МАТЕМАТИКА

УДК 517.926
МРНТИ 27.29.21
https://doi.org/10.47526/2025-4/2524-0080.36

Екия А.Г[1], Турметов Б.Х.[2]
[1] *магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г.Туркестан), e-mail: yekiyaru@bk.ru*
[2]*доктор физико-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г.Туркестан), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

О МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНОЙ ТИПА АДАМАРА

АДАМАР ТИПТІ ТУЫНДЫСЫ БАР БӨЛШЕК РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІМІН ҚҰРУ ӘДІСІ ТУРАЛЫ

ON THE METHOD FOR CONSTRUCTING THE SOLUTION OF A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH A HADAMARD-TYPE DERIVATIVE

Аннотация. *В данной статье предлагается всесторонний анализ дифференциальных уравнений дробного порядка, включающих производную Адамара и её различные модификации. Основное внимание уделяется особенностям операторов Адамара–Капуто, которые значительно расширяют аналитический инструментарий при исследовании процессов с мультипликативной шкалой и логарифмической зависимостью. В работе подробно рассматривается метод нормированных систем, основанный на концепции обобщённой однородности, что позволяет получить единый и эффективный подход к построению решений. Этот метод ранее применялся преимущественно к уравнениям целого порядка, однако в данной статье он адаптирован к существенно более сложному классу интегро-дифференциальных операторов Адамара.*

Для однородного уравнения выводится явная формула решения в виде функционального ряда с коэффициентами, выраженными через гамма-функцию и символ Похгаммера. Показано, что этот ряд обладает абсолютной сходимостью и определяет аналитическую функцию на всей комплексной плоскости. В случае неоднородного уравнения приводится метод построения частного решения с применением правого обратного оператора, что позволяет получать решение в замкнутом виде. Установлены условия корректности задачи. Полученные результаты расширяют теоретическую базу дробного исчисления и открывают новые перспективы для исследований в области операторов Адамара.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения дробного порядка, производная Адамара, производная Адамара–Капуто, обобщённая однородность, метод нормированных систем, явное решение, сходимость ряда.*

Аңдатпа. *Бұл мақалада Адамар туындысын және оның түрлі модификацияларын қамтитын бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерге жан-жақты талдау ұсынылады. Негізгі назар мультипликативті шкаламен және логарифмдік тәуелділікпен процестерді зерттеудегі аналитикалық құралдарды айтарлықтай кеңейтетін Адамар–Капуто операторларының ерекшеліктеріне аударылады. Жұмыста жалпыланған біртектілік концепциясына негізделген нормаланған жүйелер әдісі егжей-тегжейлі қарастырылады, бұл шешімдерді құруға бірыңғай және тиімді тәсіл алуға мүмкіндік береді. Бұл әдіс бұрын негізінен бүтін ретті теңдеулерге қолданылған, алайда осы мақалада ол Адамардың әлдеқайда күрделі интегро-дифференциалдық операторларының класына бейімделген.*

Біртекті теңдеу үшін коэффициенттері гамма-функция және Похгаммер таңбасы арқылы өрнектелген функционалдық қатар түріндегі айқын шешім формуласы шығарылады. Бұл қатардың абсолютті жинақтылыққа ие екендігі және бүкіл комплекс жазықтықта аналитикалық функцияны анықтайтындығы көрсетілген. Біртекті емес теңдеу жағдайында оң жақ кері операторды қолдану арқылы дербес шешімді құру әдісі келтірілген, бұл шешімді айқын түрде алуға мүмкіндік береді. Есептің қисынды болу шарттары анықталған. Алынған нәтижелер бөлшек туындылар теориясының негізін кеңейтеді және Адамар операторлары саласындағы зерттеулер үшін жаңа перспективалар ашады.

Негізгі сөздер: *бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер, Адамар туындысы, Адамар–Капуто туындысы, жалпыланған біртектілік, нормаланған жүйелер әдісі, айқын шешім, қатардың жинақтылығы.*

Abstract. *This article presents a comprehensive analysis of fractional-order differential equations that involve the Hadamard derivative and its various modifications. Particular attention is given to the features of the Hadamard–Caputo operators, which substantially broaden the analytical toolkit for studying processes with multiplicative scaling* *and logarithmic dependence. The paper provides a detailed examination of the method of normalized systems, which is based on the concept of generalized homogeneity and makes it possible to develop a unified and effective approach to constructing solutions. This method was previously applied mainly to integer-order equations; however, in this article it is adapted to a considerably more complex class of Hadamard integro-differential operators.*

For the homogeneous equation, an explicit solution formula is derived in the form of a functional series whose coefficients are expressed in terms of the gamma function and the Pochhammer symbol. It is shown that this series possesses absolute convergence and defines an analytic function on the entire complex plane. In the case of a non-homogeneous equation, a method for constructing a particular solution using the right inverse operator is presented, which makes it possible to obtain the solution in a closed form. Conditions ensuring the well-posedness of the problem are established. The results obtained expand the theoretical foundation of fractional calculus and open new perspectives for research in the field of Hadamard-type operators.

Keywords: *fractional differential equations, Hadamard derivative, Hadamard–Caputo derivative, generalized homogeneity, method of normalized systems, explicit solution, series convergence.*

Введение

Дифференциальные уравнения дробного порядка в последние годы привлекают всё большее внимание исследователей благодаря своей способности адекватно описывать широкий круг процессов с памятью, аномальной диффузией и нелокальными эффектами. В отличие от классических моделей целого порядка, дробные производные позволяют учитывать влияние предшествующих состояний системы, что делает такие уравнения эффективным инструментом при моделировании сложных физических, биологических и технических явлений. Процессы, описываемые дифференциальными уравнениями дробного порядка, подробно изложены в обзорных статьях [1–3].

В связи с этим вопросы построения решений дифференциальных уравнений дробного порядка и изучения соответствующих задач Коши представляют особый интерес. Аналитические и конструктивные методы решения играют ключевую роль, поскольку они не только позволяют получать точные результаты, но и способствуют более глубокому пониманию качественных свойств моделей: устойчивости, асимптотического поведения, корректности постановки и др.

Разработка новых подходов к решению уравнений дробного порядка, отличных от классических методов, расширяет возможности теории дробного анализа и позволяет рассматривать более широкий класс уравнений и операторов. Это делает исследования в данной области актуальными как с теоретической точки зрения, так и в контексте многочисленных приложений.

