УДК 517.988.68
МРНТИ 27.41.19
https://doi.org/10.47526/2022-2/2524-0080.06

Г.Б. БАКАНОВ[1], С.К. МЕЛДЕБЕКОВА[2]

[1]физика-математика ғылымдарының докторы, профессор
E-mail: galitdin.bakanov@ayu.edu.kz
[2]докторант
E-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz
Қожа Ахмет Ясауи атындағы халықаралық қазақ-түрік университеті

ИНТЕГРАЛДЫҚ ГЕОМЕТРИЯНЫҢ САЛМАҚ ФУНКЦИЯСЫ БАР ЕСЕБІНІҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ-АЙЫРЫМДЫҚ АНАЛОГЫНЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Аңдатпа. Осы еңбекте кейбір регулярлық шарттарын қанағаттандыратын қисықтар үйірі үшін аралас типті теңдеу үшін айрымдық есебіне келтірілетін интегралдық геометрия есебі қарастырылады. Интегралдық геометрия есептерінің айрымдық аналогтарын зерттеудің өзіне тән күрделі тұстары бар, дербес туындылардың шектеулі-айырымдық аналогтары үшін негізгі қатынастар дискретті айнымалы бойынша белгілі бір ығысумен жүргізілуіне байланысты болады. Сондықтан, үзіліссіз қойылымда алынатын көптеген қатынастар дискретті аналогқа ауысқанда анағұрлым күрделі түрге ие болады, және ығысу барысында туындайтын қосылғыштарға қатысты қосымша зерттеулерді талап етеді. Бұл есептердің жалпы жағдайда шешім бар болуының теоремасы болмағандықтан шартты корректілік ұғымы қолданылды, яғни интегралдық геометрия есебі мен оның дифференциалдық-айырымдық аналогының шешімі бар деп жорамалданады. Еңбекте алынған аралас типті теңдеу үшін шекаралық есептің айырымдық аналогының орнықтылық бағалауы геотомография, медициналық томография, дефектоскопия және т.б. есептерді сандық шешу әдістерінің жинақтылығын негіздеуде қолданылады.

Кілт сөздер: қисынсыз есеп, шекаралық есеп, аралас типті теңдеу, орнықтылық бағалауы, дифференциалдық-айырымдық есеп, квадратты форма.

Г.Б. БАКАНОВ[1], С.К. МЕЛДЕБЕКОВА[2]

[1] доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: galitdin.bakanov@ayu.edu.kz
[2]докторант
E-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz
Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Аннотация. В настоящей работе рассматривается задача интегральной геометрии, приводимая к разностной задаче для уравнения смешанного типа для кучи кривых, удовлетворяющих некоторым регулярным условиям. Изучение отличительных аналогов задач интегральной геометрии имеет свои характерные сложности, для ограниченно-отличительных аналогов самостоятельных производных основные соотношения связаны с определенным смещением по дискретной переменной. Поэтому многие отношения, получаемые в непрерывном представлении, имеют более сложный вид при переходе на дискретный аналог, и требуют дополнительных исследований в отношении соединений, возникающих в ходе сдвига. Поскольку теорема о существовании решения в общем случае этих задач не существует, было использовано понятие условной корреляции, т. е. предполагается, что существует решение задачи интегральной геометрии и ее дифференциально-отличительного аналога. Оценка устойчивости отличительного аналога пограничной задачи для уравнения смешанного типа, полученного в работе, включает геотомографию, медицинскую томографию, дефектоскопию и др. используется при обосновании комплектности методов численного решения задач.

Ключевые слова: нелогичная задача, граничная задача, уравнение смешанного типа, оценка устойчивости, дифференциально-разностная задача, квадратичная форма.

