

Алтынбек Д.Н.¹, Смайыл Н.С.², Турметов Б.Х.³

¹докторант, М.Ауезов атындағы Оңтүстік Қазақстан зерттеу университеті,
(Қазақстан, Шымкент қ.), e-mail: dinara.altynbek@ayu.edu.kz

²магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: nurkhan.smail@ayu.edu.kz

³физика-математика ғылымдарының докторы, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

ИНВОЛЮЦИЯЛЫ ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ҮШІН КЕЙБІР БЕЙЛОКАЛДЫ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

ON THE SOLVABILITY OF SOME NONLOCAL PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION WITH INVOLUTION

Аннотация. В данной статье в классе гладких функций определяются некоторые линейные операторы с преобразованием аргументов. Эти операторы вводятся с помощью матриц отображений типа инволюции. Далее указанные операторы используются для определения нелокального аналога оператора Лапласа и соответствующих граничных операторов. Для полученного нелокального аналога уравнения Пуассона исследуются вопросы разрешимости некоторых краевых задач. Граничные условия рассматриваемых задач задаются в виде связей между значениями искомой функции в различных точках и, таким образом, относятся к задачам типа Бицадзе–Самарского. Доказываются теоремы о существовании и единственности решения исследуемых задач. Показано, что корректность рассматриваемых задач существенно зависит от коэффициентов введенных линейных операторов преобразования. С использованием функции Грина для классических задач Дирихле и Неймана построен явный вид функции Грина рассматриваемых задач. Кроме того, с помощью построенных функции Грина получены также интегральные представления решений этих задач. Кроме того, в работе рассматривается структура операторов преобразования и анализируются их свойства, влияющие на устойчивость решения. Проводится сравнение полученных результатов с классическими локальными моделями, что позволяет выявить преимущества нелокального подхода. Отмечается, что предложенные методы могут быть применены и к другим типам эллиптических уравнений, содержащим преобразование аргументов.

Ключевые слова: преобразование аргументов, нелокальная задача, инволюция, уравнение Пуассона, функция Грина, существование и единственность.

Аңдатпа. Бұл мақалада тегіс функциялар класында аргументтері түрлендірілген кейбір сызықтық операторлар анықталады. Бұл операторлар инволюция типті бейнелеулер матрицаларының көмегімен енгізіледі. Бұдан әрі аталған операторлар Лаплас операторының локалды емес аналогын және сәйкес шекаралық операторларды анықтау үшін қолданылады. Алынған Пуассон теңдеуінің локалды емес аналогы үшін кейбір шекаралық есептердің шешімділік мәселелері зерттеледі. Қарастырылып отырған есептердің шекаралық шарттары ізделінді функцияның әртүрлі нүктелердегі мәндері арасындағы байланыстар түрінде беріледі және, осылайша, Бицадзе-Самарский типті есептерге жатады. Зерттелетін есептер шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теоремалар дәлелденеді. Қарастырылып отырған есептердің дұрыс қойылуы енгізілген сызықтық түрлендіру операторларының коэффициенттеріне елеулі түрде тәуелді екені көрсетілген. Классикалық Дирихле және Нейман есептеріне арналған Грин функциясын қолдану арқылы, қарастырылып отырған есептердің Грин функциясының нақты түрі тұрғызылды. Сонымен қатар, тұрғызылған Грин функцияларының көмегімен осы есептер шешімдерінің интегралдық түрлері де алынды. Сонымен қатар, жұмыста түрлендіру операторларының құрылымы қарастырылып, шешімнің тұрақтылығына әсер ететін олардың қасиеттері талданады. Алынған нәтижелер классикалық локалды модельдермен салыстырылып, бейлокалды тәсілдің артықшылықтарын айқындауға мүмкіндік береді. Ұсынылған әдістер аргументтер түрлендіруін қамтитын басқа эллиптикалық теңдеулерге де қолданылуы мүмкін екені атап өтіледі.

Негізгі сөздер: аргументтерді түрлендіру, локалды емес есеп, инволюция, Пуассон теңдеуі, Грин функциясы, бар болуы мен жалғыздығы.

