, оқытушылар болашақ мамандардың түсінігін бағалай алады және болашақ мамандарға қосымша қолдау қажет болуы мүмкін бағыттарды анықтай алады. Сонымен қатар, сыныптағы талқылау және кері байланыс сияқты қалыптастырушы бағалар болашақ мамандардың оқуы туралы құнды ақпарат бере алады және оқытушыларға қажет болған жағдайда оқыту әдістемесін түзетуге көмектеседі.

Тұтастай алғанда, оптиканы нөлден үйрену күрделі ұғымдарды түсінуге оңай ету үшін шыдамдылық пен шығармашылықты қажет етеді. Оқытудың тиімді әдістемесі мен оқытудың инновациялық құралдарын пайдалана отырып, болашақ мамандар оптика принциптерінде берік негізді дамыта алады және осы тұжырымдамаларды ғылым мен техникада қолданудың кең ауқымына қолдана алады.

Қорытындылай келе, оптиканы нөлден оқыту әдістемесі болашақ мамандарға бағытталған оқытуға, инклюзивтілікке және бағалауға баса назар аудара отырып, бірқатар тиімді оқыту құралдарын қажет ететінін атап өткен жөн. Осы стратегияларды қолдана отырып, оқытушылар болашақ мамандарға жарықтың қасиеттері мен мінез-құлқын тиімді үйрете алады және оларға осы ұғымдарды ғылым мен техникада қолданудың кең ауқымында қолдануға негіз бола алады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. "Optics Education: Teaching and Learning Optics - A Resource Guide" by The Optical Society. This guide provides a comprehensive overview of optics education, including teaching strategies, learning resources, and assessment tools. Available at: https://www.osa.org/en-us/resources/optics_education/teaching_and_learning_optics/
2. "Light and Optics: Principles and Practices" by Stephen M. Pompea and Janet Fender. This textbook provides a comprehensive introduction to the principles of optics, including light waves, reflection, refraction, and diffraction, and includes hands-on activities and real-world examples. Available at: https://www.osa.org/en-us/resources/optics_education/textbook/
3. Кириченко, А. С., & Кириченко, В. А. (2016). Основы оптики: учебное пособие. Москва: Юрайт.
4. Сивухин, Д. В. (2003). Общий курс физики. Т. 4. Оптика. Москва: Наука.
5. Гусев, И. В., & Савченко, Ю. М. (2021). Оптика: учебник для студентов вузов. Москва: МГТУ им. Баумана.
6. Andaloro G., Bellomonte L. and Sperandeo-Mineo R. M. Computer learning environment in the field of Newtonian mechanics. – London: Publishing House of the International Journal of Scientific Education. - 1997. – 19. 660-682 p.
7. Бешенков С. А., Ракитина Е., Миндзаева Е. – Россия: Издательство "КиберЛенинка". Информационное образование в России. Знания. Понимание. Способность. – 2013. № 3. С. 42-51
8. Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина. Современные педагогические и информационные технологии в системе образования. – Москва: Издательский центр "Академия". – 2010. – 17с.
9. Wang J., Zhou M., Donghui G. Investigation of the influence of model-based research pedagogy on students' research skills in a virtual physical laboratory. – Netherlands: Elsevier Science Publishers BV. Computers in human behavior. – 2015. – 49. 657 – 670s.
10. 1Jingying V., Yaozhong L., Ming J., Jingbing Ch. Exploring the Impact of cloud pedagogy on creative talents: A case study of a Chinese high school. – Netherlands: Elsevier Science Publishers BV. Computers in human behavior. – 2016. – 63. 228-240c.
11. Дьячук П., Лариков В. Применение компьютерных технологий обучения в средней школе. - Красноярск: Изд-во КГПУ. – 1996.
12. Becker H.J. How are teachers using computers ininstruction. Paper presented at the Annual Meeting of theAmerican Educational Research Association, Seattle, WA. -2001. - 45 p.
13. Молдабекова М.С. К методике изучения некоторых вопросов тепломассообмена с применением информационных технологий // Сб.трудов «Актуальные проблемы современной физики»: Материалы Междун. науч. конф., посвящ. 80-летию профессора Исатаева С. И. - Алматы: Қазақ университеті, - 2012. - С.47 -50.
14. Жумадиллаев К.Н. Физикалық тәжірибелерді виртуальды компьютерлік модельдеу. - Алматы, 2002. - 65 б.
15. Красиков С.А. Компьютерное моделирование на уроках физики. – Алматы, 2001. – 194 с.
16. "Interactive Simulation Tools for Optics Learning," S. Kalaidjian, S. Meister, and J. Engelhardt, Proceedings of SPIE, Vol. 9289, 2014.
17. "Interactive Simulation Tools for Optics Learning," S. Kalaidjian, S. Meister, and J. Engelhardt, Proceedings of SPIE, Vol. 9289, 2014.

18. Раманкулов Ш.Ж., Беркимбаев К.М., Сарыбаева Ә.Х., Шектибаев Н.А. «Физикалық құбылыстар»: электронды оқу құралы. Қазақстан Республикасы Әділет министрлігі,.-2015.- № 678.-45 б
19. Новиков, И. И., & Щепин, О. Н. (2014). Основы оптики: учебное пособие. Москва: Лань.
20. Потапов, А. А. (2012). Оптика: учебное пособие. Москва: Издательский центр "Академия".
21. Лазарев, А. А. (2018). Оптика: учебное пособие. Москва: Издательство Юрайт.
22. "Teaching Optics with Classroom Demonstrations" by K. F. Edwards and M. Kono, American Journal of Physics, 65, 1081 (1997).
23. "Teaching Optics Using Interactive Demonstrations and Simulations" by J. E. Lewis and C. W. Fultz, American Journal of Physics, 71, 69 (2003).
24. "Teaching Optics Through Problem-Solving" by M. E. Shubert, J. D. Phillips, and S. S. Shahin, Physics Teacher, 53, 292 (2015).
25. "Teaching Optics Concepts with Digital Media and Simulation Tools" by A. J. LaPorta and C. S. Sorensen, Physics Teacher, 58, 82 (2020).
26. "Teaching Optics with a Combination of Inquiry-Based Laboratories and Digital Media" by K. T. Chitwood and M. L. Mills, Physics Teacher, 59, 17 (2021).
27. "Teaching Optics from Scratch: An Introduction to Optics for Novice Learners" by M. L. Mills and A. J. LaPorta, Journal of College Science Teaching, 50, 62 (2020).
28. "Teaching Optics with Simple Experimentation" by C. L. Cramer and D. B. Hume, Physics Teacher, 55, 361 (2017).
29. "Teaching Optics Concepts Using Inquiry-Based Laboratories" by J. B. Baird and J. F. Kuo, Physics Teacher, 54, 464 (2016).
30. "Teaching Optics Using Interactive and Engaging Demonstrations" by M. L. Mills and J. R. Weaver, Physics Teacher, 57, 155 (2019).
31. "Teaching Optics Using Project-Based Learning" by J. B. Baird and J. F. Kuo, Physics Teacher, 56, 435 (2018).
32. Dubinin, V. A. (1999). Optics. Moscow: Fizmatlit.
33. Shirokov, A. P. (2011). Optics: a textbook. Moscow: Lan.

REFERENCES

1. "Optics Education: Teaching and Learning Optics - A Resource Guide" by The Optical Society. This guide provides a comprehensive overview of optics education, including teaching strategies, learning resources, and assessment tools. Available at: https://www.osa.org/en-us/resources/optics_education/teaching_and_learning_optics/
2. "Light and Optics: Principles and Practices" by Stephen M. Pompea and Janet Fender. This textbook provides a comprehensive introduction to the principles of optics, including light waves, reflection, refraction, and diffraction, and includes hands-on activities and real-world examples. Available at: https://www.osa.org/en-us/resources/optics_education/textbook/
3. Kırıchenko, A.S., & Kırıchenko, V. A. (2016). Osnovi optiki:uchebnoe posobie. Moskva: Iuraıt.
4. Sıvuhın, D. V. (2003).obshii kurs fiziki. T.4. Optıka. Moskva: Nauka.
5. Gusev, I.V., & Savchenko, Iu. M. (2021). Optıka: uchebnik dlia studentov. Moskva: MGTU. Baumana.
6. Andaloro G., Bellomonte L. and Sperandeo-Mineo R. M. Computer learning environment in the field of Newtonian mechanics. – London: Publishing House of the International

Journal of Scientific Education. - 1997. – 19. 660-682 p.
7. Beshenkov S.A., Rakıtına E., Mındzaeva E. – Rossia:Izdatelstvo "Kıberlenınka". Invormasionnoe obrozavanie v Rossii. Znania.Ponimania.Sposobnost. – 2013. № 3. 42-51 s
8. E.S. Polat, M. Iu. Buharkına. Sovremennie pedagogicheskie I informosionnie tehnologii v sisteme obrozobania. - Moskva: Izdatelskii sentr "Akademıa". – 2010. – 17s.
9. Wang J., Zhou M., Donghui G. Investigation of the influence of model-based research pedagogy on students' research skills in a virtual physical laboratory. – Netherlands: Elsevier Science Publishers BV. Computers in human behavior. – 2015. – 49. 657 – 670s.
10. Jingying V., Yaozhong L., Ming J., Jingbing Ch. Exploring the Impact of cloud pedagogy on creative talents: A case study of a Chinese high school. – Netherlands: Elsevier Science Publishers BV. Computers in human behavior. – 2016. – 63. 228-240c.
11. Dachuk P., Larıkov V. V premenenie komputernih tehnologi obucheni v srednoi shkole. - Krasnoıarsk: Izdatelstvo KGPU. – 1996.
12. Becker H.J. How are teachers using computers ininstruction. Paper presented at the Annual Meeting of theAmerican Educational Research Association, Seattle, WA. -2001. - 45 p.
13. Moldabekova M.S. K metodike izuchenia nekotoryh voprosov teplomassoobmena s premeneniem informosionnyh tehnologii//Sb.trudov "Aktualnie problemi sovremmennoi fiziki": Mettepıalli Mejdun. Nauch. konf., posviach. 80-letniu Professora S. I. Isataeva - Almaty: Kazak unıversıteti, - 2012. - s. 47 -50.
14. Jumadıllaev K. N. Fızıkalyk tajiribilerdı vırtualdy komputerlık modeldeu. - Almaty, 2002. - 65 b.
15. Krasıkov S. A. Komputernoe vodelirovanie na urokah fiziki. - Almaty, 2001. – 194 s.
16. "Interactive Simulation Tools for Optics Learning," S. Kalaidjian, S. Meister, and J. Engelhardt, Proceedings of SPIE, Vol. 9289, 2014.
17. "Interactive Simulation Tools for Optics Learning," S. Kalaidjian, S. Meister, and J. Engelhardt, Proceedings of SPIE, Vol. 9289, 2014.
18. Ramanqulov Sh. J., Berkimbaev K.M., Sarybaeva A.H., Shektibaev N.Bar. "Fızıka kubyrlary": elektrondy kural. Kazakstan Respublıkasy Adilet mınıstrligi,.-2015.- № 678.-45 b
19. Novıkov, I. I., & Shepın, O. N. (2014). Osnovi optika: Ucebnoe posobie.Moskva: Lan.
20. Potapov, A. A. (2012). Optıka: uchebnoe posobia. Moskva: Izdatelski sentr "Akademıa".
21. Lazarev, A. A. (2018). Optıka: uchebnoe posobia . Moskva: Izdatelstvo Iuraıt .
22. "Teaching Optics with Classroom Demonstrations" by K. F. Edwards and M. Kono, American Journal of Physics, 65, 1081 (1997).
23. "Teaching Optics Using Interactive Demonstrations and Simulations" by J. E. Lewis and C. W. Fultz, American Journal of Physics, 71, 69 (2003).
24. "Teaching Optics Through Problem-Solving" by M. E. Shubert, J. D. Phillips, and S. S. Shahin, Physics Teacher, 53, 292 (2015).
25. "Teaching Optics Concepts with Digital Media and Simulation Tools" by A. J. LaPorta and C. S. Sorensen, Physics Teacher, 58, 82 (2020).
26. "Teaching Optics with a Combination of Inquiry-Based Laboratories and Digital Media" by K. T. Chitwood and M. L. Mills, Physics Teacher, 59, 17 (2021).
27. "Teaching Optics from Scratch: An Introduction to Optics for Novice Learners" by M. L. Mills and A. J. LaPorta, Journal of College Science Teaching, 50, 62 (2020).
28. "Teaching Optics with Simple Experimentation" by C. L. Cramer and D. B. Hume, Physics Teacher, 55, 361 (2017).
29. "Teaching Optics Concepts Using Inquiry-Based Laboratories" by J. B. Baird and J. F. Kuo, Physics Teacher, 54, 464 (2016).