G.B. BAKANOV[1], S.К. MELDEBEKOVA[2]

[1] doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
E-mail: galitdin.bakanov@ayu.edu.kz
[2] doctoral student
E-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz
International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmed Yasawi

STABILITY OF THE DIFFERENTIAL-DIFFERENCE ANALOG OF THE INTEGRAL GEOMETRY PROBLEM WITH A WEIGHT FUNCTION

Abstract. In this paper, we consider the problem of Integral geometry, which is brought to the problem of difference for a mixed-type equation for a bunch of curves that satisfy some regularity conditions. The study of distinctive analogues of Integral geometry problems has its own complex points, due to the fact that for limited-distinctive analogues of independent derivatives, the main relations are carried out with a certain shift over a discrete variable. Therefore, many relationships obtained in continuous representation take on a more complex form when switching to a discrete analog, and require further research on the connectors that occur during the shift. Since these problems do not have a theorem on the existence of a solution in the general case, the concept of conditional correctness is used, that is, it is assumed that the problem of Integral geometry and its differential-differential analog have a solution. The stability assessment of the differential analog of the boundary problem for the mixed-type equation obtained in the work is carried out by geotomography, medical tomography, defectoscopy, etc. it is used to justify the compactness of numerical problem solving methods.

Keywords: irrational problem, boundary problem, mixed type equation, stability estimation, differential-differential problem, quadratic form.

Кіріспе

Бұл еңбекте аралас типті теңдеу үшін дифференциалдық-айырымдық есепке келтірілетін кейбір регулярлық шарттарды қанағаттандыратын қисықтар үйірі үшін интегралдық геометрия есебі қарастырылады.

Интегралдық геометрия есебі кейбір көпбейнеде өлшемі кіші болатын ішкі бейнелер үйірі бойынша интегралдары арқылы анықталатын функция не күрделі шаманы (дифференциалдық форма, тензорлық өріс және т.с.с.) табудан тұрады.

Физика мен астрофизикада кең қолданылатын кинетикалық теңдеулер үшін кейбір кері есептер интегралдық геометрия есептерімен тығыз байланысты. Интегралдық геометрия есептері математикалық физиканың қисынсыз есептеріне жатады, оның негіздері [1]-[3] еңбектерінде салынған және көптеген қосымшалармен байланысты есептерді (компьютерлік томография есебі, акустика мен сейсмобарлаудың кері есептері) құрайды.

Айта кететіні, интегралдық геометрия есебінің дифференциалдық-айырымдық және шектеулі-айырымдық аналогтарын зерттеу қажеттілігін алғаш рет академик М.М. Лаврентьев айтқан және болашағы бар бағыт ретінде қалыптастырды. Сондықтан, интегралдық геометрия есептерінің дифференциалдық-айырымдық және шектеулі-айырымдық аналогтарын зерттеу өзекті мәселе болып табылады.

Алғаш рет М. М. Лаврентьев пен В. Г. Романов [4] еңбегінде гиперболалық теңдеулер үшін бірқатар кері есептер интегралдық геометрия есептеріне келтірілетінін көрсеткен. Кейіннен В. Г. Романов айналма тобына қатысты инвариантты болатын жазықтықтағы қисықтырдың жалпы үйірі үшін [5], және n-өлшемді кеңістіктегі гипербеттер мен қисықтар үйірі үшін кейбір жазықтық бойымен осы объектілерді параллель ауыстыруға қатысты инвариантты болатын [6] интегралдық геометрия есептері шешімдерінің жалғыз болуы теоремасын және шартты орнықтылық бағалауларын алды.

Арнайы қисықтар үйірі үшін шешімнің жалғыз болуы және орнықтылық бағалаулары бойынша жалпылама нәтижені Р.Г. Мухометов алды. Орнықтылықтың бұл бағалаулары интегралдық геометрия есебін оған эквивалент болатын аралас типті дербес туындылы теңдеулер үшін шекаралық есепке келтіруге негізделген [7].

Тәсілдер және материалдар

D – шекарасы Γ тегіс болатын жазық, шектелген, бірбайланысты облыс болсын:

$$x=\xi(z),\ y=\eta(z),\ z\in[0,l],\quad \xi(0)=\xi(l),\ \eta(0)=\eta(l) \qquad (1)$$

мұндағы z – Γ қисығының ұзындығы. $\overline{D}$ облысында тегіс қисықтар келесі теңдеулермен берілген

$$x=\varphi(x_0,y_0,\theta,s),\quad y=\psi(x_0,y_0,\theta,s) \qquad (2)$$

мұндағы (x_0,y_0) – θ бұрышпен шығатын қисықтың нүктесі, s айнымалы параметрі доға ұзындығы. φ және ψ функцияларын анықтайтын жиын

$$T=\left\{(x_0,y_0,\theta,s)/(x_0,y_0)\in\overline{D},\ \ \theta\in[0,2\pi],\ \ s\in[0,\tilde{l}\,(x_0,y_0,\theta)]\right\},$$

мұндағы $\tilde{l}\,(x_0,y_0,\theta)$ – (x_0,y_0) нүктесінен θ бұрышпен шығатын және сол нүкте мен қисықтың шекарамен қиылысу нүктесі арасында жататын қисық бөлігінің ұзындығы.