К настоящему моменту разработаны различные методы построения решения дифференциальных уравнений дробного порядка, а также связанные с ним решения задачи Коши. В этом направлении отметим работы J.H.Barrett [4], Y. Luchko и соавторов [5-7], Y. Luchko [8], A. A.Kilbas и соавторов [9,10], А.В. Псху [11], Д. Сураган и соавторов [12] и других.

В настоящей работе излагаются сведения об одном методе построения решений дифференциальных уравнений дробного порядка, отличном от методов, представленных в указанных выше работах. Этот метод, называемый методом нормированных систем, был первоначально разработан для построения решений уравнений целого порядка в работе Б. А. Бондаренко [13], а впоследствии модифицирован в работах В. В. Карачика [14,15].

В работе А.А.Килбаса и М.Сайго [9] было изучено дифференциальное уравнение дробного порядка следующего вида

$$ {}_{RL}D^{\alpha}u(t)+\lambda t^{\beta}u(t)=g(t), t>0, \qquad (1)$$

где $0<\alpha, \beta>-\{\alpha\}, {}_{RL}D^{\alpha}$ - производная порядка α в смысле Римана-Лиувилля. Решение этого уравнения выписана в явном виде с помощью специальной функции, зависящей от трех параметров (функция Килбаса-Сайго

$$E_{\alpha,m,l}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{m=0}^{k-1}\frac{\Gamma\left[\alpha(mj+l)+1\right]}{\Gamma\left[\alpha(mj+l+1)+1\right]}\right)z^k .$$

В дальнейшем различные обобщения уравнения (1) изучались в работах Ф. Т Богатыревой [16], Б. Ю. Иргашева [17], Б. Х. Турметова [18], Б. Х. Турметова и соавторов [19,20]. В частности, в работе [17] рассмотрено следующее уравнение

$$D^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},\gamma_m\}}u(t)=\lambda y^s u(t), t>0, \lambda, s\in R, \qquad (2)$$

где последовательность чисел $\{\gamma_k\}_{k=0}^{m}=\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_m\}$ удовлетворяет условиям $\gamma_k\in(0,1]$, $k=0,1,...,m$, $\alpha_p=\sum_{k=0}^{p}\gamma_k-1, \alpha_m=\sum_{k=0}^{m}\gamma_k-1>0$ и $D^{\gamma_j}={}_{RL}D^{\gamma_j}$, $j=0,1,...,m-1, D^{\gamma_m-1}\equiv{}_{RL}J^{1-\gamma_m}$ - операторы интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля. В настоящее время конструкцию вида $D^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},\gamma_m\}}$ называют производной Джрбашяна-Нерсесяна ассоциированной со системой $\{\gamma_k\}_{k=0}^{m}$.

В работе [17] используя метод неизвестных коэффициентов решение этого уравнение найдено в явном виде. Показано, что решение задача Коши для уравнения (2) выражается через функции Килбаса-Сайго.

В настоящей работе мы рассмотрим аналог уравнения (2) с операторами интегро-дифференцирования дробного порядка в смысле Адамара.

Сначала приводим определение интеграла и производной дробного порядка, рассматриваемые в данной работе.

Для любого $\alpha>0$ оператор интегрирования дробного порядка в смысле Адамара определяется выражением [21]:

$$J_0^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}y(\tau)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Далее, для любого $\alpha\in(m-1,m], m=1,2,...,$ следующее выражение

$$D_a^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{m-\alpha-1}\left(\tau\frac{d}{d\tau}\right)^m y(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \alpha\in(m-1,m], m=1,2,...$$

называется оператором дифференцирования порядка α в смысле Адамара-Капуто [22].

В дальнейшем будем считать $J_0^0y(t)=y(t)$.

Пусть $\beta>0, \alpha_j\in(0,1], \gamma_j>0, j=1,2,...,m, \lambda\neq 0$. Введем обозначения

$$B^{\alpha_j,\gamma_j}=t^{-\gamma_j}D^{\alpha_j}, j=1,2,...,m, B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}=B^{\alpha_1,\gamma_1}\cdot B^{\alpha_2,\gamma_2}\cdot\ldots\cdot B^{\alpha_m,\gamma_m}$$

и рассмотрим в области $(0,a)$ дифференциальное уравнение вида

$$B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}y(t)\equiv B^{\alpha_m,\gamma_m}\cdot B^{\alpha_2,\gamma_2}\cdot\ldots\cdot B^{\alpha_1,\gamma_1}y(t)=\lambda y(t)+f(t). \qquad (3)$$

Решением уравнение (3) назовём функцию $y(t)$ из класса $y(t)\in C[0,a]$, для которой $B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}y(t)\in C\left(0,a\right)$ и удовлетворяющую уравнению (3).

В настоящей работе мы предлагаем новый метод построения явного вида решения уравнения вида (3), которая основана на построении нормированных систем относительно пары операторов $\left(B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}},\lambda\right)$. Переходим к изложению этого метода.

Методы. Пусть L_1 и L_2 - линейные операторы, действующие из X в X, $L_kX\subset X$, где X - некоторое функциональное пространство, а её элементы (функции) определены в области $\Omega\in R^n$.

Определение 1 [15]. Если задана система функций $\left\{f_k(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$, $f_k(x)\in X$ для которой выполняются равенства

$$L_1f_0(x)=f(x),\ L_1f_k(x)=L_2f_{k-1}(x),\ k\geq 1,$$

то она называется f - нормированной относительно пары операторов (L_1,L_2) в X с основанием $f_0(x)$.

В специальном случае, когда $L_2=E$ - единичный оператор система функций $\left\{f_k(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$ называется f - нормированной относительно L_1.

В случае, когда $f(x)=0$, систему функций $\left\{f_k(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$ назовём просто нормированной относительно оператора L_1 в X.

Основные свойства f – нормированных систем изложены в работе [15].

Лемма 1 [15]. Пусть $\left\{f_k(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$ - нормированная система относительно пары операторов (L_1,L_2) в X. Тогда сумма ряда $y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}f_k(t)$ формально удовлетворяет уравнению

$$(L_1-L_2)y(x)=f(x),x\in X\ . \qquad (4)$$

В следующей лемме приведен один из методов построение f - нормированной системы относительно пары операторов (L_1,L_2).

Лемма 2 [15]. Если для оператора L_1 существует правый обратный оператор, т.е. $L_1\cdot L_1^{-1}=E$, где E – единичный оператор и выполняется равенство $L_1f_0(x)=f(x)$, то система функций

$$f_k(x)=\left(L_1^{-1}L_2\right)^i\ f_0(x)$$

является f - нормированной относительно (L_1,L_2) в X.