30. "Teaching Optics Using Interactive and Engaging Demonstrations" by M. L. Mills and J. R. Weaver, Physics Teacher, 57, 155 (2019).
31. "Teaching Optics Using Project-Based Learning" by J. B. Baird and J. F. Kuo, Physics Teacher, 56, 435 (2018).
32. Dubinin, V. A. (1999). Optics. Moscow: Fizmatlit.
33. Shirokov, A. P. (2011). Optics: a textbook. Moscow: Lan.

ӘОЖ 37.013:75;
МҒТАР 29.03.77
https://doi.org/10.47526/2023-3/2524-0080.05

Н. А. ШЕКТИБАЕВ[1], Б. СПАБЕК[2]
[1]PhD, аға оқытушы Қожа Ахмет Ясауи атындағы халықаралық қазақ түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан), e-mail: Nurdaulet.Shektibaev@ayu.edu.kz
[2]7M01506-Физика педагогтерін даярлау мамандығының 1 курс магистранты Қожа Ахмет Ясауи атындағы халықаралық қазақ түрік университеті, (Қазақстан, Түркістан), e-mail: Bekbolatspabek@gmail.com

ФИЗИКАДАН 3D ЭКСПЕРИМЕНТТЕРІН ҰЙЫМДАСТЫРУ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Аңдатпа. Бұл мақалада «Оптика» бөлімі бойынша виртуалды эксперименттерді оңай ұйымдастыру ерекшеліктерін зерттеу қарастырылған.

Ғылыми зерттеулерді өткізу үшін база ретінде Түркістан облысы, Түркістан қаласындағы Ж.Тәшенов атындағы №23 жалпы орта IT- мектеп лицейі таңдап алынып, зерттеу өткізілді. Ғылыми- педагогикалық әдіс ретінде: сапалық және сандық әдістері, сауалнама әдісі, проблемалы оқыту әдісі, бақылау әдісі қолданылды.

Бұл зерттеу виртуалды зертхана арқылы болашақ маманның оптика саласындағы тұжырымдамалық шеберлігін жақсартуға бағытталған. Бұл зерттеу мен әзірлеу үш кезеңнен тұрды, атап айтқанда алдын ала зерттеу, виртуалды зертхананы жобалау және виртуалды зертхананы сынау. Оқытудың жағдайына байланысты виртуалды зертханалық жұмысты орындау өте қиын. Сұрау негізіндегі оқытуды виртуалды зертханалық әрекетпен үйлестіру оқыту аясында анағұрлым оңай, бірақ мағыналы оқу процесін дамытуға балама бола алады. Бұл зерттеу жарық құбылыстары және оптика тақырыптарындағы ғылыми сауаттылығын сұрауға негізделген оқыту арқылы виртуалды зертханалық әрекетті талдауға бағытталған. Зерттеу эквивалентті емес бақылау тобының дизайны түріндегі зерттеу дәйекті дизайнымен аралас әдістерді қолданды. Сынамалар іріктеудің мақсатты әдісін қолдана отырып алынды. Деректер бақылаулар, сауалнамалар және тесттер, сондай-ақ сұхбаттар арқылы жиналды. Содан кейін деректер екі таңдамалы топтың оқу тиімділігін көру үшін тәуелсіз таңдамалы критерийі мен біртектілік сынағы арқылы талданды. Нәтижелер виртуалды зертхананы пайдалана отырып, оқытудың практикалық тиімділігі өте сәтті болғанын және жақсы пікірлер алғанын көрсетеді. Виртуалды зертхананың тиімділігін деңгей бойынша бағалауға болады. Осылайша, виртуалды зертханалар оқушылардың оқу нәтижелерін арттыруға оң үлес қоса алатын оқу құралы ретінде пайдаланылуы мүмкін.

Кілт сөздер: Оптика, 3D эксперимент, 3D модельдеу, сандық және сапалық әдіс, виртуалды зертхана.

Особенности организации 3D-экспериментов по физике

Н.А. Шектибаев[1], Б. Спабек[2]
[1]PhD, старший преподаватель Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан), e-mail: Nurdaulet.Shektibaev@ayu.edu.kz
[2]Магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан), e-mail: Bekbolatspabek@gmail.com

Аннотация. В данной статье рассматривается изучение особенностей легкой организации виртуальных экспериментов по разделу «Оптика».

В качестве базы для проведения научных исследований был выбран лицей средней IT - школы №23 имени Ж. Ташенова города Туркестан, Туркестанской области. В качестве научно-педагогического метода использовались: качественные и количественные методы, метод анкетирования, метод проблемного обучения, метод контроля.

Это исследование направлено на улучшение концептуальных навыков будущего специалиста в области оптики с помощью виртуальной лаборатории. Это исследование и разработка состояли из трех этапов, а именно предварительного исследования, проектирования виртуальной лаборатории и тестирования виртуальной лаборатории. Из-за условий обучения выполнить виртуальную лабораторную работу очень сложно. Сочетание обучения на основе запросов с виртуальной лабораторной деятельностью может стать альтернативой разработке более простого, но значимого процесса обучения в рамках обучения. Это исследование направлено на анализ виртуальной лабораторной деятельности с помощью обучения, основанного на запросе научной грамотности по темам световых явлений и оптики.

В исследовании использовались смешанные методы с последовательным дизайном в виде неэквивалентного дизайна контрольной группы. Пробы отбирали с использованием целевого метода отбора проб. Данные были собраны с помощью наблюдений, опросов и тестов, а также интервью. Затем данные были проанализированы с помощью независимого выборочного критерия и теста на однородность, чтобы увидеть эффективность обучения двух выборочных групп. Результаты показывают, что практическая эффективность обучения с использованием виртуальной лаборатории была очень успешной и получила хорошие отзывы. Эффективность виртуальной лаборатории можно оценить по уровню. Таким образом, виртуальные лаборатории можно использовать в качестве учебных пособий, которые могут внести положительный вклад в повышение успеваемости учащихся.

Ключевые слова: Оптика, 3D эксперимент, 3D моделирование, количественный и качественный метод, виртуальная лаборатория.

Features of the organization of 3D experiments in physics.

N.A. Shektibaev[1], B. Spabek[2]

[1]PhD, Senior lecturer of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: Nurdaulet.Shektibaev@ayu.edu.kz

[2]master's student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: Bekbolatspabek@gmail.com

Annotation. This article examines the study of the features of the easy organization of virtual experiments in the section «Optics».

This research is aimed at improving the conceptual skills of a future specialist in the field of optics with the help of a virtual laboratory. This research and development consisted of three stages, namely preliminary research, design of a virtual laboratory and testing of a virtual laboratory. Due to the training conditions, it is very difficult to perform virtual laboratory work. Combining query-based learning with virtual laboratory activities can be an alternative to developing a simpler, but meaningful learning process within the framework of training. This study is aimed at analyzing virtual laboratory activities through training based on the request for scientific literacy on the topics of light phenomena and optics.

The study used mixed methods with a consistent design in the form of a non-equivalent design of the control group. Samples were taken using the target sampling method. The data was collected through observations, surveys and tests, as well as interviews. The data were then analyzed using an independent sampling criterion and a homogeneity test to see the effectiveness of the training of the two sample groups. The results show that the practical effectiveness of training using a virtual laboratory was very successful and received good reviews. The effectiveness of the virtual laboratory can be assessed by the level. Thus, virtual laboratories can be used as teaching aids that can make a positive contribution to improving student academic performance.

Keywords: Optics, 3D experiment, 3D modeling, quantitative and qualitative method, virtual laboratory

Кіріспе бөлім

Ғылым мен техника адамдарды дамыған өркениеттерге әкелді. Ғылым мен технологияны меңгеру - ұлттың үдеуі мен өсуінің көрсеткіші [1]. Ғылым табиғатты жүйелі түрде зерттеу әдістерімен байланысты, сондықтан Ғылым фактілер, тұжырымдамалар немесе принциптер түріндегі білім жиынтығын игеру ғана емес, сонымен қатар ашылу процесі [2]. Оқушылар арасында жаратылыстану ғылымдарын зерттеу тек өнімдермен ғана емес, сонымен қатар процестің аспектілерімен, көзқарасымен және технологиясымен де байланысты болуы керек, осылайша оқушылар жалпы ғылымды шынымен түсіне алады. Технология - бұл адамдарға табиғи ресурстардың сыйымдылығын ескере отырып, қажеттіліктерді қанағаттандыруға көмектесетін құрал, ал ғылым табиғи құбылыстарды түсіндіру үшін қажет [3]. Ғылым мен техниканың дамуы оқыту процесінде технология нәтижелерін жаңарту және пайдалану бойынша күш-жігерді ынталандырады [4]. 21 ғасырдағы білім алдыңғы ғасырдағыдай негізгі пәндерге назар аударып қана қоймай, сонымен қатар өмірлік дағдыларға, оқу мен ойлау дағдыларына, ақпараттық-коммуникациялық технологиялар сауаттылығына (акт сауаттылығы) баса назар аударатыны айтылған. Жаратылыстану ғылымдарын зерттеу бірнеше елдерде әлі де проблема болып табылады. Білім және мәдениет министрлігі (2015) TIMSS (Халықаралық математика және жаратылыстану ғылымдарын зерттеу тенденциялары) және PISA (Халықаралық оқушыларды бағалау бағдарламасы) сауалнамаларының нәтижелеріне сүйене отырып, 2011 жылы 42 ел қатысқан 8-сыныпқа арналған TIMSS 20-дан астам қатысушы елдердің ғылым саласында әлі де төмен стандартты болды және TIMSS мәні 500-ге тең. Сонымен қатар, 2012 жылғы PISA нәтижелері бойынша, одан кейін 65 ел қатысып соның 40 елі әлі де 500 стандартты PISA мәнінен төмен болды. Қазақстандық ғылым оқушылары үшін PISA бағалауының нәтижелері біздерді алаңдатады. ЭЫДҰ (Экономикалық ынтымақтастық және даму ұйымы) мәліметтері бойынша ғылыми рейтингтер есебі 2018 жылғы PISA нәтижелері Қазақстандық оқушылардың жаратылыстану ғылымдары бойынша орташа баллы 423 болғанын көрсетеді, бұл Қазақстанды PISA-ға қатысушы 65 елдің 53-інші ең төменгі орынға қояды [5]. Осы мәліметтерге сүйене отырып, Қазақстандық оқушылардың жаратылыстану ғылымдары бойынша дағдылары өте төмен болып, басқа елдермен салыстырғанда 53-інші орынға ие болғанын көреміз. Қазақстандағы жаратылыстану ғылымдарын зерттеудің төмен сапасы оқыту әлі де оқытушыға бағытталған оқу процесінің тиімсіздігімен байланысты. Оқушылар өздерінің ойлау қабілеттерін дамытуға дағдыланбаған [6]. Сонымен қатар көптеген мұғалімдер дәріс оқу әдісін қолданады дейді, өйткені олар ғылымды оқушыларға берілетін білім жиынтығы деп санайды [7].

Виртуальды зертханалар - бұл нақты зертханалық ортаға еліктей алатын және оқушылар эксперименттер жүргізу арқылы теориялық білімдерін практикалық білімге айналдыратын оқу ортасы ретінде анықталатын зертханалар [8].