Айталық, (2) қисықтар үйірі жиынын $K(\gamma,z)$ екіпараметрлі қисықтар үйірі деп қарастыруға болады және олар келесі шарттарды қанағаттандыратын болсын [7]:

а) $\overline{D}$ облысындағы кез келген екі нүкте арқылы $K(\gamma,z)$ жалғыз қисығы өтеді; $K(\gamma,z)$ қисықтыр үйірінің әрбір қисығы Γ шекарасын $(\xi(z),\eta(z))$және$(\xi(\gamma),\eta(\gamma))$ нүктелерінде қиятын болсын, ал басқа нүктелері Γ шекарасына жатпайды; барлық қисықтардың ұзындықтары біркелкі шектелген;

ә) $\varphi\in C^3(T),\ \psi\in C^3(T)$, осы функциялардың барлық туындылары T жиынында біркелкі шектелген;

б) $\dfrac{1}{s}\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(\theta,s)}\geq c_1>0$, мұндағы c_1 – тұрақты шама, в) $\varphi(x,y,0,s)=\varphi(x,y,2\pi,s),\quad \psi(x,y,0,s)=\psi(x,y,2\pi,s),$ осындай теңдіктер осы функциялардың үшінші ретті туындыларына дейін орындалады.

Айталық, $U(x,y)\in C^2(\overline{D})$ және

$$V(\gamma,z)=\int\limits_{K(\gamma,z)} U(x,y)\rho(x,y,z)ds;\quad \gamma\in[0,l],\quad z\in[0,l]. \tag{3}$$

Интегралдық геометрия (3) есебі $\overline{D}$ облысында берілген $K(\gamma,z)$ қисықтары және $V(\gamma,z)$ функциялары бойынша $U(x,y)$ фунциясын табудан тұрады.

Егер $K(\gamma,z)$ қисықтар үйірі а)-в) шарттарын қанағаттандыратын болса, онда (3) есебі келесі шекаралық есепке эквивалент болады [7]

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)=0,\qquad (x,y,z)\in\Omega_1 \tag{4}$$

$$W(\xi(\gamma),\eta(\gamma),z)=V(\gamma,z),\qquad V(z,z)=0\qquad \gamma,z\in[0,l] \tag{5}$$

мұндағы $\rho(x,y,z)$ – белгілі функция, $\Omega_1=\Omega\setminus\{(\xi(z),\eta(z),z): z\in[0,l]\},\quad \Omega=\overline{D}\times[0,l],$

$K(x,y,z)$ – $(x,y)\in\overline{D}$ және $(\xi(z),\eta(z))$ нүктелерін қосатын $K(\gamma,z)$ үйіріндегі қисық бөлігі,

$W(x,y,z)=\int\limits_{K(x,y,z)} U(x,y,z)\rho(x,y,z)ds$

$\theta(x,y,z)$ – $K(x,y,z)$ қисығына (x,y) нүктесінде жүргізілген жанаманың *x* өсімен жасайтын бұрышы, s – доға ұзындығы.

$W(x,y,z)$ және $\theta(x,y,z)$ функциялары келесі дифференциалдық қасиеттерге ие [7]:

Лемма 1. $W(x,y,z)\in C(\Omega)$ *функциясының екінші ретті үзіліссіз туындылары* Ω_1 *жиынында бар болады.*

Лемма 2. W_x, W_y, W_z *туындылары* Ω_1 *шектелген, ал* W_{xz}, W_{yz}, W_{xy} *кез келген* $(\xi(z),\eta(z),z)$ *түріндегі нүкте маңайында* $\left[(x-\xi(z))^2+(y-\eta(z))^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ *түрдегі ерекшелікке ие болуы мүмкін.*

Лемма 3. $\theta(x,y,z)$ *функциясы* Ω_1 *жиынында дифференциалданады және* θ_z *туындысы* $(\xi(z),\eta(z),z)$ *түріндегі кез келген нүкте маңайында* $\left[(x-\xi(z))^2+(y-\eta(z))^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ *түрдегі ерекшелікке ие болады.*

(3) есебін (4), (5) есебіне келтірудің қажетті шарттары $K(\gamma,z)$ қисықтар үйірі мен *D* облысы үшін орындалсын делік. Сондай-ақ, абсцисса не ордината өсіне параллель болатын кез келген түзу *D* облысының шекарасын екі нүктеде қияды.