В работе Б.А. Бондаренко [13] для случая $n=1$ и $f(x)=0$ предложен простой алгоритм построения 0-нормированной системы $\left\{f_k(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$ относительно частного случая оператора L_1.

Определение 2. Если для оператора D_β выполняется равенство

$$D_\beta t^\mu=C_{\beta,\mu}t^{\mu-\beta},t\geq 0, \qquad (5)$$

где $0 < \beta \le \mu -$действительное число, $C_{\beta,\mu}$-постоянное, то оно называется обобщенно-однородным порядка β относительно переменной t.

Пусть задан D_β-обобщенно-однородный оператор порядка β. Пусть для некоторых значениях параметра $s \in R$ выполняется равенство $D_\beta t^s = 0$. Рассмотрим одночлен $t^{\beta k+s}$, где $k = 0,1,2,...$. Из равенства (5) следует

$$D_\beta t^{\beta k+s} = C_{\beta,k,s} t^{\beta k+s-\beta},, \qquad (6)$$

Если в равенстве (6) заданные выражения умножить на одночлен $t^{-\beta k-s+\beta}$, то получим

$$C_{\beta,k,s} = t^{-\beta k-s+\beta} D_\beta t^{\beta k+s}.$$

Используя $C_{\beta,k,s}$ введем коэффициенты

$$C(\beta,s,i) = \prod_{k=1}^{i} C_{\beta,k,s} \equiv \prod_{k=1}^{i}\left(t^{-\beta k-s+\beta} D_\beta t^{\beta k+s}\right), i \ge 1, C(\beta,s,0) = 1$$

и построим систему функций

$$f_{i,s}(t) = \frac{t^{\beta i+s}}{C(\beta,s,i)}, i \ge 0. \qquad (7)$$

Следующее утверждение доказано в работе [13].

Лемма 3. Пусть оператор D_β является обобщенно-однородным порядка β относительно переменной t и для некоторых $s = 0,1,...$ выполняется равенство $D_\beta t^s = 0$. Тогда система функций (7) является 0-нормированной относительно оператора D_β.

Результаты и обсуждение.

Приведем некоторые свойства операторов J^α, D^α, а также оператора $B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}$. Имеет место следующие утверждение [22].

Лемма 4. Пусть $b \ge 0$. Тогда справедливы следующие равенства

$$J^\alpha(t^b) = b^{-\alpha} t^b, b > 0,\ D^\alpha(t^b) = \begin{cases} 0, b = 0 \\ b^\alpha t^b, b > 0 \end{cases} \text{ при } \alpha \in (0,1]. \qquad (8)$$

Лемма 5. Пусть $0 < \alpha \le 1, b, \gamma_j > 0, j = 1,2,...,m$. Тогда справедливы равенства

$$B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}\left(t^s\right) = 0, s = 0, s = \gamma_1, ..., s = \gamma_1 + ... + \gamma_{m-1}, \qquad (9)$$

$$B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}\left(t^b\right) = b^{\alpha_1}(b-\gamma_1)^{\alpha_2}(b-\gamma_1-\gamma_2)^{\alpha_3}...(b-\gamma_1-...-\gamma_{m-2}-\gamma_{m-1})^{\alpha_m} t^{b-\gamma_1-...-\gamma_{m-1}-\gamma_m}, \qquad (10)$$

если $b - \gamma_1 - ... - \gamma_{m-1} > 0$.

Доказательства. Если $b \ge 0$, то в силу равенства из (8) для $B^{\alpha_1,\gamma_1} t^b$ получаем:

$$B^{\alpha_1,\gamma_1}t^b = 0, b = 0; B^{\alpha_1,\gamma_1}t^b = t^{-\gamma_1}D^{\alpha_1}\left[t^b\right] = b^{\alpha_1}t^{b-\gamma_1}, b > 0.$$

Аналогично, в случае $b \geq \gamma_1$ из равенства (8) для $B^{\alpha_2,\gamma_2}\left[B^{\alpha_1,\gamma_1}t^b\right]$ получаем

$$B^{\alpha_2,\gamma_2}\left[B^{\alpha_1,\gamma_1}t^b\right] = b^{\alpha_1}t^{-\gamma_2}D^{\alpha_2}\left(t^0\right) = 0, b = \gamma_2,$$

$$B^{\alpha_2,\gamma_2}\left[B^{\alpha_1,\gamma_1}t^b\right] = b^{\alpha_1}t^{-\gamma_2}D^{\alpha_2}\left[t^{b-\gamma_1}\right] = b^{\alpha_1}(b-\gamma_1)^{\alpha_2}t^{b-\gamma_1-\gamma_2}, b > \gamma_1.$$

В общем случае, если $\sum_{j=0}^{m}\gamma_k < b$, то

$$B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}\left(t^b\right) \equiv B^{\alpha_m,\gamma_m}\cdot\ldots\cdot B^{\alpha_2,\gamma_2}\cdot B^{\alpha_1,\gamma_1}\left(t^b\right) =$$

$$= b^{\alpha_1}(b-\gamma_1)^{\alpha_2}(b-\gamma_1-\gamma_2)^{\alpha_3}\ldots(b-\gamma_1-\ldots-\gamma_{m-2}-\gamma_{m-1})^{\alpha_m}t^{b-\gamma_1-\ldots-\gamma_{m-1}-\gamma_m},$$

Причем, если s принимает значения $s = 0, s = \gamma_1, \ldots, s = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{m-1}$, то

$$B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}\left(t^s\right) \equiv B^{\alpha_m,\gamma_m}\cdot\ldots\cdot B^{\alpha_2,\gamma_2}\cdot B^{\alpha_1,\gamma_1}\left(t^s\right) = 0.$$

Лемма доказана.

Переходим к построению решении однородного уравнения.

Так как $B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}\left(t^b\right) = C_{\alpha,\beta,\gamma}t^{b-\gamma}$, где $\gamma = \sum_{j=1}^{m-1}\gamma_j$, то оператор $B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}} \equiv B^{\alpha_m,\gamma_m}\cdot\ldots\cdot B^{\alpha_2,\gamma_2}\cdot B^{\alpha_1,\gamma_1}$ является обобщенно-однородным порядка $\gamma = \sum_{j=1}^{m-1}\gamma_j$.

Тогда мы можем рассмотреть коэффициенты

$$C(\gamma,s,0) = 1, C(\gamma,s,i) = \prod_{k=1}^{i}\left(t^{-\gamma k-s+\gamma}B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}t^{\gamma k+s}\right), i \geq 1,$$

где $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{m-1}, s = 0, s_1 = 0, s_2 = \gamma_1, \ldots, s_m = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{m-1}$.