Бірнеше ресейлік авторлардың зерттеулеріне сәйкес,компьютер көмегімен модельдеу өзінің кәсіби және білім беру қызметі туралы зерттеу жүргізді: теория және практика [9]. Оқытуда компьютерлік модельдеуді қолдану аспектілері келесі С. А. Бешенков, Е. А. Ракитина жұмыстарында көрінеді. [10]. Дәрісті компьютерлік қолдаумен бірлескен білім беру қызметі ретінде интерактивті түрде көрсету тәсілін американдық зерттеушілер өз жұмыстарында қарастырды [11]. Ал бірнеше малайзиялық зерттеушілер электромагнетизмнің әсерін зерттеу үшін виртуалды шындықты пайдаланды: ағындық тәжірибе мен оқушыларды оқытудың әсері туралы зерттеді [12]. Шығыс авторларына келетін болсақ, олар өз жұмыстарында модельдеуге негізделген дене шынықтыруды қолдаудың әсерін қарастырды [13]. Басқа елдердің көптеген ғалымдары осы салада зерттеулер жүргізді. Олардың ішінде Абдурахманова З. К Білім беру жүйесінде компьютерлік модельдеудің маңыздылығын ашты [14].

Жаңа заманауи технологияларды физикада қолданып оқыту нәтижелерін келесідей ғалымдар зерттеген: Л. И. Анциферов, А. А. Богуславский, Д. В. Баяндин, Э. В. Бурсиан, Ю. А. Воронин, Ю. А. Гороховатский, В. А. Извозчиков, А. С. Кондратьев, В. В. Лаптев, А. И. Назарова, В. В. Лаптева, Р. В. Майер, Ю. С. Песоцкий, О. В. Поваляева, И. В. Роберт, А. Б. Смирнова, С. К. Стафеева, С. Б. Степанова, Г. Н. Степанова, А. И. Фишман А. С. Чирцова, П. М. Чудинский және басқалар., Оптика эксперименттерін зерделеу кезінде заманауи технологияларды қолданатын әдістеме мәселесі әлі де зерттелуде. Тиісінше, пәндер мен оқу пәндері бойынша оқытушылардың білімін арттыру мақсатында ақпараттандыру саласында шетелдік және отандық ғалымдардың зерттеу жұмыстары жүргізіліп, оның бағыты анықталды:

- Оқу кезінде компьютерді пайдалану тәртібі мен егжей-тегжейлері [15];
- Болашақ мұғалімдерді дайындауда метрология саласындағы зертханалық практиканың маңыздылығы [16];
- Физикалық эксперименттердің виртуалды машиналарын модельдеу [17];
- Физика сабақтарында классикалық эксперименттерді статикалық компьютерлік модельдеу [18]. Жоғарыда аталған әрекеттер біздің жұмысымызға сәйкес орындалды.

Физикадағы жаңа заманауи технологияларды қолдана отырып, оқыту нәтижелерін ғалымдар келесідей зерттеді: оқу орнындағы оптикалық эксперименттерді зерттеу кезінде заманауи технологияларды қолдана отырып, әдістеме мәселесі әрдайым зерттеледі.

Жергілікті фактілер көрсеткендей, мемлекеттік және жеке мектептердегі 15 сынып болса, сол мекемелердің мұғалімдерінің 50% - ғылыми зертханаларда болған, ал мұғалімдердің тек 20% - ы оптика материалдары үшін жаратылыстану ғылымдарын зерттеу кезінде зертханаларды пайдаланған. Бұл оптикалық материалдарға арналған шектеулі зертханалық жабдыққа байланысты. Алдын ала зерттеу нәтижелері бойынша мектептердің 70% Оптика бойынша материалдарды зерттеуге арналған зертханалық жабдықтар жоқ. Абстрактілі ғылыми тұжырымдамалар зертханаларда практикалық сабақтар өткізуді талап етеді, мұнда оқытушы оқушыларға оқу жұмыстарына көмектесуге жауапты, оқушыларға жаттығулар жасауға және сыныптарда теориялармен жұмыс істеуге бағыттайды, сонымен қатар оқушыларды зертханаларда эксперименттер жүргізуге бағыттайды. Осылайша, зертханалық жабдықтың шектеулерімен күресу үшін виртуалды зертханалар арқылы жаратылыстану ғылымдарын зерттеуге арналған практикалық сабақтар өткізілді. Кейбір зерттеу нәтижелері виртуалды зертханаларды бірнеше оқу процестерінде және білім берудің бірнеше деңгейлерінде қолдануды талқылайды. Осы зерттеулердің жалпы нәтижелері виртуалды зертханаларды пайдалану арқылы оқыту оқушылардың қабілеттеріне айтарлықтай әсер ететінін және сайып келгенде оқу сапасын жақсартатынын көрсетеді. Сондықтан виртуальды зертханада жаратылыстану ғылымдарын оқытудың оқушылардың оқу нәтижелерін жақсартуға әсерін анықтау үшін тереңірек талдау қажет.

Виртуальды зертхана оқушылардың ақпараттық құзыреттіліктерін дамытады. Атап айтқанда,

- Ақпаратты іздеу функциясын;
- Алынған қажетті және қажетсіз ақпаратты іріктеу және саралау мүмкіндігін;
- Қажетті ақпаратты көрсете және ұйымдастыра білуін;

- Ақпаратты өңдеу қабілетін;
- Ақпараттан дәлелдер таба білу және қорытынды жасай алуын;

Яғни, мұндай әрекетті қалыптастыра отырып, оқушы оны қоршаған құбылыстар мен жағдайлардан не қажет екенін таңдай отырып, оны өмірде қолдануға үйренеді.

Оқушылардың коммуникативтік дағдылары:

- Білім беру мәселелерін шешу үшін тиісті коммуникация әдістерін меңгеру;
- Өз әрекеттерін өзін-өзі бағалаумен үйлестіру және қосымша функциялар;
- Жұмыс нәтижелерін көрсету және жариялау мүмкіндігі;
- Өзіңіздің ойыңызды ұтымды білдіру және өз ойларыңыздың дұрыстығын негіздеу қабілеті;

Нәтижесінде, осының арқасында оқушы әртүрлі жағдайларда өз пікірін дұрыс негіздеуге, өз ойын еркін білдіруге,өзінің және басқалардың іс-әрекеттерін бағалауға, өзін-өзі дамытуға үйренеді.

Проблемалардың шешімдерін іздеу және оқушылардың өзіндік басқару құзыреттерін қалыптастыру:

- Мәселелерді анықтау және мінез-құлық мақсаттарын қою;
- Қабылданған шешімді іске асыру үшін қажетті шарттарды айқындау;
- Іс-қимыл кезеңдерін жоспарлау мүмкіндігі;
- Қойылған мақсаттар мен міндеттерге сәйкес іс-шараларды ұйымдастыру;
- Өз әрекеттерін бақылау мүмкіндігі;

Осы дағдылармен оқушы өмірде де жоспарланған әрекеттерді үйрене алады, проблемалар туындаған кезде тез және дұрыс шешім қабылдай алады, тығырықтан шығудың жолын таба алады, өзін-өзі басқара алады.

Зерттеудің мақсаты Жоғарыда айтылғандарға сүйене отырып, бұл оқушылардың оқу нәтижелерін жақсарту үшін виртуалды зертхананы қолдану болып табылады.

Әдістемелік бөлім

Ғылыми зерттеу әдісінің негізгі бірі сауалнама әдісі болып табылады. Бұл зерттеу үшін сауалнама әдісі қолданылды және бұл зерттеуде виртуалды зертхананың дамуы 3 (үш) кезеңге бөлінді, атап айтқанда: (1) алдын ала зерттеу жүргізу, (2) виртуалды зертхананы жобалау және (3) виртуальды зертхананың тиімділігін тексеру. Зерттеу әдісі ретінде эквивалентті емес бақылау тобы түріндегі эксперименттік дәйекті дизайнмен аралас әдіс қолданылды. Зерттеу 2022 жылда Түркістан қаласындағы Ж.Тәшенов атындағы №23 жалпы орта IT- мектеп лицейінде жүргізілді. Алдын ала зерттеу теориялық негіз ретінде пайдаланылатын деректерді алу және әзірленген өнімнің дәлелдерін күшейту үшін әдебиеттерге шолу жасалды және виртуалды зертхананың қажеттіліктерін талдау сауалнамаларын тарату арқылы жеке-даралық зерттеу жүргізілді. Даму кезеңінде, сараптамалық бекітілу және шектеулі тестілеу кірді. Бұл оқу құралының тиімді қолданылуына әкеп соқты. Енгізу кезеңінде бақылау тобы арасында ауқымды тестілеу өткізілді. Оқу барысында бақылау тобына мектеп ұсынған оқулық берілді. Сонымен қатар, эксперименттік топ оқу процесінде виртуальды зертхананы пайдаланды. Содан кейін екі топқа бірдей тест/сұрақтар берілді. Бұл зерттеудегі мәліметтер сандық және сапалық болды. Сандық мәліметтер алдын ала тестілеу нәтижелері негізінде және одан кейін алынды. Болашақ мамандардың жауаптары түріндегі сапалы мәліметтер виртуалды зертхананы қолдана отырып, сауалнамалар мен оқу сұхбаттарынан алынды. Болашақ мамандардың оқу нәтижелері келесі X формуласын қолдана отырып, қалыпқа келтірілген өсім немесе N-өсім негізінде бағаланды

Жазбалар:

g = орташа N-пайда,

Spos = тестілеуден кейінгі орташа балл,

Spree = тестілеу алдындағы орташа балл,

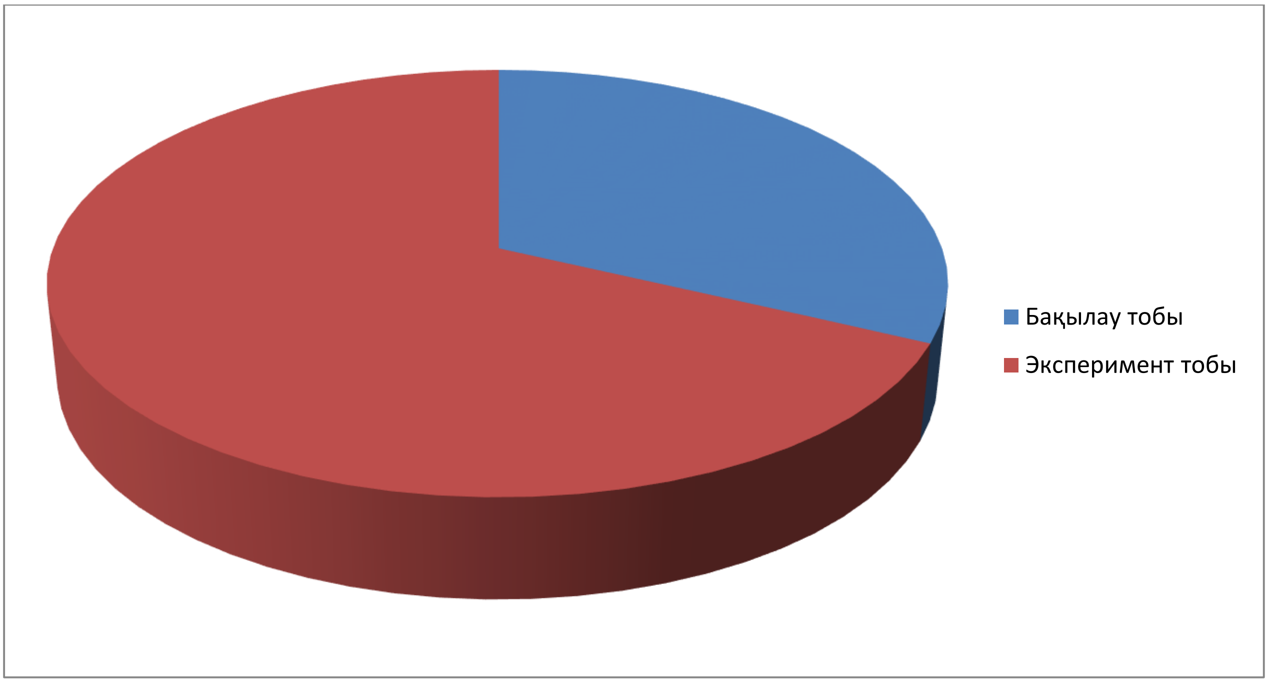
Smax = максималды балл

N-күшейту критерийлері:

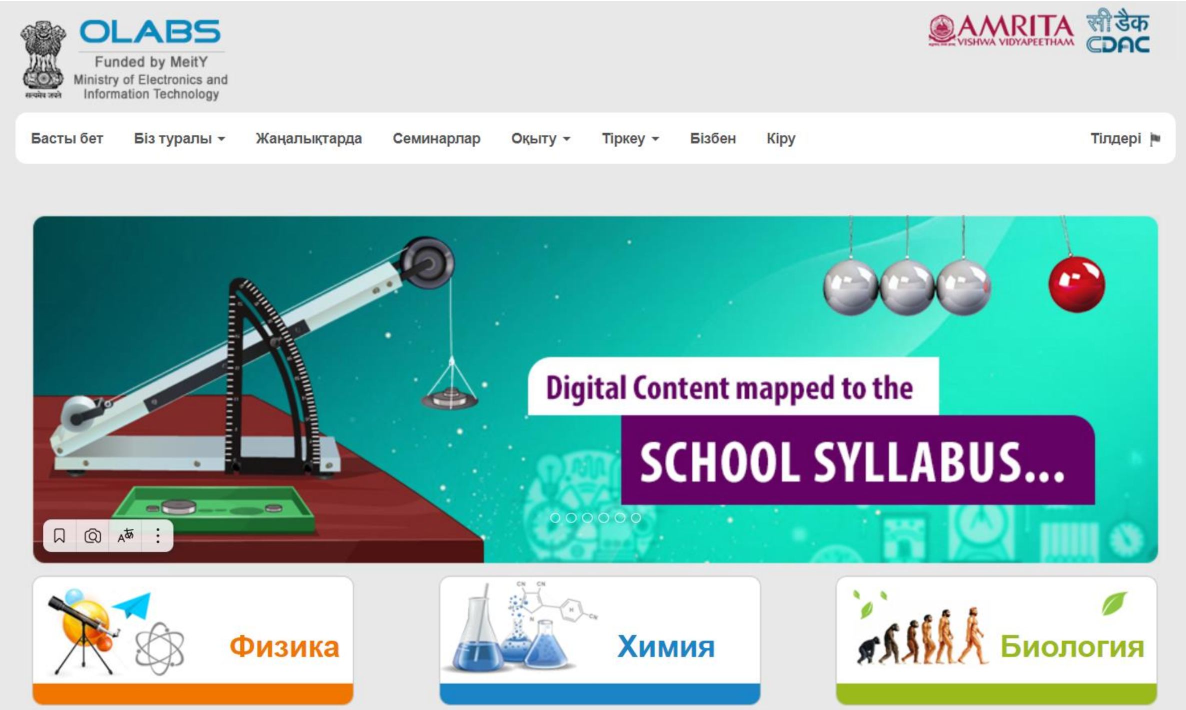
$$g = (S_{pos} - S_{pre})/(S_{\max} - S_{pre})$$

Нәтижелер, талдау және талқылау

Болашақ мамандардың оқу нәтижелері туралы мәліметтер тесттер арқылы жиналды. Болашақ мамандардың жауаптары түріндегі сапалы деректер сауалнамалар арқылы алынды және виртуальды зертхананы пайдалана отырып, оқытуды басқарудағы жетістіктерді оқу процесінен кейінгі бақылау парақтары мен оқушылармен сұхбат арқылы бағалауға болады. Сандық мәліметтер тестілеуге дейінгі және кейінгі бағалау ретінде ұсынылды, ал эксперименттік және бақылау топтарындағы мәндері критерийлер арқылы талданды. Сапалы мәліметтер сипаттамалық түрде талданды.



Сурет 1. Сауалнама нәтижесі



Сурет 2. Виртуальды зертхананың мұқаба беті және неізгі мәзірі

Виртуальды зертхананың жарамдылығы 3 сарапшының бағалауы негізінде бағаланды (1-кесте).

Кесте 1. Виртуальды зертханада сараптамалық нәтижелері

	Бағаланған аспектілер	Пайыз (%)	Санаттар
1	Мазмұнның жарамдылығы	85.7 %	Өте жарамды
2	Құрылымы	86.7 %	Өте жарамды

Виртуальды зертхананың мазмұнын жақсарту бойынша сарапшылардың ұсыныстары оқушылардың мазмұнын оңай түсінуі үшін виртуалды зертханалық нұсқаулыққа нұсқаулар мен нақты модельдеулерді қосу болып табылды. Зертханалық эксперименттерді білдіретін модельдеу мүмкіндігінше шынайы болуы керек, ал зертханалық эксперименттердің маңызды функцияларын орындауды қамтамасыз ететін компьютерлік модельдеу компьютерде орындалуы керек. Бұл виртуальды зертхана модельдеу түрінде басқаруға болатын эксперименттік құрылғылар жиынтығы деген Храмның пікіріне сәйкес келеді [19]. Жүргізген зерттеу нәтижелері виртуалды зертханаларда табылған модельдеу оқушылардың пәнге деген ынтасын арттыруға оң үлес қосатыны анық. Шектеулі тестілеуге, мұғалімнің мазмұнның жарамдылығын бағалауына сүйене отырып, виртуалды зертхана мен дизайн мазмұнының жарамдылығы өте жоғары санатқа жататынын көруге болады. Осылайша, виртуальды зертхана оқыту процесінде қолдануға жарамды деп айтуға болады.

Деректерді талдау нәтижелері виртуальды зертхана оқушылардың Оптика бойынша оқу нәтижелеріне әсер ететінін көрсетеді.

Виртуальды зертхананы қолдана отырып оқу кезінде болашақ мамандар ынталы, оқуда белсенді және өзіне сенімді болып көрінеді. Жалпы, виртуальды зертхана туралы оқушылардың пікірлері өте жоғары (2-кесте). Сауалнама нәтижелері оқушылардың барлығы дерлік виртуальды зертхананы пайдалану арқылы оқу процесіне толықтай бет бұратындығын көрсетеді. Оқушылардың сұхбат нәтижелері мен жауаптарының көпшілігі виртуальды зертхананы пайдаланып оқығанда бақытты сезінетінін және тақырыптар бойынша материалдарды зерттеуге ынталы екенін көрсетеді. Олар сондай-ақ виртуальды зертхана мотивация мен өзіне деген сенімділікті арттыра алады деп санайды. Уақытты басқару мәселесінен басқа, оқытылатын тұжырымдамалардың саны виртуалды зертхананы қолдану арқылы оқыту процесіне әсер ететін факторға айналады.

Қорытынды

Осы зерттеуге сүйене отырып, негізделген оқыту арқылы виртуальды зертханалық әрекетті, әсіресе жаратылыстану ғылымында оқытуда мазмұнды оқу әрекетін жүргізуге балама ретінде қарастырамыз. Виртуальды зертхана - бұл қолданушыларға эксперименттер жүргізуге толықтай мүмкіндік беретін бағдарламалық жасақтама ретінде жүзеге асырылатын оқыту нысаны болып табылды. Осылайша, виртуальды зертханалар оқушылардың оқу нәтижелерін арттыруға оң үлес қоса алатын оқу құралы ретінде пайдаланылады.

Физикадағы 3D эксперименттерін ұйымдастырудың ерекшеліктері эксперименттерді сәтті орындау және талдау үшін маңызды болып табылатын әртүрлі аспектілерді қамтиды. Негізгі ойларға эксперимент жасау, бақылау-өлшеу құралдары, мәліметтер жинау, талдау әдістері және зерттеу топтарындағы ынтымақтастық кіреді. Үш өлшемді кеңістікті пайдалану немесе үш өлшемді өлшеу әдістері сияқты 3D элементтерін қосу арқылы бұл эксперименттер физикалық құбылыстарды толық түсінуге мүмкіндік береді. 3D эксперименттерін ұйымдастыру мұқият жоспарлауды, жабдықты дәл калибрлеуді, үш өлшемді деректерге бейімделген деректерді өңдеу әдістерін және қауіпсіздік хаттамаларын сақтауды талап етеді. Зерттеушілер физикада үш өлшемді эксперименттерді ұйымдастырудың ерекшеліктері туралы құнды ақпаратты ғылыми журналдардан, кітаптардан, конференция материалдарынан, онлайн дереккорлардан таба алады, сонымен қатар эксперименттік физика саласында мамандандырылған танымал ғылыми-зерттеу институттары мен университеттерінің жұмысымен таныса алады. Алынған ақпараттың дәлдігі мен дұрыстығын қамтамасыз ету үшін қолда бар әдебиеттерді сыни тұрғыдан бағалау және өзекті, сенімді және сараптамадан өткен дереккөздерді іздеу маңызды. Жалпы, физикада 3D эксперименттерін ұйымдастырудың ерекшеліктерін түсіну және енгізу ғылыми білімнің дамуына және инновациялық технологиялардың дамуына ықпал етеді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Dharma, Agus. 2012. Peran Sains dan Teknologi Dalam Percepatan Pembangunan, Jurnal. Available at staffsite.gunadarma.ac.id/agus_dh/.Accessed on January 12, 2016.
2. Takari, Enjah R. 2010. Model Kooperatif Ilmu Pengetahuan Alam. Penerbit GENESINDO. Bandung
3. Wisudawati, A.W., & Sulistiyowati, E. 2014. Metodologi Pembelajaran IPA. BumiAksara. Yogyakarta
4. Arsyad, Azhar, M.A. 2014. Media Pembelajaran. PT Raja Grafindo Persada. Jakarta
5. https://www.google.com/amp/s/www.azattyq. org/amp/kazakhstan-at-the-pisa-ranking/30305694.html
6. Takari, Enjah R. 2010. Model Kooperatif Ilmu Pengetahuan Alam. Penerbit GENESINDO. Bandung
7. Liliasari dan Tanwil, Muh.2013. Berpikir Kompleks dan Implementasinya dalam Pembelajaran IPA. Badan Penerbit Universitas Negeri Makassar. Makassar
8. Tatli, Zeynep & Ayas, Alipasa., 2013. Journal. Effect of Virtal Chemistry Laboratory on Students' Achievement. Educational Technology & Society. 16 (1). 159-150. Accessed on August 10, 2015.
9 Andaloro G., Bellomonte L. and Sperandeo-Mineo R. M. Computer learning environment in the field of Newtonian mechanics. – London: Publishing House of the International Journal of Scientific Education. - 1997. – 19. 660-682 p.

10 Бешенков С. А., Ракитина Е., Миндзаева Е. – Россия: Издательство "КиберЛенинка". Информационное образование в России. Знания. Понимание. Способность. – 2013. № 3. С. 42-51
11 . Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина. Современные педагогические и информационные технологии в системе образования. – Москва: Издательский центр "Академия". – 2010. – 17с.
12 . Wang J., Zhou M., Donghui G. Investigation of the influence of model-based research pedagogy on students' research skills in a virtual physical laboratory. – Netherlands: Elsevier Science Publishers BV. Computers in human behavior. – 2015. – 49. 657 – 670s.
13 . Jingying V., Yaozhong L., Ming J., Jingbing Ch. Exploring the Impact of cloud pedagogy on creative talents: A case study of a Chinese high school. – Netherlands: Elsevier Science Publishers BV. Computers in human behavior. – 2016. – 63. 228-240с.
14 . Дьячук П., Лариков В. Применение компьютерных технологий обучения в средней школе. - Красноярск: Изд-во КГПУ. – 1996.
15 . Becker H.J. How are teachers using computers ininstruction. Paper presented at the Annual Meeting of theAmerican Educational Research Association, Seattle, WA. -2001. - 45 p.
16 Молдабекова М.С. К методике изучения некоторых вопросов тепломассообмена с применением информационных технологий // Сб.трудов «Актуальные проблемы современной физики»: Материалы Междун. науч. конф., посвящ. 80-летию профессора Исатаева С. И. - Алматы: Қазақ университеті, - 2012. - С.47 -50.
17 . Жумадиллаев К.Н. Физикалық тәжірибелерді виртуальды компьютерлік модельдеу. - Алматы, 2002. - 65 б.
18 . Красиков С.А. Компьютерное моделирование на уроках физики. – Алматы, 2001. – 194 с.
19. Gunawan. 2011. Pengembangan Model Virtual Laboratory Fisika Modern untuk Meningkatkan Keterampilan Generik Sains dan Disposisi Berfikir Kritis Calon Guru. Jakarta. UPI. Journal. http://journal.um.ac.id/index.php/pendidikan -dan-pembelajaran/article/view/3867.
Accessed on October 15, 2018