Айталық,

$$a_1=\inf_{(x,y)\in D}\{x\},\quad b_1=\sup_{(x,y)\in D}\{x\},\quad a_2=\inf_{(x,y)\in D}\{y\},\quad b_2=\sup_{(x,y)\in D}\{y\},$$

$$h_j=(b_j-a_j)/N_j,\ j=1,2;\quad h_3=l/N_3,$$

мұндағы $N_j,\ j=1,2,3$ - натурал сандар.

ε келесі шартты қанағаттандыратын болсын

$0<\varepsilon<\min\{(b_1-a_1)/3,(b_2-a_2)/3\}$,

$D^{\varepsilon}=\left\{(x,y)\in D:\min\limits_{(\alpha,\beta)\in\Gamma}\rho((x,y),(\alpha,\beta))>\varepsilon\right\}$,

$R_h=\{(x_i,y_j):x_i=a_1+ih_1,y_j=a_2+jh_2,i=1,...,N_1;\ j=1,...,N_2\}$.

(a_1+ih_1,a_2+jh_2) нүктесінің $Ш(ih_1,jh_2)$ маңайы деп (a_1+ih_1,a_2+jh_2) нүктесі және оның $(a_1+(i\pm1)h_1,a_2+(j\pm1)h_2)$ түрдегі нүктелерінен тұратын жиынды айтамыз.

D_h^{ε} – $D^{\varepsilon}\cap R_h$ облысында өзінің $Ш(ih_1,jh_2)$ маңайымен жатанын барлық (a_1+ih_1,a_2+jh_2) нүктелер жиыны.

Γ_h^{ε} – $Ш(ih_1,jh_2)$ маңайның $(D^{\varepsilon}\cap R_h)/D_h^{\varepsilon}$ жиынымен қиылысы бос болмайтындай $(a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in D_h^{\varepsilon}$ нүктелер жиыны. Сонда,

$\Delta_h^{\varepsilon}=\bigcup\limits_{\Gamma_h^{\varepsilon}}Ш(ih_1,ih_2),\quad D_h=R_h\cap D.$

$\Omega_h^{\varepsilon}=\{(a_1+ih_1,a_2+jh_2,kh_3):(a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in D_h^{\varepsilon},k=0,1,...,N_3-1\}.$

(4)-(5) есебінің коэффициенттері мен шешімі қасиеттері келесідей болады:

$W(x,y,z)\in C^3(\Omega^{\varepsilon})$, $\theta(x,y,z)\in C^2(\Omega^{\varepsilon}),\quad \Omega^{\varepsilon}=\overline{D}^{\varepsilon}\times[0,l],$

$\rho(x,y,z)\in C^2(\Omega),\rho(x,y,z)>c_1>0,\dfrac{\partial\theta}{\partial z}>\left|\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\cdot\dfrac{1}{\rho}\right|.$

Келесі айырымдық есепті қоямыз:

$$\Phi_{\overset{0}{x}}\frac{A}{C}+\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{B}{C}=U_{i,j},\quad (a_1+ih_1,a_2+ih_2)\in D_h, z\in[0,l] \tag{6}$$

теңдеуін және шекаралық шартты

$$\Phi_{i,j}(z)=F_{i,j}(z),\ (a_1+ih_1,a_2+jh_2)\in\Delta_h^{\varepsilon},\ z\in[0,l] \tag{7}$$

қанағаттандыратын $\Phi_{i,j}(z),\ U_{i,j}$ функцияларын табу керек.