Найдем явный вид этих коэффициентов:

$$B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}t^{\gamma k+s} = B^{\alpha_m,\gamma_m}\cdot\ldots\cdot B^{\alpha_2,\gamma_2}\cdot B^{\alpha_1,\gamma_1}\left(t^{\gamma k+s}\right) =$$

$$= \left(\gamma k+s\right)^{\alpha_1}(\gamma k+s-\gamma_1)^{\alpha_2}\ldots(\gamma k+s-\gamma_1-\ldots-\gamma_{m-2}-\gamma_{m-1})^{\alpha_m}t^{\gamma k-\gamma_1-\ldots-\gamma_{m-1}-\gamma_m} =$$

$$= \left(\gamma k+s\right)^{\alpha_1}(\gamma k+s-\gamma_1)^{\alpha_2}(\gamma k+s-\gamma_1-\gamma_2)^{\alpha_3}\ldots(\gamma k+s-\gamma_1-\ldots-\gamma_{m-2}-\gamma_{m-1})^{\alpha_m}t^{\gamma(k-1)}.$$

Следовательно, коэффициенты $C(\gamma,s,i)$ будут иметь вид

$$C(\gamma,s,i)=\prod_{k=1}^{i}\left(\gamma k+s\right)^{\alpha_1}(\gamma k+s-\gamma_1)^{\alpha_2}(\gamma k+s-\gamma_1-\gamma_2)^{\alpha_3}...(\gamma k+s-\gamma_1-...-\gamma_{m-2}-\gamma_{m-1})^{\alpha_m}.$$

Упростим эти коэффициенты. Для этого обозначим частичные суммы следующим образом:

$$\sigma_0=0,\ \sigma_r=\sum_{j=1}^{r}\gamma_j,\ r=1,\dots,m-1.$$

Тогда множители внутри произведения можно переписать в виде:

$$\gamma k+s-\sigma_{r-1},\ r=1,\dots,m,$$

где для $r=m$ мы используем $\sigma_{m-1}=\gamma_1+\cdots+\gamma_{m-1}$. Отсюда для $C(\gamma,s,i)$ получаем

$$C\left(\gamma,s,i\right)=\prod_{k=1}^{i}\prod_{r=1}^{m}\left(\gamma k+s-\sigma_{r-1}\right)^{\alpha_r}=\prod_{r=1}^{m}\prod_{k=1}^{i}\left(\gamma k+s-\sigma_{r-1}\right)^{\alpha_r}.$$

Фиксируем r. Внутреннее произведение можно записать в виде:

$$\prod_{k=1}^{i}\left(\gamma k+s-\sigma_{r-1}\right)=\gamma^i\prod_{k=1}^{i}\left(k+\frac{s-\sigma_{r-1}}{\gamma}\right).$$

Используем стандартную формулу через гамма-функцию

$$\prod_{k=1}^{i}\left(k+c\right)=\frac{\Gamma\left(i+1+c\right)}{\Gamma\left(1+c\right)}$$

В нашем случае $c_r=\dfrac{s-\sigma_{r-1}}{\gamma}$. Тогда

$$\prod_{k=1}^{i}\left(\gamma k+s-\sigma_{r-1}\right)=\gamma^i\,\frac{\Gamma\left(i+1+c_r\right)}{\Gamma\left(1+c_r\right)},\ c_r=\frac{s-\sigma_{r-1}}{\gamma}.$$

Возвращаемся к $C\left(\gamma,s,i\right)$:

$$C\left(\gamma,s,i\right)=\prod_{r=1}^{m}\left[\gamma^i\,\frac{\Gamma\left(i+1+c_r\right)}{\Gamma\left(1+c_r\right)}\right]^{\alpha_r}=\gamma^{i\sum_{r=1}^{m}\alpha_r}\prod_{r=1}^{m}\left(\frac{\Gamma\left(i+1+\frac{s-\sigma_{r-1}}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s-\sigma_{r-1}}{\gamma}\right)}\right)^{\alpha_r}.$$

Если обозначим $\alpha=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j$, то

$$C(\gamma,s,i)=\gamma^{i\alpha}\prod_{r=1}^{m}\left(\frac{\Gamma\left(i+1+\frac{s-\sigma_{r-1}}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s-\sigma_{r-1}}{\gamma}\right)}\right)^{\alpha_r},\ \sigma_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-1}\gamma_j,\alpha=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j$$

Коэффициенты $C(\gamma,s,i)$ эквивалентно можно записать через символ Похгаммера $(a)_i$:

$$\prod_{k=1}^{i}(\gamma k+s-\sigma_{r-1})=\gamma^i\left(1+\frac{s-\sigma_{r-1}}{\gamma}\right)_i,$$

и тогда

$$C(\gamma,s,i)=\gamma^{i\alpha}\prod_{r=1}^{m}\left(1+\frac{s-\sigma_{r-1}}{\gamma}\right)_i^{\alpha_r}. \qquad (11)$$

Теперь пусть $s=s_r=\sigma_{r-1}=\gamma_1+\cdots+\gamma_{r-1},\ r=1,\ldots,m$. Тогда в (11) параметр в гамма-функции становится

$$c_{rj}=\frac{s_r-\sigma_{j-1}}{\gamma}=\frac{\sigma_{r-1}-\sigma_{j-1}}{\gamma},\ c_r=\frac{\sigma_{r-1}-\sigma_{r-1}}{\gamma}=0.$$

Значит соответствующий множитель упрощается:

$$\left(\frac{\Gamma(i+1+0)}{\Gamma(1+0)}\right)^{\alpha_r}=\left(\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(1)}\right)^{\alpha_r}=(i!)^{\alpha_r}.$$

Итак, при значениях $s=s_r$ коэффициент можно записать так:

$$C(\gamma,s_r,i)=\gamma^{i\alpha}(i!)^{\alpha_r}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{m}\left(\frac{\Gamma\left(i+1+\frac{\sigma_{r-1}-\sigma_{j-1}}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\sigma_{r-1}-\sigma_{j-1}}{\gamma}\right)}\right)^{\alpha_j}.$$

Эквивалентно, через символ Похгаммера $(a)_i$:

$$\prod_{k=1}^{i}(\gamma k+s_r-\sigma_{j-1})=\gamma^i\left(1+\frac{\sigma_{r-1}-\sigma_{j-1}}{\gamma}\right)_i,$$

и тогда

$$C(\gamma,s_r,i)=\gamma^{i\alpha}(i!)^{\alpha_r}\prod_{j\neq r}\left(1+\frac{\sigma_{r-1}-\sigma_{j-1}}{\gamma}\right)_i^{\alpha_j}.$$