REFERENCES

1. Dharma, Agus. 2012. Peran Sains dan Teknologi Dalam Percepatan Pembangunan, Jurnal. Available at staffsite.gunadarma.ac.id/agus_dh/.Accessed on January 12, 2016.
2. Takari, Enjah R. 2010. Model Kooperatif Ilmu Pengetahuan Alam. Penerbit GENESINDO. Bandung
3 Wisudawati, A.W., & Sulistiyowati, E. 2014. Metodologi Pembelajaran IPA. BumiAksara. Yogyakarta
4. Arsyad, Azhar, M.A. 2014. Media Pembelajaran. PT Raja Grafindo Persada. Jakarta
5. https://www.google.com/amp/s/www.azattyq. org/amp/kazakhstan-at-the-pisa-ranking/30305694.html
6. Takari, Enjah R. 2010. Model Kooperatif Ilmu Pengetahuan Alam. Penerbit GENESINDO. Bandung
7. Liliasari dan Tanwil, Muh.2013. Berpikir Kompleks dan Implementasinya dalam Pembelajaran IPA. Badan Penerbit Universitas Negeri Makassar. Makassar
8. Tatli, Zeynep & Ayas, Alipasa., 2013. Journal. Effect of Virtal Chemistry Laboratory on Students' Achievement. Educational Technology & Society. 16 (1). 159-150. Accessed on August 10, 2015.
9. Andaloro G., Bellomonte L. and Sperandeo-Mineo R. M. Computer learning environment

in the field of Newtonian mechanics. – London: Publishing House of the International Journal of Scientific Education. - 1997. – 19. 660-682 p.

10. Beshenkov S.A., Rakıtına E., Mındzaeva E. – Rossia:Izdatelstvo "Kıberlenınka". Invormasionnoe obrozavanie v Rossii. Znania.Ponimania.Sposobnost. – 2013. № 3. 42-51 s
11. E.S. Polat, M. Iu. Buharkına. Sovremennie pedagogicheskie I informosionnie tehnologii v sisteme obrozobania. - Moskva: Izdatelskii sentr "Akademıa". – 2010. – 17s.
12. Wang J., Zhou M., Donghui G. Investigation of the influence of model-based research pedagogy on students' research skills in a virtual physical laboratory. – Netherlands: Elsevier Science Publishers BV. Computers in human behavior. – 2015. – 49. 657 – 670s.
13. Jingying V., Yaozhong L., Ming J., Jingbing Ch. Exploring the Impact of cloud pedagogy on creative talents: A case study of a Chinese high school. – Netherlands: Elsevier Science Publishers BV. Computers in human behavior. – 2016. – 63. 228-240c.
14. Dachuk P., Larıkov V. V premenenie komputernih tehnologi obucheni v srednoi shkole. - Krasnoıarsk: Izdatelstvo KGPU. – 1996.
15. Becker H.J. How are teachers using computers ininstruction. Paper presented at the Annual Meeting of theAmerican Educational Research Association, Seattle, WA. -2001. -45 p.
16. Moldabekova M.S. K metodike izuchenia nekotoryh voprosov teplomassoobmena s premeneniem informosionnyh tehnologii//Sb.trudov "Aktualnie problemi sovremmennoi fiziki": Mettepıalli Mejdun. Nauch. konf., posviach. 80-letniu Professora S. I. Isataeva - Almaty: Kazak unıversıteti, - 2012. - s. 47 -50.
17. Jumadıllaev K. N. Fızıkalyk tajiribilerdı vırtualdy komputerlık modeldeu. - Almaty, 2002. - 65 b.
18. Krasıkov S. A. Komputernoe vodelirovanie na urokah fiziki. - Almaty, 2001. – 194 s.
19. Gunawan. 2011. Pengembangan Model Virtual Laboratory Fisika Modern untuk Meningkatkan Keterampilan Generik Sains dan Disposisi Berfikir Kritis Calon Guru. Jakarta. UPI. Journal. http://journal.um.ac.id/index.php/pendidikan -dan-pembelajaran/article/view/3867. Accessed on October 15, 2018

ИНФОРМАТИКА

UDK 004.386;
IIRST 20.23.25
https://doi.org/10.47526/2023-3/2524-0080.06

J.S. ISMAGULOVA[1], G.N. KAZBEKOVA[2], S. ÖZER[3]
[1]*Hoca Ahmet Yesevi Türk-Kazak Üniversitesi Yüksek Lisans Öğrencisi (Kazakistan, Türkistan), e-mail: selim.ozer@ayu.edu.kz*
[2]*PhD, Hoca Ahmet Yesevi Türk-Kazak Üniversitesi (Kazakistan, Türkistan), e-mail: zhuldyz.ismagulova@ayu.edu.kz*
[3]*PhD Hoca Ahmet Yesevi Türk-Kazak Üniversitesi (Kazakistan, Türkistan), e-mail: gulnur.kazbekova@ayu.edu.kz*

ASP.NET MVC MİMARİSİYLE ÖĞRENCİ İŞLERİ BİRİMİ WEB UYGULAMASI GELİŞTİRME

Özet. Günümüzde internet teknolojisinde yaşanan gelişmeler birçok alanda kurumları yenileşmeye itmiştir. Bunlardan biri de eğitim kurumlarıdır. Özellikle üniversitelerin öğrenci işleri daire başkanlığı birimleri için, gelişen teknolojiyle birlikte, etkili bir web uygulamasına sahip olmak önemli hale gelmiştir. Gelişime önem veren tüm üniversiteler hem üniversitenin tanıtımını yapacak hem de ilgili öğrenci işlerinin gerçekleştirilebileceği, tasarım ve yazılım açısından güçlü ve etkileşimli bir öğrenci işleri web uygulamasına sahip olmalıdır. Web uygulamaları ile öğrenci işlerindeki hata oranının ciddi oranda azaldığı, öğrencilere erişim ve hizmet bakımından birim performansının da ciddi oranda arttığı saptanmıştır.

Bu çalışmada Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı web uygulaması ASP.Net MVC temeliyle geliştirilmiştir. ASP(Active Server Page – Aktif Sunucu Sayfası).Net MVC(Model View Controller – Model Görünüm Kontrol) teknolojisi web uygulamalarının daha güvenli olmasına, daha rahat tasarlanmasına ve kodlanmasına olanak sağlar. Model, görünüm ve kontrol sistemi, ön taraf (Frontend) ve arka taraf (Backend) yapılarının düzenlenmesi sürecinde kolaylık sağlamıştır. Veri tabanı olarak Microsoft SQL kullanılmış ve veri tabanı yöntemi olarak Code First yaklaşımı tercih edilmiştir. Veri tabanı ile iletişimler için arka taraf yapısında Dil ile Bütünleşik Sorgu (Language Integrated Query) bileşeni kullanılmıştır.

Anahtar kelimeler: Öğrenci işleri, Web otomasyonu, ASP.Net, MVC, Entity çerçevesi, Identity çerçevesi, Visual Studio.

Ж.С. Исмагулова[1], Г.Н. Казбекова[2], С. Өзер[3]
[1]*Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің магистранты (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: selim.ozer@ayu.edu.kz*
[2]*техника ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: zhuldyz.ismagulova@ayu.edu.kz*
[3]*техника ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: gulnur.kazbekova@ayu.edu.kz*

ASP.NET MVC АРХИТЕКТУРАНЫ ҚОЛДАНА ОТЫРЫП "СТУДЕНТТІК БӨЛІМ" ВЕБ-ҚОСЫМШАНЫ ӘЗІРЛЕУ

Аңдатпа. Бүгінгі таңда Интернет-технологияның қарыштап дамуы көптеген ұйымдарды әр түрлі сала өзгерістерге жол ашты. Осындай бағыттардың бірі білім беру мекемелері. Әсіресе жоғарғы оқу орындарында білім алушыларға арналған «Студенттік бөлім» интерактивті веб-қосымшасы болуы өте маңызды. Бұл мақалада қарастырылып отырған

«Студенттік бөлім» веб-қосымшасының негізгі мақсаты білім алушылар контингентінің статистикалық есебі мен мониторингі, оның қозғалысын бақылау, жеке істерін жүргізу және білім алушылар бойынша ақпаратты уақтылы ұсыну болып табылады. Веб-қосымша құжаттарды дайындауда қателіктерге жол бермеуге, сонымен қатар білім алушыларға қол жетімділікті қамтамасыз етуге және бөлімнің қызмет көрсету сапасын арттыруға үлкен септігін тигізеді.

Бұл жұмыста студенттік істердің веб-бөлімінің қосымшасы келесі негізде жасалды ASP.Net MVC. ASP технологиясы (Active Server page - белсенді Сервер беті). NET MVC (Model-View-Controller) веб-қосымшаларды жобалауға және бағдарламалауға қауіпсіз, ыңғайлы етеді. Модель, презентация және бақылау жүйесі Front-end және back-end құрылымын ұйымдастыруда ыңғайлылықты қамтамасыз етеді. Microsoft SQL дерекқор ретінде пайдаланылды және Code First әдісі дерекқор әдісі ретінде таңдалды. Back-end құрылымы мәліметтер базасымен өзара әрекеттесу үшін Language Integrated Query компоненті қолданылды.

Кілт сөздер: веб-қосымша, ASP.Net, MVC, Entity Framework, Identity Framework, Visual Studio.

Ж.С. Исмагулова[1], Г.Н. Казбекова[2], С. Озер[3]

[1]магистрант, Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан), e-mail: selim.ozer@ayu.edu.kz

[2]кандидат технических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан), e-mail: zhuldyz.ismagulova@ayu.edu.kz

[3]кандидат технических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан), e-mail: gulnur.kazbekova@ayu.edu.kz

Разработка веб-приложения для студентческого отдела с использованием архитектуры ASP.NET MVC.

Аннотация. Сегодня стремительное развитие Интернет-технологий открыло многим организациям путь к переменам в различных сферах. Одним из таких направлений являются образовательные учреждения. Особенно важно, чтобы в вузах было интерактивное веб-приложение «Студенческий отдел» для обучающихся. Основной целью веб-приложения «Студенческий отдел», рассматриваемого в данной статье, является статистический учет и мониторинг контингента обучающихся, контроль его движения, ведение личных дел и своевременное представление информации по обучающимся. Веб-приложение будет способствовать недопущению ошибок при подготовке документов, а также обеспечению доступа обучающихся и повышению качества обслуживания отдела. Приложение «Студенческий отдел" было разработано на основе ASP.Net MVC. Технология ASP (Active Server Page - Активная серверная страница) .Net MVC (Model View Controller - Модель-Представление-Контроллер) обеспечивает более безопасную, более удобную для проектирования и программирования веб-приложений. Система модели, представления и контроля обеспечила удобство при организации структуры front-end и back-end. В качестве базы данных использовалась Microsoft SQL, а в качестве метода базы данных выбран подход Code First. В составе структуры back-end использован компонент Language Integrated Query для взаимодействия с базой данных.

Ключевые слова: веб-приложение, ASP.Net, MVC, Entity Framework, Identity Framework, Visual Studio.

J.S. Ismagulova[1], G.N. Kazbekova[2], S. Ozer[3]

[1]Graduate student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University(Kazakhstan, Turkistan), e-mail: selim.ozer@ayu.edu.kz

[2]*Candidate of Technical Sciences, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: zhuldyz.ismagulova@ayu.edu.kz*
[3]*Candidate of Technical Sciences, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: gulnur.kazbekova@ayu.edu.kz*

Developing Web Application For The Student Affairs Department Using The ASP.Net MVC Architecture.

Abstract. The developments in internet technology have led many institutions to renew themselves in various fields, and one of them is educational institutions. Especially for the student affairs departments of universities, having an effective web application has become important with the developing technology. All universities that prioritize development should have a strong and interactive student affairs web application that will not only promote the university but also facilitate the implementation of related student affairs from a design and software perspective. It has been found that the error rate in student affairs significantly decreases with web applications, and the unit performance in terms of access and service to students also significantly increases.