Мұндағы

$\Phi_{i,j}(z)=\Phi(x_i,y_j,z)=\Phi(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z),$

$U_{i,j}=U(x_i,y_j)=U(a_1+ih_1,a_2+jh_2),i=\overline{0,N_1},\ j=\overline{0,N_2};$

$\Phi_{\overset{0}{x}}=(\Phi_{i+1,j}-\Phi_{i-1,j})/2h_1,\ \Phi_{\overset{0}{y}}=(\Phi_{i,j+1}-\Phi_{i,j-1})/2h_2,$

$A=\cos\theta_{i,j}(z),\quad B=\sin\theta_{i,j}(z),\quad \theta_{i,j}(z)=\theta(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z),\quad C=\rho(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z).$

Айта кететіні, мұндай қойылымда есеп шешімі жайлы ақпарат тек Г шекарасында ғана емес, оның кейбір ε - маңайында да беріледі. Ал бұл $(\xi(z),\eta(z),z)$ түрдегі кез келген нүкте маңайында $\theta_z,W_{xz},W_{yz},W_{xy}$ туындыларының $\left[(x-\xi(z))^2+(y-\eta(z))^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ түрдегі ерекшеліктердің бар болуымен байланысты болады [7].

Нәтижелер және оларды талқылау

Теорема. *(6)-(7) есебінің шешімі бар болсын деп жоримыз. Барлық* $(x_i,y_j)\in D_h$ *үшін*

$\Phi_{i,j}(z)\in C^1[0,l],\quad \Phi_{i,j}(0)=\Phi_{i,j}(l),$

$F_{i,j}(z)\in C^1[0,l],\quad F_{i,j}(0)=F_{i,j}(l),$

ал $C=\rho(a_1+ih_1,a_2+jh_2,z)$ болсын. $\theta_{i,j}(z)$ *келесі шарттарға қанағаттандыратын болсын*

$$\theta_{i,j}(0)=\theta_{i,j}(l),\ \frac{\partial\theta}{\partial z}>\left|\frac{\partial\rho}{\partial z}\cdot\frac{1}{\rho}\right|.$$

Онда барлық $N_j>9,\ j=1{,}2$ *үшін келесі бағалау орынды болады*

$$\sum_{D_h^\varepsilon}U_{i,j}^2h_1h_2\le c_3\int_0^l\sum_{\Delta_h^\varepsilon}\left[F_{\underset{x}{0}}^2h_1+F_{\underset{y}{0}}^2h_2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2(h_1+h_2)\right]dz, \tag{8}$$

мұндағы c_3 *тұрақтысы* $\rho(x,y,z)$ *функциясына және* $K(\gamma,z)$ *қисықтар үйіріне тәуелді болатын оң тұрақты шама.*

Бағалауда h_1 және h_2 кішірейткенде ε параметрі де азаюы мүмкін деп болжанады, өйткені c_3 шамасы ε параметріне тәуелді емес (ε параметрі бастапқы үзіліссіз есепте болатын ерекшеліктерден құтылу үшін таңдалған). Сондықтан, тор қаншалықты кіші болса, ерекшелік орын алатын облыс та соншалықты жіңішке болады.

Дәлелдеу. [8] еңбекте ұсынылған әдістемені қолдана отырып, (6) теңдеуінің екі жағын да $2C(-B\Phi_{\underset{x}{0}}+A\Phi_{\underset{y}{0}})\frac{\partial}{\partial z}$ көбейтеміз, алынған теңдікті келесі түрде жазамыз

$$J_1+J_2=0. \tag{9}$$

Мұндағы

$$J_1=J_2=C(-B\Phi_{\underset{x}{0}}+A\Phi_{\underset{y}{0}})\frac{\partial}{\partial z}(\Phi_{\underset{x}{0}}\frac{A}{C}+\Phi_{\underset{y}{0}}\frac{B}{C}).$$

Функциялардың көбейтіндісін дифференциалдау формуласын қолданып, J_1 өрнегін түрлендіреміз:

$$\begin{aligned}J_1=&\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-B\Phi_{\underset{x}{0}}+A\Phi_{\underset{y}{0}}\right)\left(A\Phi_{\underset{x}{0}}+B\Phi_{\underset{y}{0}}\right)\right]+\\&+AB\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\Phi_{\underset{x}{0}}^2-\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}A^2\Phi_{\underset{x}{0}}\Phi_{\underset{y}{0}}+\\&+\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}B^2\Phi_{\underset{x}{0}}\Phi_{\underset{y}{0}}-\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}AB\Phi_{\underset{y}{0}}^2+\frac{\partial\theta}{\partial z}A^2\Phi_{\underset{x}{0}}^2+\\&+AB\Phi_{\underset{x}{0}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\underset{x}{0}}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial z}AB\Phi_{\underset{x}{0}}\Phi_{\underset{y}{0}}-A^2\Phi_{\underset{x}{0}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\underset{y}{0}}\right)+\\&+\frac{\partial\theta}{\partial z}AB\Phi_{\underset{x}{0}}\Phi_{\underset{y}{0}}+B^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\underset{x}{0}}\right)\Phi_{\underset{y}{0}}+\\&+\frac{\partial\theta}{\partial z}B^2\Phi_{\underset{y}{0}}^2-AB\Phi_{\underset{y}{0}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\underset{y}{0}}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