Рассмотрим ряд

$$y_s(t)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i t^{\gamma i+s}}{C(\gamma,s,i)},\, s=0,\gamma_1,...,\gamma_1+...+\gamma_{m-1}.$$

Исследуем сходимость данного ряда. Рассмотрим общий член

$$a_i(t)=\frac{t^{\gamma i+s}}{C(\gamma,s,i)}.$$

Тогда

$$\frac{a_{i+1}(t)}{a_i(t)}=\frac{t^{\gamma(i+1)+s}}{C(\gamma,s,i+1)}\cdot\frac{C(\gamma,s,i)}{t^{\gamma i+s}}=t^{\gamma}\,\frac{C(\gamma,s,i)}{C(\gamma,s,i+1)}.$$

Но

$$\frac{C(\gamma,s,i+1)}{C(\gamma,s,i)}=\prod_{r=1}^{m}\Big(\gamma(i+1)+s-(\gamma_1+\cdots+\gamma_{r-1})\Big)^{\alpha_r}.$$

При больших i каждое слагаемое $\gamma(i+1)+s-\sigma_{r-1}\sim\gamma(i+1)$, и, более того, начиная с некоторого i_0, $\gamma(i+1)+s-\sigma_{r-1}\geq\frac{\gamma}{2}(i+1)$ для всех r. Следовательно,

$$\frac{C(\gamma,s,i+1)}{C(\gamma,s,i)}\geq\prod_{r=1}^{m}\left(\frac{\gamma}{2}(i+1)\right)^{\alpha_r}=\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\alpha}(i+1)^{\alpha}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{a_{i+1}(t)}{a_i(t)}\right|=\left|\,|t|^{\gamma}\,\frac{C(\gamma,s,i)}{C(\gamma,s,i+1)}\right|\leq|t|^{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\alpha}\frac{1}{(i+1)^{\alpha}}.$$

Правая часть $\sim$ const $\cdot(i+1)^{-\alpha}\to 0$ при $i\to\infty$, поскольку $A>0$. Значит

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}(t)}{a_i(t)}\right|=0 \text{ для любого } t\in \mathrm{C}.$$

По признаку Д'Аламбера ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)$$

сходится абсолютно при всех $t\in\mathrm{C}$. То есть $y_s(t)$ задаёт целую функцию.

Если s берётся из набора

$$s_1=0, s_2=\gamma_1,\dots,s_m=\gamma_1+\cdots+\gamma_{m-1},$$

то, как мы уже заметили раньше, один из множителей в $C(\gamma,s,i)$ становится $(i!)^{\alpha_r}$, а остальные остаются гамма-подобными. Это лишь увеличивает скорость роста $C(\gamma,s,i)$, следовательно, ещё сильнее уменьшает общий член. Так что вывод тот же: для любых допустимых параметров $\alpha_j \in (0,1), \gamma_j > 0, s > 0$ (включая специальные $s = s_r$) ряд

$$y_s(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i t^{\gamma i+s}}{C(\gamma,s,i)}$$

сходится абсолютно при всех $t \in \mathrm{C}$. Радиус сходимости (в смысле степенного ряда по степеням $t^{\gamma i+s}$) равен ∞.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть в уравнение (3) выполняются условия:

a) $f(t) = 0$;

b) s принимает один из значений: $s_0 = 0, s_1 = \gamma_1, ..., s_{m-1} = \gamma_1 + ... + \gamma_{m-1}$;

c) $\sigma_{r-1} = \sum_{j=1}^{r-1} \gamma_j, r \le m-1, \gamma = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j,\ \alpha = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j$;

Тогда

1) ряд

$$y_s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,s}(t) \equiv 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \prod_{j=1,\, j\ne r}^{m} \left(1 + \frac{\sigma_{r-1} - \sigma_{j-1}}{\gamma}\right)_i^{\alpha_j} \frac{t^{k\beta+s}}{\gamma^{i\alpha} (i!)^{\alpha_r}} \tag{12}$$

сходится равномерно на любом отрезке $[a,b] \subset (0,\infty), a,b < \infty$, к нему можно почленно применять оператор $B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}$;

2) функции $y_s(t)$ и $B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}} y_s(t)$ принадлежат классу $C(0,\infty)$;

3) сумма ряда (12), т.е. функция $y_s(t)$ при каждом значении $s_0 = 0, s_1 = \gamma_1, ..., s_{m-1} = \gamma_1 + ... + \gamma_{m-1}$ являются решениями уравнения (3).

Теперь построим решение уравнения (3) для неоднородного случая, т.е. когда $f(t) \ne 0$. Если в уравнении (3) обозначим $L_1 = B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}, L_2 = \lambda$, то это уравнение мы можем записать в виде (2). Тогда для построения решение уравнения (3) можно воспользоваться утверждением Леммы 2. Введем обозначения

$$B^{-(\alpha_j,\gamma_j)} = J^{\alpha_j} t^{\gamma_j},\ j = 1,2,...,m,\ B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})} = B^{-(\alpha_m,\gamma_m)} \cdot ... \cdot B^{-(\alpha_2,\gamma_2)} \cdot B^{-(\alpha_1,\gamma_1)}.$$

Покажем, что оператор $B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}$ является правым обратным к оператору $B^{(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}$. Для этого подействуем оператором $B^{\alpha_j,\gamma_j} \equiv t^{-\gamma_j} D^{\alpha_j}$ к функции $B^{-(\alpha_j,\gamma_j)}[f](t) \equiv J^{\alpha_j}\left[t^{\gamma_j} f\right](t)$. Заметим, что если $f(t) \in C[0,d]$ и $\gamma_j > 0$, то $t^{\gamma_j} f(t) \in C[0,d]$ и $t^{\gamma_j} f(t)\Big|_{t=0} = J^{\alpha_j}\left[t^{\gamma_j} f(t)\right]\Big|_{t=0} = 0$. Поэтому в классе таких функций операторы $B^{-(\alpha_j,\gamma_j)}$ и B^{α_j,γ_j} определены. Далее, по определению оператора $B^{\alpha_j,\gamma_j} \equiv t^{-\gamma_j} D^{\alpha_j}$ имеем

$$B^{\alpha_j,\gamma_j}\left[B^{-(\alpha_j,\gamma_j)}[f]\right](t) \equiv t^{-\gamma_j} D^{\alpha_j}\left[J^{\alpha_j}\left[t^{\gamma_j} f\right]\right](t) = t^{-\gamma_j} J^{1-\alpha_j}\left[t \frac{d}{dt} J^{\alpha_j}\left[t^{\gamma_j} f\right]\right](t) =$$

$$=\frac{t^{-\gamma_j}}{\Gamma(1-a_j)}\int_0^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{-a_j}\tau\frac{d}{d\tau}J^{\alpha_j}\left[\tau^{\gamma_j}f\right]y(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=$$

$$=t^{-\gamma_j}t\frac{d}{dt}J^1\left[\tau^{\gamma_j}f(\tau)\right](t)=t^{-\gamma_j}t^{\gamma_j}f(t)=f(t).$$