In this study, the Student Affairs Department web application was developed based on ASP.Net MVC (Model View Controller) technology. ASP.Net MVC technology enables web applications to be more secure, easier to design, and code. The model-view-controller system has provided convenience in the organization of both the front-end and back-end structures. Microsoft SQL was used as the database, and the Code First approach was preferred as the database method. The Language Integrated Query component was used in the back-end structure for communication with the database.

Overall, this design allows for easy updates, optimization, and dynamization of the code, as well as removing repetitions from the code.

Key words: Student affairs, web automation, ASP.Net, MVC, Entity Framework, Identity Framework, Visual Studio, multilingual.

Giriş

İnternetin hayatımıza girmesi ve teknolojinin çok hızlı gelişmesi diğer sektörleri etkilediği gibi eğitim sektörünü de etkilemiştir. Web uygulamalarının güvenilir ve hızlı bir şekilde birçok işlemin gerçekleştirilmesine olanak sağlaması, artık her kurumun bir web sitesi sahibi olmasını zorunlu hale getirmiştir. Bu durum üniversitelerde de aynı etkiyi oluşturmuştur. Özellikle öğrencilerin doğrudan ve sürekli temas halinde oldukları Öğrenci İşleri Birimi için web sayfası, öğrencilere hızlı ulaşım ve doğru bilgilendirme açısından çok önemlidir[1].

Öğrenci İşleri Web Uygulamasında öğrencilere her türlü bilgilendirme ve duyuruların tek yerden ulaştırılması, öğrenci kayıtlarının gerçekleştirilmesi, kayıt yenilemeleri, ders seçimleri, not takibi, askerlik işlemleri, sık kullanılan evrakların elektronik olarak erişimi, genel konularda dilekçelerin hazır taslakları, yurt başvuruları, genel istatistik bilgileri gibi daha sayılabilecek birçok hizmet hızlı ve kolay şekilde sunulabilmektedir[2].

Bu tür web uygulamalarının hazırlanmasında kullanılabilen çok çeşitli yazılım dilleri ve teknolojiler bulunmaktadır. Kullanım amacına göre bu diller ve teknolojilerin tercihi değişebilir. Bu çalışmada kolaylık, dinamiklik, esneklik, rahat tasarlama ve kodlama açısından ASP.Net MVC temelini kullanmayı tercih edildi.

ASP.Net Microsoft tarafından geliştirilen bir çerçevedir (Framework). MVC ise ilk olarak 1979 yılında tanıtılmış bir desendir. Yazılımcılara HTML, CSS, JavaScript, LINQ, C# gibi birden fazla teknolojinin bir sayfa içerisinde rahat bir şekilde kullanım kolaylığı ve diğer teknolojilerle entegrasyon kolaylığı sağladığı için yaygın olarak tercih edilir[3].

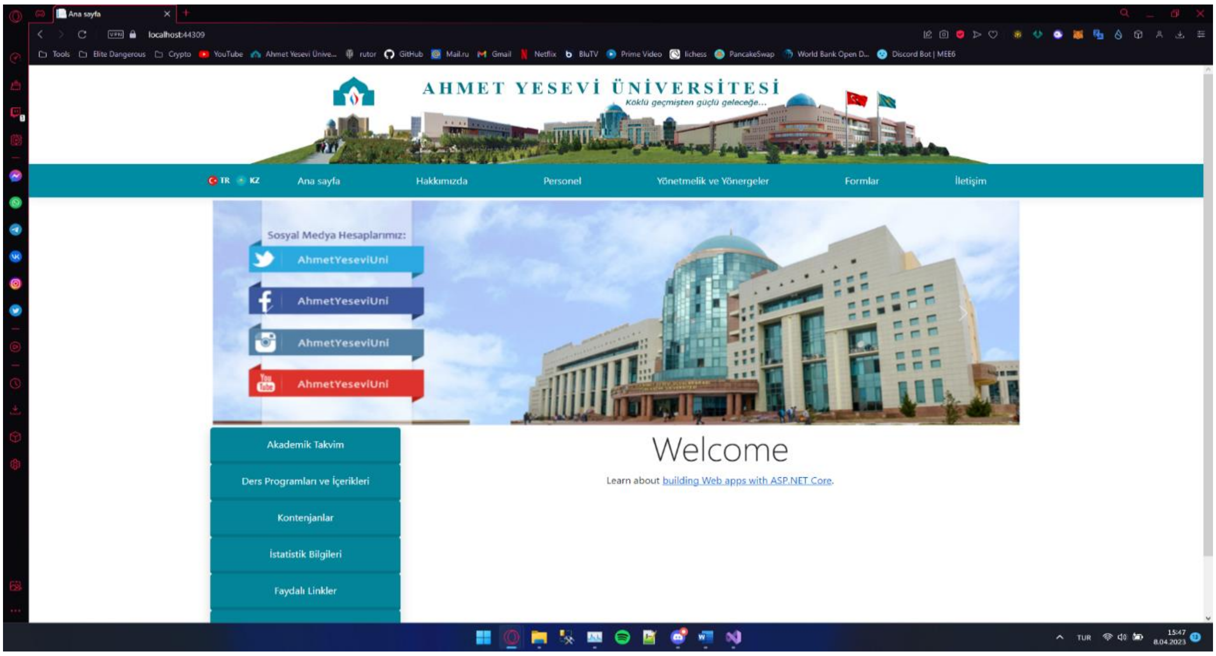
Planlama

Planlama bölümü, yazılım geliştirme sürecinin karmaşıklığı ve tekrarlanma problemleri içermesinden ötürü önemli bir alandır. Bu bölümde, uygulamaya ait daha soyut ve belirsiz fikirler yer alır.

Öncelikle hazırlanacak olan web uygulamasının gereksinimleri belirlenir. Bu noktada Sitede çoklu dil seçeneği olacak mı? Yönetim Paneli oluşturulacak mı? Farklı elektronik cihazlarda görüntülemeye uygun, duyarlı web tasarımı (Responsive) yapılacak mı? Gibi sorulara verilen cevaba göre planlama yapılır. Bu çalışmada çoklu dil desteği, yönetim paneli ve duyarlı web tasarımı yapılacaktır

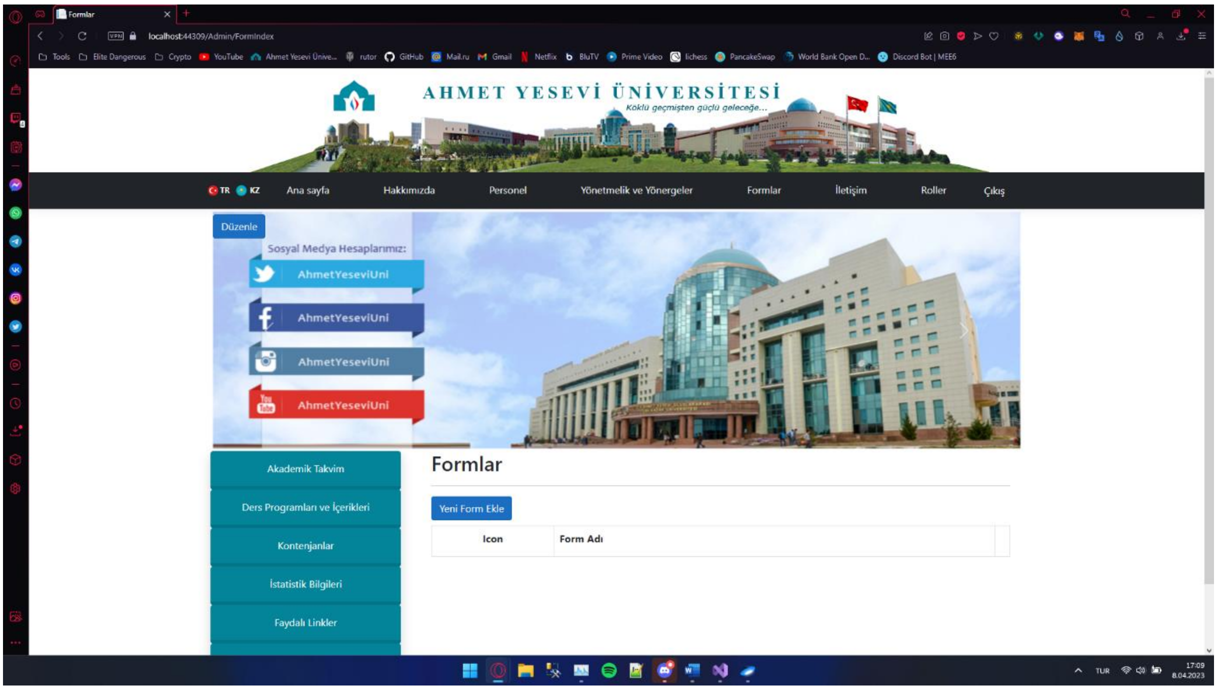
Sayfa Tasarımı ve Görünüm

Sayfa tasarımında önce ana renkler belirlenir. Bu ana renkler genelde kurumun logosundaki renkler baz alınarak belirlenir ve sayfa tasarımının genel hatları bu renkler üzerinden ilerler. İkinci aşama olarak sayfanın katmanları (Layout) belirlenir.



Resim-1 – Web sayfasının ana katmanı

Uygulama içerisinde bütün sayfalarda görünür olmasını istediğimiz kısımlar, ana katman içerisinde tasarlayarak belirtilir. Genel kullanımda, uygulama içi gezintiyi kolaylaştırmak için ana katmanda sadece yönlendirme menüsü (Navbar) tasarlanır ve bütün sayfalarda kullanılabilir olur. Tercihe göre Resim-1'deki gibi yan menüler de (Sidebar) kullanılabilir.



Resim-2 – Yönetim Paneli ana katmanı

Yönetim Paneli modülü kullanılacak olan uygulamalarda Yönetim Paneli için ayrı bir katman oluşturulur. Bu katman da bir ana katman görevi görür ve yöneticiler için oluşturulan sayfalar arası yönlendirmelerde karışıklığı azaltır. Resim-2'de görüldüğü gibi genel olarak kullanıcı tarafındaki tasarımın benzeri olur. Katman benzerliğinden kaynaklanan karışıklıkları önlemek adına ana renklerde değişiklik yapılabilir. Yönetim Panelinin geliştirilmesindeki amaç, uygulamayı yönetecek olan birim veya kişinin herhangi bir yazılım bilgisine sahip olmadan sayfalar üzerinde değişiklik yapabilmesini sağlamaktır. İçeriklerin yanına eklenen butonlar aracılığıyla sayfalarda düzenleme ve değişiklik yapar.

Resim-3 – Katman tanımlama örneği

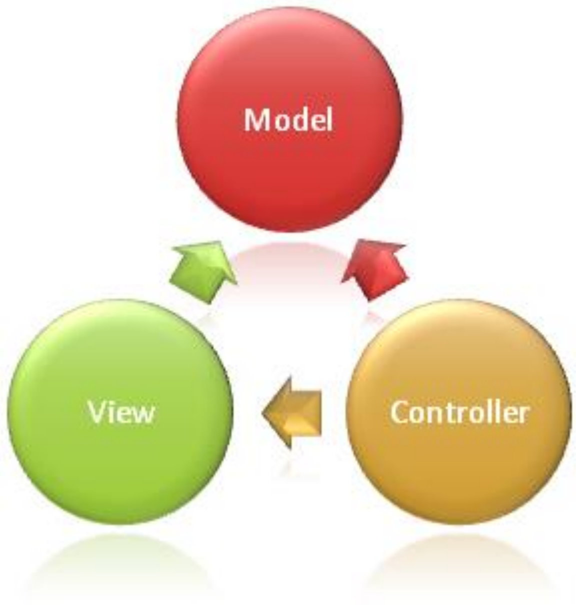
Ana katman olarak hazırlanacak olan sayfa tasarımı için Resim-3'de gösterilen View -> Shared klasörü içerisinde .cshtml uzantılı dosya oluşturulur. Dosya içerisinde HTML, CSS, JavaScript ile tasarım geliştirilir. Hazırlanan bu ana katmanın görünmesini istediğimiz sayfaların, sayfa tasarımı esnasında Resim-3'de gösterildiği üzere "Layout" komutuyla sayfanın hangi katmana bağlı olacağı belirtilir[4].