J_2 өрнегінде жақшаларды ашқанда шығатыны

$$\begin{aligned}J_2=&-AB\Phi_{\underset{x}{0}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\underset{x}{0}}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial z}AB\Phi_{\underset{x}{0}}\Phi_{\underset{y}{0}}+\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}B^2\Phi_{\underset{x}{0}}\Phi_{\underset{y}{0}}-\\&-B^2\Phi_{\underset{x}{0}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\underset{y}{0}}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial z}B^2\Phi_{\underset{x}{0}}+\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}AB\Phi_{\underset{x}{0}}^2+\\&+A^2\Phi_{\underset{y}{0}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\underset{x}{0}}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial z}AB\Phi_{\underset{x}{0}}\Phi_{\underset{y}{0}}-\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}A^2\Phi_{\underset{x}{0}}\Phi_{\underset{y}{0}}+\\&+AB\Phi_{\underset{y}{0}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\underset{y}{0}}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial z}A^2\Phi_{\underset{y}{0}}^2-\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}AB\Phi_{\underset{y}{0}}^2\end{aligned} \tag{11}$$

J_1, J_2 өрнектерін (9) қойып және $D = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2AB$, $E = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = A^2 - B^2$, белгілей отырып (10), (11) табатынымыз

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}D\right)\Phi_{\overset{0}{x}}^{\,2} - 2\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}E + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}D\right)\Phi_{\overset{0}{y}}^{\,2} +$$
$$+\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}\right) - \Phi_{\overset{0}{x}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{y}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-B\Phi_{\overset{0}{x}} + A\Phi_{\overset{0}{y}}\right)\left(A\Phi_{\overset{0}{x}} + B\Phi_{\overset{0}{y}}\right)\right] = 0 \qquad (12)$$

Байқауға болатыны

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{x}}\right) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{\overset{0}{x}}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_{\overset{0}{y}}\right) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{\overset{0}{y}},$$

$$(uv)_{\overset{0}{x}} = u_{\overset{0}{x}}v + uv_{\overset{0}{x}} + \frac{h_1^2}{2}\left[u_x v_x\right]_{\bar{x}},$$

мұндағы

$$f_x = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_1}, \quad f_{\bar{x}} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_1}.$$

Сонда

$$\Phi_{\overset{0}{y}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{\overset{0}{x}} - \Phi_{\overset{0}{x}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{\overset{0}{y}} = \left[\Phi_{\overset{0}{y}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]_{\overset{0}{x}} - \left[\Phi_{\overset{0}{x}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]_{\overset{0}{y}} -$$
$$-\frac{h_1^2}{2}\left[\Phi_{\overset{0}{yx}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_x\right]_{\bar{x}} + \frac{h_1^2}{2}\left[\Phi_{\overset{0}{xy}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_y\right]_{\bar{y}},$$

және (12) формуладан шығатыны

$$J_3 + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-B\Phi_{\overset{0}{x}} + A\Phi_{\overset{0}{y}}\right)\left(A\Phi_{\overset{0}{x}} + B\Phi_{\overset{0}{y}}\right)\right] + \left[\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]_{\overset{0}{x}} - \left[\Phi_{\overset{0}{x}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]_{\overset{0}{y}} -$$
$$-\frac{h_1^2}{2}\left[\Phi_{\overset{0}{yx}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_x\right]_{\bar{x}} + \frac{h_2^2}{2}\left[\Phi_{\overset{0}{xy}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_y\right]_{\bar{y}} = 0, \qquad (13)$$

мұндағы

$$J_3 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}D\right)\Phi_{\overset{0}{x}}^{\,2} - 2\Phi_{\overset{0}{x}}\Phi_{\overset{0}{y}}\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}E + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}D\right)\Phi_{\overset{0}{y}}^{\,2}$$

J_3 өрнегін $\Phi_{\overset{0}{x}}$ және $\Phi_{\overset{0}{y}}$ қатысты квадратты форма деп қарастырсақ, оның анықтауышы келесідей болады

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\right)^2.$$

Онда

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} > \left|\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial z}\right|$$

шартынан J_3 квадратты форманың оң анықталғандығы шығады.