Таким образом, мы показали, что оператор $B^{-(\alpha_j,\gamma_j)}$ является к оператору B^{α_j,γ_j} правым обратным. В общем случае для операторов $B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}$ и $B^{(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}$ получаем

$$B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}\left[B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f]\right](t)=B^{\alpha_1,\gamma_1}\cdot B^{\alpha_2,\gamma_2}\cdot\ldots\cdot B^{\alpha_m,\gamma_m}\left(B^{-(\alpha_m,\gamma_m)}\cdot\ldots\cdot B^{-(\alpha_2,\gamma_2)}\cdot B^{-(\alpha_1,\gamma_1)}[f]\right)(t)=$$

$$=B^{\alpha_1,\gamma_1}\cdot B^{\alpha_2,\gamma_2}\cdot\ldots\cdot B^{\alpha_{m-1},\gamma_{m-1}}\left(B^{-(\alpha_{m-1},\gamma_{m-1})}\cdot\ldots\cdot B^{-(\alpha_2,\gamma_2)}\cdot B^{-(\alpha_1,\gamma_1)}[f]\right)(t)=\ldots=B^{\alpha_1,\gamma_1}\left[B^{-(\alpha_1,\gamma_1)}[f]\right](t)=f(t)$$

Итак, мы установили, что оператор $B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}$ является правым обратным к оператору $B^{(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}$. Отсюда следует, что функция $f_0(t)=B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t)$ является частным решением уравнения

$$B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}y(t)=f(t).$$

Рассмотрим систему функций

$$f_k(t)=\left(B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}\cdot\lambda\right)^k B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t)\equiv\lambda^k B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t), \qquad (13)$$

где $B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}$ означает $B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}=B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}\cdot\left(B^{-k(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}\right), k\geq 1$.

Если $k=0$, то $f_0(t)=B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t)$ и $L_1 f_0(t)\equiv B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}\left[B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f]\right](t)=f(t)$. При $k\geq 1$ имеем

$$L_1 f_k(t)=B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}\left[\lambda^k B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f]\right](t)=\lambda^k B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}\left[B^{-k(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f]\right](t)=$$

$$=\lambda\left(\lambda^{k-1}B^{-(k-1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}\left[f_0\right](t)\right)=\lambda f_{k-1}(t).$$

Таким образом, система функций $f_k(t)$ из равенства (13) удовлетворяет равенствам:

$$L_1 f_0(t)=f(t),\ L_1 f_k(t)=\lambda f_k(t), k\geq 1.$$

Значит, система функций $f_k(t)$ является $f(t)$-нормированной относительно пары операторов $\left(B^{\bar{\alpha},\bar{\gamma}},\lambda\right)$. Тогда по утверждению Леммы 1 функция

$$y_f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t) \qquad (14)$$

формально удовлетворяет уравнению (3).

Далее, исследуем сходимость ряда в правой части равенства (14). Для этого оценим последовательность $B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t)$.

Пусть $f(t)\in C[0,a]$. Сначала покажем, что для функции $f_0(t)=B^{-(\alpha,\beta)}f(t)$ имеет место включение:

$$f_0(t)=B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}f(t)\in C[a,b], 0<a,b<\infty .$$

Действительно, для любого $\gamma_j>0$ имеем

$$\left|J^{\alpha_j}[t^{\gamma_j}f](t)\right|=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_j)}\int_0^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha_j-1}\tau^{\gamma_j-1}f(\tau)d\tau\right|\le\|f\|_{C[a,b]}\frac{1}{\Gamma(\alpha_j)}\int_0^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha_j-1}\tau^{\gamma_j}\frac{d\tau}{\tau}=\frac{\|f\|}{\gamma_j^{\alpha_j}}t^{\gamma_j} .$$

Значит, справедливо неравенство

$$\left|J^{\alpha_j}[t^{\gamma_j}f](t)\right|\le\frac{\|f\|}{\gamma_j^{\alpha_j}}t^{\gamma_j}\Leftrightarrow\left|B^{-(\alpha_j,\gamma_j)}[f](t)\right|\le\frac{\|f\|}{\gamma_j^{\alpha_j}}t^{\gamma_j} .$$

Отсюда, для функции $B^{-(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}f(t)=B^{-(\alpha_m,\gamma_m)}\cdot\ldots\cdot B^{-(\alpha_2,\gamma_2)}\cdot B^{-(\alpha_1,\gamma_1)}f(t)$ имеем

$$\left|B^{-(\alpha_m,\gamma_m)}\cdot\ldots\cdot B^{-(\alpha_2,\gamma_2)}\cdot B^{-(\alpha_1,\gamma_1)}f(t)\right|\le\frac{\|f\|}{\gamma_1^{\alpha_1}}\left|B^{-(\alpha_m,\gamma_m)}\cdot\ldots\cdot B^{-(\alpha_3,\gamma_3)}\cdot B^{-(\alpha_2,\gamma_2)}t^{\gamma_1}\right|\le$$

$$\le\frac{\|f\|}{\gamma_1^{\alpha_1}\left(\gamma_1+\gamma_1\right)^{\alpha_2}}\left|B^{-(\alpha_m,\gamma_m)}\cdot\ldots\cdot B^{-(\alpha_3,\gamma_3)}t^{\gamma_1+\gamma_2}\right|\le\ldots\le\frac{\|f\|}{\gamma_1^{\alpha_1}\left(\gamma_1+\gamma_2\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_m\right)^{\alpha_m}}t^{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_m} .$$

Если $\sigma_j=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_j$, $j=1,\ldots,m$ и $\gamma\equiv\sigma_m=\gamma_1+\cdots+\gamma_m$, то

$$\frac{t^{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_m}}{\gamma_1^{\alpha_1}\left(\gamma_1+\gamma_2\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_m\right)^{\alpha_m}}=\frac{t^{\gamma}}{\sigma_1^{\alpha_1}\cdot\sigma_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\sigma_m^{\alpha_m}}=\frac{t^{\gamma}}{\prod_{j=1}^m\sigma_j^{\alpha_j}} .$$