Model

Bir web sayfasında yer alacak olan içeriklerin belirli bir düzen içerisinde arka taraftan sayfanın görüntüleneceği Görünüm bileşenine taşınması için veya Görünüm bileşeninde yer alan girdilerin işlenmek üzere arka tarafa taşınabilmesi için Model bileşeni kullanılır. Örnek verecek olursak bir bilgi doldurma formu içeren sayfa açılırken, form üzerinde daha önce girilmiş olan girdiler, Model bileşeni ile sayfaya aktarılıp görüntülenir. Bu girdiler üzerinde değişiklik yapıldığında veya yeni girdiler gerçekleştirildiğinde, girdiler sayfa üzerinden Model aracılığıyla arka tarafa taşınarak işlenir. Genel olarak Model, arka taraf ile ön taraf arasında veri alışverişini sağlayan bileşendir[5].

Kontrol

Kontrol bileşeni, uygulamada arka taraf işlemlerinin gerçekleştiği alandır. Bu bileşende Model bileşeni ile getirilen girdiler, veri tabanından getirilen veriler ve Görünüm bileşeninden gönderilen veriler bir araya gelir. Ortaya gelen bu veriler üzerinde gerekli kontroller, işlemler gerçekleştirilir ve veri tabanına kaydedilmesi için ilgili bileşene gönderilir[6].

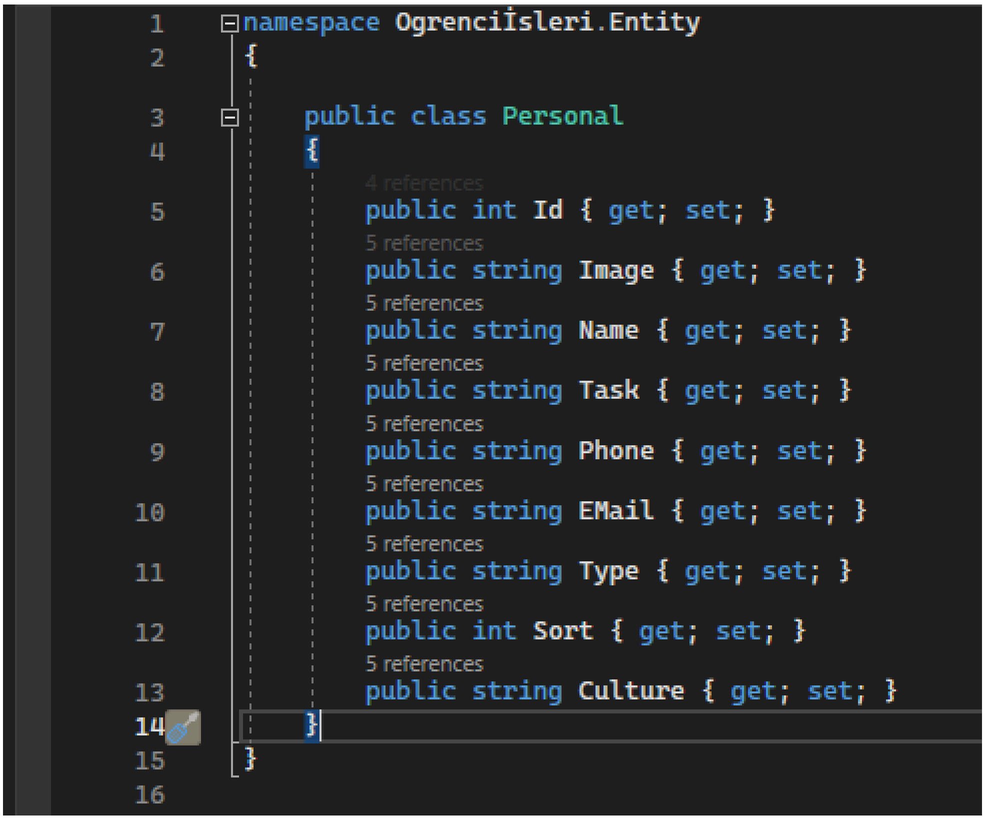


Resim-4 – MVC deseni

Genel olarak MVC deseni bileşenleri Resim-4'de gösterildiği gibi ilişki içerisindedir. Görünüm bileşenine Kontrol bileşeni aracılığıyla Model üzerinden veriler gönderilir. Görünüm üzerindeki veriler Model ile Kontrol bileşenine gönderilir. Kontrol bileşeninde veriler düzenlenir, kontrol edilir ve Görünüm, Model veya veri tabanına kaydedilmesi için Entity çerçevesine gönderilir.

Entity

Entity çerçevesi (Framework) bir Nesne-İlişkisel Eşleme (ORM – Object Relational Mapping) aracıdır. İlişkisel veritabanı ile nesneye yönelik programlama arasında köprü görevi görür. Uygulama içerisindeki nesneleri veri tabanına bağlayan ve veri alışverişini yapan bir çerçevedir. Veri tabanı üzerinde gerçekleştirilen ekleme, silme, güncelleme vb. işlemlerin hepsi, Dil ile Bütünleşik Sorgu (LINQ – Language Integrated Query) aracı ile daha sade ve düzenli şekilde Entity üzerinde gerçekleştirilir.



```
namespace OgrenciİsIeri.Entity
{
    public class Personal
    {
        public int Id { get; set; }
        public string Image { get; set; }
        public string Name { get; set; }
        public string Task { get; set; }
        public string Phone { get; set; }
        public string EMail { get; set; }
        public string Type { get; set; }
        public int Sort { get; set; }
        public string Culture { get; set; }
    }
}
```

Resim-5 – Personel bilgileri için oluşturulmuş bir Entity örneği

Microsoft Visual Studio üzerinde NuGet Paketleri Yönetim aracından Entity paketi kurulduktan sonra Çözümleme Ekranından proje içerisine Entity klasörü açılır ve bu klasör içerisine veri tabanımızın içerisinde oluşturulacak olan tabloların her biri için ayrı ayrı sınıflar açılır. Bu sınıfların içerisine Resim-5'de gösterildiği gibi tabloların içerisinde tutulacak olan veri türleri belirtilir. Entity içerisinde bir Veri Bağlamı (Data Context) sınıfı oluşturulur ve burada veri tabanı adresimiz tanımlanır. Proje çalıştırıldığında Migrasyon Sistemi, Entity içerisindeki sınıflara göre veri tabanını otomatik olarak düzenler.

ASP.Net Identity

ASP.Net Identity bir üyelik sistemi çerçevesidir. Microsoft tarafından Membership çerçevesinin yerine geliştirilen, yönetilebilirlik açısından daha geniş kapsamlı ve özelleştirilebilir niteliktedir. NuGet Paketleri Yönetim aracı üzerinden kolayca kurulabilir. Üyelik sisteminin bulunduğu her türlü siteler için kullanıma uygundur. Öğrenci İşleri Web Uygulamasında genel bir üyelik sistemi olmasa da Yönetim Panelinin güvenliğini sağlamak adına bir yönetici giriş kısmı oluşturulur.

ASP.Net Identity çerçevesini kurduğunuz zaman neredeyse her şey hazır demektir. Kurulum sonrasında tek yapmanız gereken, Identity içerisindeki Veri Bağlamı sınıfına veri tabanı adresinizi belirtmenizdir. Kullanıcı giriş ve çıkış, şifre değiştirme, yeni hesap oluşturma, şifre hatırlatma, yetkilendirme gibi daha birçok üyelik sistemi özellikleri, sayfa tasarımlarıyla beraber hazır olarak gelir. Elbette bunlar üzerinde isteğe bağlı olarak düzenlemeler ve değişiklikler yapılabilir[7].

```
[Authorize(Roles = "Administrator")]
public class AdministrationController : Controller
{
    public IActionResult Index() =>
        Content("Administrator");
}
```

Resim-6 – Yetkilendirme çalışması

Üyelik sistemi hazırlarken dikkat edilmesi gereken en önemli konulardan birisi de rol sistemidir. Özellikle Yönetim Paneli kullanılan uygulamalarda rol sistemi hatalı hazırlanırsa, kullanıcıların yönetim paneline erişimi gibi büyük bir güvenlik açığı oluşabilir. Bunu önlemek için yönetim panelinin kontrol bileşenine Resim-6'da örneklendirildiği gibi yetkilendirme verilerek sadece yönetici rolüne sahip kullanıcıların erişmesi sağlanır. Bu durumda yönetici sayfasına giriş talebi geldiği zaman Kontrol bileşeni giriş yapan kullanıcının rolünü kontrol ederek erişim verecektir.

Çoklu Dil

Web uygulamalarında çoklu dil sistemi günümüzde kurumlar için olmazsa olmaz bir eklentidir. Eğer uygulamamız sadece yurt içi hizmet göstermeyecekse mutlaka bir çoklu dil

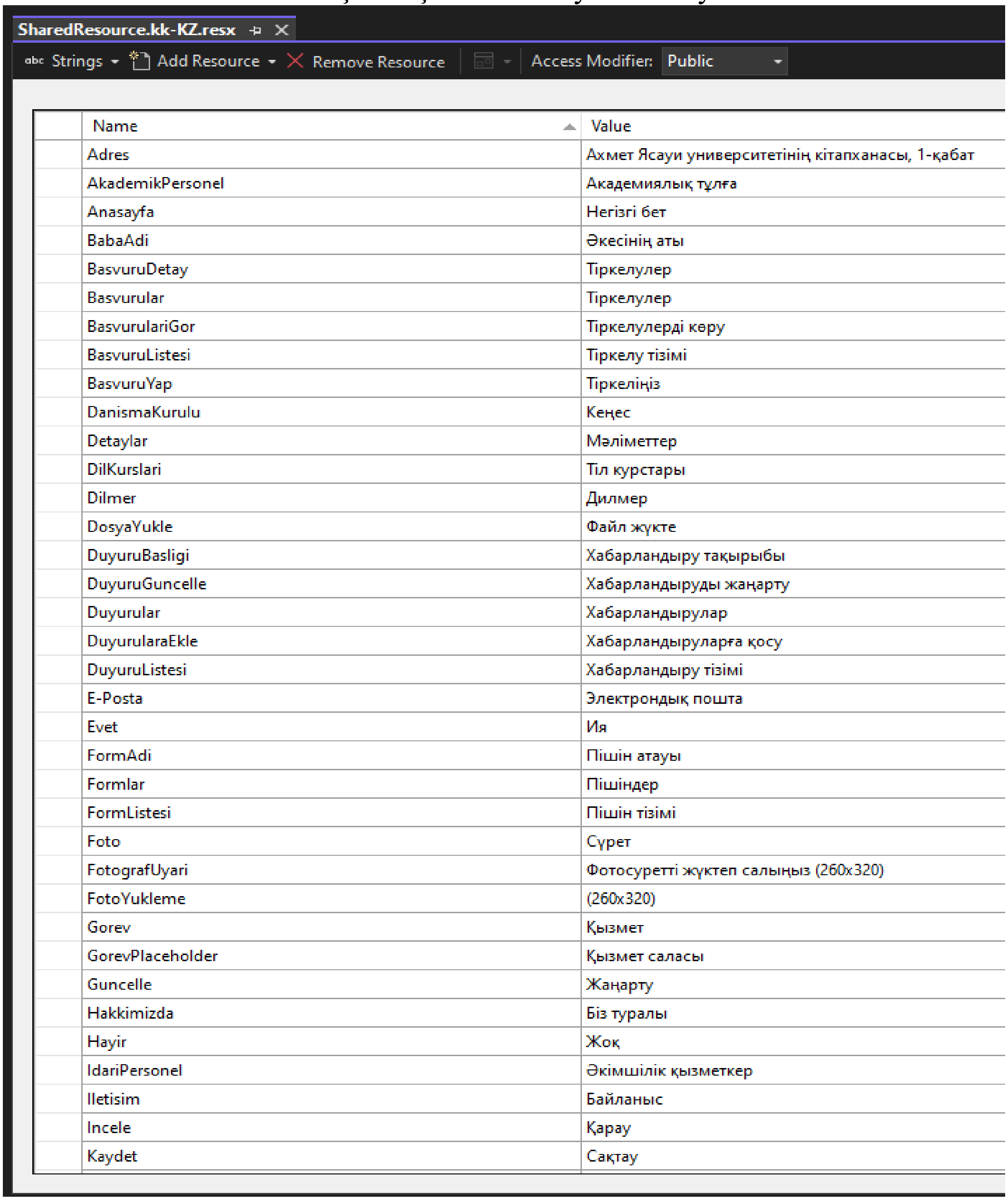
```
services.AddSingleton<LanguageService>();
services.AddLocalization(options => options.ResourcesPath = "Resources");

services.AddMvc()
    .AddViewLocalization(LanguageViewLocationExpanderFormat.Suffix)
    .AddDataAnnotationsLocalization(options =>
    {
        options.DataAnnotationLocalizerProvider = (type, factory) =>
        {
            var assemblyName = new AssemblyName(typeof(ShareResource).GetTypeInfo().Assembly.FullName);
            return factory.Create("ShareResource", assemblyName.Name);
        };
    });

services.Configure<RequestLocalizationOptions>(
    options =>
    {
        var supportedCultures = new List<CultureInfo>
            {
                new CultureInfo("tr-TR"),
                new CultureInfo("kk-KZ")
            };

        options.DefaultRequestCulture = new RequestCulture(culture: "tr-TR", uiCulture: "tr-TR");
        options.SupportedCultures = supportedCultures;
        options.SupportedUICultures = supportedCultures;

        options.RequestCultureProviders.Insert(0, new QueryStringRequestCultureProvider());
    });
```