$ax^2 + 2bxy + cy^2$ оң анықталған квадратты формасы үшін орынды болатын

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \geq \frac{2\left(ac - b^2\right)}{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}(x^2 + y^2)$$

теңсіздігін пайдалана отырып,

$$J_3 \geq \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \left| \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial z} \right| \right) \left(\Phi_{0_x}^{\ 2} + \Phi_{0_y}^{\ 2} \right) \tag{14}$$

бағалауын аламыз.

(6) және $A = \cos\theta,\ B = \sin\theta$ ескере отырып, табатынымыз

$$\Phi_{0_x}^{\ 2} + \Phi_{0_y}^{\ 2} = U_{i,j}^2 C^2 + \left(B\Phi_{0_x} - A\Phi_{0_y} \right)^2 . \tag{15}$$

Сонда

$$C = \rho(x,y,z), \quad \rho(x,y,z) > C^* > 0, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \left| \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial z} \right| \right) > 0, \tag{16}$$

екенін ескере отырып, қандай да бір c_2>0 бар болады және

$$\int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \left| \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial z} \right| \right) C^2 dz \geq \frac{1}{c_2^2} > 0 \tag{17}$$

теңсіздігі орынды болытынына көз жеткіземіз.

Енді (7) шартын пайдаланып i,j бойынша қосындылаймыз және (14), (15), (16), формулалары негізінде z бойынша интегралдаймыз, $\Phi_{i,j}(z), \theta_{i,j}(z)$ функцияларының z бойынша периодтылығы мен $|ab| \leq (a^2 + b^2)/2$ теңсіздігін ескере отырып, (13) бірнеше түрлендірулерден кейін

$$\sum_{D_h^\varepsilon} U_{i,j}^2 h_1 h_2 \leq c_3 \int_0^l \sum_{\Delta_h^\varepsilon} \left[F_{0_x}^2 h_1 + F_{0_y}^2 h_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 (h_1 + h_2) \right] dz$$

бағалауды табамыз, мұнда c_3 тұрақтысы $\rho(x,y,z)$ функциялары мен $K(\gamma,z)$ қисықтар үйіріне тәуелді болады. Сонымен, теорема дәлелденді.

Қорытынды

Осы еңбекте алынған аралас типті теңдеу үшін шекаралық есептің айырымдық аналогының орнықтылығының бағалауы геотомография, медициналық томография, дефектоскопия есептерін сандық шешу әдістерінің жинақтылығын негіздеуде қолданылады және акустика мен сейсмобарлаудың көпөлшемді кері есептерін шығаруда үлкен практикалық маңызы бар.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Арсенин В. Я., Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. – М., «Наука», 1986.
2. Ivanov, V. K., Vasin, V. V., & Tanana, V. P. (2013). Theory of linear ill-posed problems and its applications. De Gruyter, doi: 10.1515/9783110944822
3. Lavrent_ev, M. M., Romanov, V. G., & Shishatski_, S. P. (1986). Ill-posed problems of mathematical physics and analysis (Vol. 64). American Mathematical Soc.
4. Лаврентьев М. М., Романов В. Г. «О трех линеаризированных обратных задачах для гиперболических уравнений», Докл. АН СССР, 1966. -Т. 171. - 6. - С. 1279-1281.
5. Романов В. Г. О некоторых классах единственности решения задач интегральной геометрии //Математические заметки. – 1974. – Т. 16. – №. 4. – С. 657-668.
6. Романов В. Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых //Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – №. 5. – С. 1206-1208.

7. Мухометов Р. Г. О задаче интегральной геометрии //Математические проблемы геофизики. Новосибирск. – 1975. – Т. 6. – С. 212-252.
8. Кабанихин С. И. , Баканов Г. Б. «Об устойчивости конечно-разностного аналога двумерной задачи интегральной геометрии», Докл. АН СССР, 1987. -Т. 292. - 1. - С. 25-29.