Далее, для $B^{-2(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}f(t)$ имеем

$$\left|B^{-2(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}f(t)\right|\le\frac{\|f\|}{\prod_{j=1}^m\sigma_j^{\alpha_j}}\left|B^{-(\alpha_m,\gamma_m)}\cdot\ldots\cdot B^{-(\alpha_2,\gamma_2)}\cdot B^{-(\alpha_1,\gamma_1)}t^{\gamma}\right|\le$$

$$\le\frac{\|f\|}{\prod_{j=1}^m\sigma_j^{\alpha_j}}\frac{t^{2\gamma}}{\left(\gamma+\gamma_1\right)^{\alpha_1}\left(\gamma+\gamma_1+\gamma_2\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\gamma+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_m\right)^{\alpha_m}}=\frac{\|f\|}{\prod_{j=1}^m\sigma_j^{\alpha_j}\prod_{j=1}^m\left(\gamma+\sigma_j\right)^{\alpha_j}}t^{2\gamma} .$$

В следующем шаге для функции $B^{-3(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}f(t)$ имеем

$$\left|B^{-3(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}f(t)\right|\le\frac{\|f\|}{\prod_{j=1}^m\sigma_j^{\alpha_j}\prod_{j=1}^m\left(\gamma+\sigma_j\right)^{\alpha_j}\prod_{j=1}^m\left(2\gamma+\sigma_j\right)^{\alpha_j}}t^{3\gamma} .$$

Продолжая этот процесс в общем случае для функции $B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}f(t)$ получаем оценку

$$\left|B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t)\right|\le \frac{\| f\|}{\prod_{r=0}^{k}\prod_{j=1}^{m}\left(r\gamma+\sigma_j\right)^{\alpha_j}}t^{(k+1)\gamma}.$$

Тогда ряд (14) оценивается

$$\left|y_f(t)\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t)\right|\le \| f\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\prod_{r=0}^{k}\prod_{j=1}^{m}\left(r\gamma+\sigma_j\right)^{\alpha_j}}|\lambda|\, t^{\alpha(k+1)}.$$

Исследуем сходимость последнего ряда. Заметим, что $\sigma_j>0,\gamma>0$. Тогда:

$$\prod_{r=0}^{k}\prod_{j=1}^{m}\left(r\gamma+\sigma_j\right)^{\alpha_j}=\left(\prod_{j=1}^{m}\sigma_j^{\alpha_j}\right)\prod_{r=1}^{k}\prod_{j=1}^{m}\left(r\gamma+\sigma_j\right)^{\alpha_j}\ge\left(\prod_{j=1}^{m}\sigma_j^{\alpha_j}\right)\prod_{r=1}^{k}(\gamma r)^{\alpha}.$$

То есть

$$\prod_{r=0}^{k}\prod_{j=1}^{m}\left(r\gamma+\sigma_j\right)^{\alpha_j}\ge C_0\gamma^{\alpha k}(k!)^{\alpha},\ C_0:=\prod_{j=1}^{m}\sigma_j^{\alpha_j}>0.$$

Подставляем нижнюю оценку знаменателя:

$$\left|\lambda|^k\frac{\| f\|}{\prod_{r=0}^{k}\prod_{j=1}^{m}\left(r\gamma+\sigma_j\right)^{\alpha_j}}\right||t|^{(k+1)\gamma}\le\frac{\| f\|}{C_0}|t|^{\gamma}\frac{\left(|\lambda||t|^{\gamma}/\gamma^{\alpha}\right)^k}{(k!)^{\alpha}}.$$

То есть наш ряд мажорируется рядом вида $\sum_{k=0}^{\infty}M_k,\ M_k:=C\frac{\mu^k}{(k!)^{\alpha}}$, где

$$C=\frac{\| f\|}{C_0}|t|^{\gamma},\ \mu=\frac{|\lambda||t|^{\gamma}}{\gamma^{\alpha}}.$$

Рассмотрим отношение:

$$\frac{M_{k+1}}{M_k}=\frac{\mu^{k+1}/\left(k+1\right)!^{\alpha}}{\mu^k/(k!)^{\alpha}}=\frac{\mu}{(k+1)^{\alpha}}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

По признаку Д'Аламбера ряд $\sum M_k$ сходится для любого $\mu\in\mathbb{C}$, то есть для любых λ и t. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t)$$

сходится абсолютно при любых $\lambda \in \mathrm{C}$ и $t \in \mathrm{C}$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть в уравнение (3) выполняются условия $\sigma_{r-1} = \sum_{j=1}^{r-1} \gamma_j, r \le m-1,$ $\gamma = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j,\ \alpha = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j$, $f(t) \in C[0,d]$. Тогда сумма ряда

$$y_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k B^{-(k+1)(\bar{\alpha},\bar{\gamma})}[f](t)$$

является частным решением уравнения (3).

Заключение

В настоящей работе исследован новый подход к построению решений дифференциальных уравнений дробного порядка с производными в смысле Адамара–Капуто. Основное внимание уделено изучению свойств соответствующих интегро-дифференциальных операторов и установлению их обобщённой однородности, что позволило применить метод нормированных систем к построению явного вида решений однородного и неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка.

Полученные результаты сформулированы в виде теорем, устанавливающих существование и корректность построенных решений, а также принадлежность их классу непрерывных функций. Проведённые исследования расширяют возможности применения метода нормированных систем к новым типам дробных операторов и открывают перспективы для дальнейшего изучения более общих нелокальных моделей и задач Коши для уравнений дробного порядка.

Благодарности

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP26195417).

Список использованной литературы

1. Tarasov, V. E., & et al. (2019). *Handbook of fractional calculus with applications. Volume 5: Applications in physics, Part B*. De Gruyter.
2. Petras, I. (2019). *Handbook of fractional calculus with applications. Volume 6: Applications in control*. De Gruyter.
3. Singh, H., Srivastava, H. M., & Nieto, J. J. (Eds.). (2022). *Handbook of fractional calculus for engineering and science*. CRC Press.
4. Barrett, J. H. (1954). Differential equations of non-integer order. *Canadian Journal of Mathematics*, *6*(4), 529–541.
5. Luchko, Y., & Gorenflo, R. (1999). An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives. *Acta Mathematica Vietnamica*, *24*(2), 207–233.
6. Hilfer, R., Luchko, Y., & Tomovski, Z. (2009). Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, *12*(3), 299–318.
7. Kochubei, A., Luchko, Y., Tarasov, V. E., & Petráš, I. (Eds.). (2019). *Handbook of fractional calculus with applications* (Vol. 1). De Gruyter.
8. Luchko, Y. (2021). General fractional integrals and derivatives with the Sonine kernels. *Mathematics*, *9*(6), Article 594.
9. Килбас, А. А., & Сайго, М. (1997). Решение в замкнутой форме одного класса линейных дифференциальных уравнений дробного порядка. *Дифференциальные уравнения*, *33*(2), 195–204.