Resim-7 – Çoklu dil sistemi Startup.cs dosyası

sistemi oluşturmamız gerekmektedir. Bu çalışmada, tasarıma en uygun çoklu dil sistemi olan Küreselleşme ve Yerelleşme (Globalization and Localization) sistemi ele alındı.

Microsoft Visual Studio üzerinde ASP.Net MVC projesi oluşturduğunuz zaman Küreselleşme ve Yerelleşme Sisteminin kütüphaneleri, proje içerisinde zaten mevcut olacaktır. Ekstra bir paket kurulumuna gerek yoktur. Öncelikle Model bileşeni içerisinde bir dil servisi oluşturulur. Bu dil servisinde çevirilerin olduğu kaynak dosya belirtilir. Startup.cs dosyası içerisinde ilgili servisler tanımlanır. Öncelikle Model içerisinde oluşturulan dil servisi tanımlanır. Çeviri dosyalarının yer alacağı klasör yolu tanımlanır. Son olarak genel ayarlamaların yapılacağı servis, Resim-7'de gösterildiği gibi oluşturulur. Bu servisin içerisinde, uygulamada kullanılacak diller ve uygulamanın ilk açılışı için varsayılan dil belirtilir[8].

Çevirilerin yapılacağı dosyaları hazırlamak için, servislerde belirtilen dosya yolunda .resx uzantılı kaynak dosyaları oluşturulur. Kaynak dosyasının içerisinde Resim-8'de görüldüğü gibi "Name" ve "Value" adında iki sütun olacaktır. Name sütununa anahtar kelimeler yazılır. Burada sadece İngilizce karakterler kullanılır ve tek kelime haline boşluksuz yazılır. Value sütununa ise çevirisi yazılır. Bir başka dil için de aynı şekilde kaynak dosyası oluşturulur. Bu sefer “Value” sütununa o dilde çeviriler yazılır. Anahtar kelimeler tüm dillerde aynı olmalıdır. Görünüm bileşeninde sayfa tasarımı yapılırken, Resim-3’de görüldüğü gibi “@language.GetKey(“Keyword”)” kodu ile çeviri sağlanmış olur. Bu sistemde sayfa o anda hangi dilde görüntüleniyorsa sistem o dilin kaynak dosyasına giderek anahtar kelimenin karşısındaki çeviriyi ekrana gösterir. Bu da yeni dil eklemek gerektiği durumlarda işlemi çok kolaylaştırır. Projeye üçüncü bir dil eklemek istendiği takdirde, sadece kaynak dosyasından bir tane daha oluşturulması ve anahtar kelimelerin karşısına çevirilerinin yazılması yeterli olacaktır.



Name	Value
Adres	Ахмет Ясауи университетінің кітапханасы, 1-қабат
AkademikPersonel	Академиялық тұлға
Anasayfa	Негізгі бет
BabaAdi	Әкесінің аты
BasvuruDetay	Тіркелулер
Basvurular	Тіркелулер
BasvurulariGor	Тіркелулерді көру
BasvuruListesi	Тіркелу тізімі
BasvuruYap	Тіркеліңіз
DanismaKurulu	Кеңес
Detaylar	Мәліметтер
DilKurslari	Тіл курстары
Dilmer	Дилмер
DosyaYukle	Файл жүкте
DuyuruBasligi	Хабарландыру тақырыбы
DuyuruGuncelle	Хабарландыруды жаңарту
Duyurular	Хабарландырулар
DuyurularaEkle	Хабарландыруларға қосу
DuyuruListesi	Хабарландыру тізімі
E-Posta	Электрондық пошта
Evet	Иә
FormAdi	Пішін атауы
Formlar	Пішіндер
FormListesi	Пішін тізімі
Foto	Сурет
FotografUyari	Фотосуретті жүктеп салыңыз (260x320)
FotoYukleme	(260x320)
Gorev	Қызмет
GorevPlaceholder	Қызмет саласы
Guncelle	Жаңарту
Hakkimizda	Біз туралы
Hayir	Жоқ
IdariPersonel	Әкімшілік қызметкер
Iletisim	Байланыс
Incele	Қарау
Kaydet	Сақтау

Resim-8 – Çoklu dil kaynak dosyası

Sonuç

Bu çalışmada ASP.Net MVC temelli bir web uygulamasının geliştirilmesini, projenin kurulum ve programlanma süreçlerini incelendi. Projenin Microsoft Visual Studio üzerinde kurulumu yapıldı. Bir web uygulamasında kullanıcılar tarafından ilk değerlendirilen kısım olan sayfa tasarımlarının nasıl hazırlanacağı gösterildi. Ana katman ve sayfalar ayrımı, bunların nasıl tanımlanacağı belirtildi. Görünüm bileşeninin tamamlanmasının ardından arka taraf programlamasının yapılacağı Kontrol ve Model bileşenleri incelendi. Model bileşeninde, Görünüm sayfasında işlenecek olan veriler için sınıflar oluşturuldu. Kontrol bileşeninin kodların düzenlendiği, gerekli mantıksal işlemlerin ve düzenlemelerin yapıldığı yer olduğu kavrandı. Kontrol bileşeni ile Görünüm bileşenine Model aracılığıyla veri gönderimini ve veri tabanına verileri işlemenin, Entity çerçevesini ve LINQ sorgularını kullanarak Kontrol bileşeninden yönlendirmeyle nasıl yapılacağı incelendi. Entity çerçevesinin veri tabanı işlemlerinin LINQ sorgularıyla çok daha kullanışlı ve kolay olarak nasıl gerçekleştirildiği incelendi. Yönetim paneli kullanımı için üyelik ve rol sistemi kullanımının önemi kavrandı. Üyelik ve rol sistemi için Microsoft tarafından geliştirilen Identity çerçevesi tanımlandı. Identity çerçevesinin kurulum ve kullanım yöntemi incelendi. Proje, bütün işlemlerin sonunda artık yayına ve kullanıma hazır hale geldi. Bu alanda çalışmalar yapacak olanlar, kendilerine göre tasarlayarak düzenlemeler yapabilirler.

Standart web programlama sistemlerinde (HTML, CSS, JavaScript) ön taraf sayfa tasarımları için bir proje, arka taraf programlaması için bir proje oluşturulur. Ön taraf ve arka taraf projeleri birbirine entegre edilerek çalışması sağlanır. Bu sistem dışarıdan bakıldığında gayet kolay ve daha az karmaşık görünse de aslında öyle değildir. ASP.Net, MVC, Entity Framework, Identity Framework, Microsoft SQL, HTML, CSS, JavaScript, C#, LINQ gibi birden fazla teknoloji kullanılarak oluşturulan bu web uygulamasında, bu kadar farklı teknoloji ile çalışma yapmak zor görünse de sistem kurulduktan sonra tasarım ve kodlama sürecinde, çoklu dil sistemi kurulumunda, arka taraf ve ön taraf iletişiminde programcılara büyük kolaylıklar sağladığı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Akçay M., Kasım Ö., Taşdelen Z. ASP.NET Ve MVC Temelli Esnek (Responsive) Web Uygulaması // ESTUDAM Bilişim Dergisi. - 2021. - Cilt 2, Sayı 1. – S. 34-41.
2. Ergin İ., Akseki B. Lisanüstü Eğitimde Kullanılan Öğrenci Bilgi Sistemi // Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi. – 2012. – Cilt 1 Sayı 2. – S. 364-380.
3. Uçar E., Altunsöğüt Ö. ASP.Net Teknolojisini Kullanarak Bir Satın Alma Portalı Uygulaması Geliştirilmesi // Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi. -2009. - 10(2). – S. 119-126.
4. Views in ASP.NET Core MVC (2022). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/mvc/views/overview?view=aspnetcore-7.0
5. Part 4, add a model to an ASP.NET Core MVC app (2023). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/tutorials/first-mvc-app/adding-model?view=aspnetcore-7.0&tabs=visual-studio
6. ASP.NET MVC Controller Overview (C#) (2022). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/mvc/overview/older-versions-1/controllers-and-routing/aspnet-mvc-controllers-overview-cs
7. Role-based authorization in ASP.NET Core (2022). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/security/authorization/roles?view=aspnetcore-7.0
8. Globalization and localization in ASP.NET Core (2023). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/fundamentals/localization?view=aspnetcore-7.0

REFERENCES

1. Akcay M., Kasım O., Tasdelen Z. ASP.NET Ve MVC Temelli Esnek (Responsive) Web Uygulaması // Journal of ESTUDAM Information. - 2021. - Volume 2, Issue 1. – P. 34-41.
2. Ergin I., Akseki B. Student Information System Used In Graduate Education // Journal of Research in Education and Teaching. – 2012. – Volume 1 Issue 2. – P. 364-380.

3. Ucar E., Altunsogut O. Development of an E-Purchase Portal Application Using ASP.NET Technology // Trakya University Journal of Science. -2009. - 10(2). – P. 119-126.
4. Views in ASP.NET Core MVC (2022). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/mvc/views/overview?view=aspnetcore-7.0
5. Part 4, add a model to an ASP.NET Core MVC app (2023). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/tutorials/first-mvc-app/adding-model?view=aspnetcore-7.0&tabs=visual-studio
6. ASP.NET MVC Controller Overview (C#) (2022). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/mvc/overview/older-versions-1/controllers-and-routing/aspnet-mvc-controllers-overview-cs
7. Role-based authorization in ASP.NET Core (2022). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/security/authorization/roles?view=aspnetcore-7.0
8. Globalization and localization in ASP.NET Core (2023). Web: https://learn.microsoft.com/en-us/aspnet/core/fundamentals/localization?view=aspnetcore-7.0

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА

ИНФОРМАТИКА

CONTENT

MATHEMATICS

PHYSICS

ИНФОРМАТИКА

Қ.А. ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ
ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРЛАРЫ
(МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ)

Редакцияның мекен-жайы:
161200, Қазақстан Республикасы, Түркістан қаласы,
Б. Саттарханов даңғылы, 29В, ректорат, 404 бөлме.
Байланыс тетіктері: 8 (725-33) 6-38-26 (19-60) e-mail: ayu-habarlari@ayu.edu.kz

Ғылыми редакторлар:
Қошанова М.Д., Шектибаев Н.А., Жунисов Н.М.
Жауапты хатшы: Ахметова Ж.
Техникалық редактор: Тоқтасын А.

30.09.2023 ж. баспаға жіберілді

Журнал Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің
«Тұран» баспаханасында көбейтілді.
Қағаздың пішімі: 70x100. Қағазы офсеттік А4.
Офсеттік басылым. Шартты баспа табағы 6.
Таралымы 110 дана. Тапсырыс 145.