10. Kilbas, A. A., Saigo, M., & Saxena, R. K. (2002). Solution of Volterra integro-differential equations with generalized Mittag-Leffler function in the kernels. *The Journal of Integral Equations and Applications*, *14*(4), 377–396.
11. Псху, А. В. (2011). Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка. *Математический сборник*, *202*(4), 111–122.
12. Fernandez, A., Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2023). A new representation for the solutions of fractional differential equations with variable coefficients. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *20*(1), Article 27.
13. Бондаренко, Б. А. (1984). *Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях*. Фан.
14. Karachik, V. V. (2003). Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *287*(2), 577–592.
15. Карачик, В. В. (2014). *Метод нормированных систем функций*. Издательский центр ЮУрГУ.
16. Богатырева, Ф. Т. (2016). Начальная задача для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, *(4-1)*, 21–26.
17. Иргашев, Б. Ю. (2023). Решение задачи Коши для одного вырождающегося уравнения с дробной производной Джрбашяна-Нерсесяна. *Дифференциальные уравнения*, *59*(12), 1715–1717.
18. Turmetov, B. Kh. (2018). On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, *25*, 1–14.
19. Turmetov, B. K., Usmanov, K. I., & Nazarova, K. Z. (2021). On the operator method for solving linear integro-differential equations with fractional conformable derivatives. *Fractal and Fractional*, *5*(3), Article 109.
20. Turmetov, B., & Abdullaev, J. (2017). Analytic solutions of fractional integro-differential equations of Volterra type. *Journal of Physics: Conference Series.* 890(1), 012113).
21. Jarad, F., Ugurlu, E., & Abdeljawad, T. (2017). On the Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives. *Advances in Difference Equations*, *2017*(1), Article 8.
22. Кадиркулов, Б. Ж., & Турметов, Б. Х. (2018). Об одном методе построения решения интегро-дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Адамара. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, *(5)*, 11–21.

References

1. Tarasov, V. E., et al. (2019). *Handbook of fractional calculus with applications. Volume 5: Applications in physics, Part B*. De Gruyter.
2. Petras, I. (2019). *Handbook of fractional calculus with applications. Volume 6: Applications in control*. De Gruyter.
3. Singh, H., Srivastava, H. M., & Nieto, J. J. (Eds.). (2022). *Handbook of fractional calculus for engineering and science*. CRC Press.
4. Barrett, J. H. (1954). Differential equations of non-integer order. *Canadian Journal of Mathematics*, 6(4), 529–541.
5. Luchko, Y., & Gorenflo, R. (1999). An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives. *Acta Mathematica Vietnamica*, 24(2), 207–233.
6. Hilfer, R., Luchko, Y., & Tomovski, Z. (2009). Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 12(3), 299–318.
7. Kochubei, A., Luchko, Y., Tarasov, V. E., & Petras, I. (Eds.). (2019). *Handbook of fractional calculus with applications* (Vol. 1). De Gruyter.
8. Luchko, Y. (2021). General fractional integrals and derivatives with the Sonine kernels. *Mathematics*, 9(6), Article 594.
9. Kilbas, A. A., & Saigo, M. (1997). Reshenie v zamknutoi forme odnogo klassa lineinykh differentsial'nykh uravnenii drobnogo poryadka. *Differentsial'nye uravneniya*, 33(2), 195–204.
10. Kilbas, A. A., Saigo, M., & Saxena, R. K. (2002). Solution of Volterra integro-differential equations with generalized Mittag-Leffler function in the kernels. The Journal of Integral Equations and Applications, 14(4), 377–396.
11. Pskhu, A. V. (2011). Nachal'naya zadacha dlya lineinogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya drobnogo poryadka. *Matematicheskii sbornik*, 202(4), 111–122.
12. Fernandez, A., Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2023). A new representation for the solutions of fractional differential equations with variable coefficients. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 20(1), Article 27.
13. Bondarenko, B. A. (1984). *Operatornye algoritmy v differentsial'nykh uravneniyakh*. Fan.
14. Karachik, V. V. (2003). Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 287(2), 577–592.
15. Karachik, V. V. (2014). *Metod normirovannykh sistem funktsii*. Izdatel'skii tsentr YuUrGU.

16. Bogatyreva, F. T. (2016). Nachal'naya zadacha dlya uravneniya drobnogo poryadka s postoyannymi koeffitsientami. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki*, (4-1), 21–26.
17. Irgashev, B. Yu. (2023). Reshenie zadachi Koshi dlya odnogo vyrozhdayushchegosya uravneniya s drobnoi proizvodnoi Dzrbashyana-Nersesyana. *Differentsial'nye uravneniya*, 59(12), 1715–1717.
18. Turmetov, B. Kh. (2018). On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 25, 1–14.
19. Turmetov, B. K., Usmanov, K. I., & Nazarova, K. Z. (2021). On the operator method for solving linear integro-differential equations with fractional conformable derivatives. *Fractal and Fractional*, 5(3), Article 109.
20. Turmetov, B., & Abdullaev, J. (2017). Analytic solutions of fractional integro-differential equations of Volterra type. *Journal of Physics: Conference Series*, 890(1), 012113.
21. Jarad, F., Ugurlu, E., & Abdeljawad, T. (2017). On the Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives. *Advances in Difference Equations*, 2017(1), Article 8.
22. Kadirkulov, B. Zh., & Turmetov, B. Kh. (2018). Ob odnom metode postroeniya resheniya integro-differentsial'nogo uravneniya drobnogo poryadka s operatorom Adamara. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, (5), 11–21.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	**Екия А. Ғ. -** магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: yekiyaru@bk.ru , +7 7051669789
	Yekiya A.G. – master’s student, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan, e-mail: yekiyaru@bk.ru , +7 7051669789
	Екия А. Г. - магистрант, Международный казахско-турецкий университет им. Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: yekiyaru@bk.ru , +7 7051669789
2	**Турметов Б. Х.** – физика-математика ғылымдарының докторы, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0001-7735-6484, +7 7774487644
	Turmetov B. Kh. – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0001-7735-6484, +7 7774487644
	Турметов Б. Х. – доктор физико-математических наук, Международный казахско-турецкий университет им. Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0001-7735-6484, +7 7774487644