Abstract. In this paper, certain linear operators with argument transformations are defined within the class of smooth functions. These operators are introduced using matrices of involution-type mappings. Subsequently, the specified operators are used to define a non-local analogue of the Laplace operator and corresponding boundary operators. For the obtained non-local analogue of the Poisson equation, solvability questions for certain boundary value problems are investigated. The boundary conditions of the considered problems are specified as relations between the values of the unknown function at different points and, thus, belong to Bitsadze–Samarskii type problems. Theorems on the existence and uniqueness of the solution to the investigated problems are proved. It is shown that the well-posedness of the considered problems depends essentially on the coefficients of the introduced linear transformation operators. Using the Green's function for the classical Dirichlet and Neumann problems, the explicit form of the Green's function for the considered problems is constructed. Moreover, integral representations of the solutions to these problems are also obtained using the constructed Green's function. In addition, the study examines the structure of the transformation operators and analyzes their properties that influence the stability of the solution. The obtained results are compared with classical local models, which makes it possible to identify the advantages of the nonlocal approach. It is noted that the proposed methods can also be applied to other types of elliptic equations involving argument transformations.

Keywords: argument transformation, non-local problem, involution, Poisson equation, Green's function, existence and uniqueness.

Введение

Настоящая работа посвящена к исследованию вопросов разрешимости нелокальных краевых задач для дифференциального уравнения с преобразованными аргументами. В рассматриваемых задачах преобразование аргументов осуществляются и в уравнении и в граничных условиях. Эти преобразования задаются при помощи матриц отображений типа инволюции.

В работе D.Przeworska-Rolewicz [1] в ограниченной области $Q \subset R^2$ изучены некоторые нелокальные аналоги задачи Дирихле, Неймана и Робена. В частности, изучена следующая краевая задача

$$\Delta u(x) = 0, x \in Q, \sum_{k=0}^{N-1} a_k u(S_{2\pi/\alpha}^k x) = g(x), x \in \partial Q,$$

где $S_{2\pi/\alpha}^k$ является k -степенью отображений вида

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем в работах [2,3] в n -мерном случае, $n \geq 2$ были изучены краевые задачи с отображениями вида S^k , где S ортогональная матрица. Отметим также, что в работе [4] для уравнения Лапласа изучена нелокальная краевая задача содержащий иволютивный сдвиг.

Переходим к постановке задач, которые будут рассмотрены в настоящей работе. Пусть $S_1, S_2, \dots, S_m$ множество действительных симметричных коммутативных матриц $S_j S_i = S_i S_j$ такие, что $S_i^2 = E$, E -единичная матрица. В качестве примера таких матриц можно рассматривать матрицы отображений вида $S_j x = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $1 \leq j \leq n$. Если рассмотрим все возможные произведения отображений S_i , то общее количество таких отображений будет равняться 2^m . Для нумерации этих отображений мы воспользуемся двоичной системой исчисления. А именно, если i некоторый индекс, то вместе с обычной записью мы будем использовать его представление в двоичной системе исчисления:

$i = (i_n \dots i_2 i_1)_2 \equiv i_n \cdot 2^{n-1} + \dots + i_2 \cdot 2^1 + i_1 \cdot 2^0$. Используя эту запись, мы можем рассмотреть отображения вида $S_n^{i_n} \dots S_2^{i_2} S_1^{i_1} x$, где $i_k = 0$ или $i_k = 1$.

Пусть Ω и $\partial\Omega$ соответственно единичный шар и единичная сфера в $R^n, n \geq 2$, a_i и $d_i, i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ некоторые действительные числа, Δ - оператор Лапласа. Введем следующие операторы

$$L_a u(x) = \sum_{i=0}^{2^m-1} a_i (-\Delta) u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x), \quad l_d u(x) = \sum_{i=0}^{2^m-1} d_i u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x).$$

Заметим, что если $x \in \Omega$, то для любого $0 \leq i \leq 2^n - 1$ имеют место включения $S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x \in \Omega$. Аналогично, если $x \in \partial\Omega$, то $S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x \in \partial\Omega$.

Рассмотрим в области Ω следующие задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ удовлетворяющую условиям

$$L_a u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$l_d[u](x) = g(x), x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Задача 2. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ удовлетворяющую уравнению (1) и условию

$$l_d \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right] (x) = g(x), x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где ν вектор нормали, $f(x)$ и $g(x)$ заданные функции.

Отметим, что вопросы разрешимости основных краевых задач для уравнения (1) были изучены в работе [5], а спектральные вопросы для оператора L_a изучены в работе [6]. Заметим, также начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений с инволютивными преобразованиями аргументов изучены в работах [7-11].

Известно, что краевые задачи, заданные в виде связи значений искомой функции в различных точках области или границы называются задачами типа Бицадзе-Самарского. Впервые задача такого типа исследована в работе [12] и более подробно описана в работе [13]. Сведения о многочисленных приложениях нелокальных краевых задач типа Бицадзе-Самарского к задачам физики, техники и других отраслей науки изложены в работах [14,15].

Методы исследования и основные результаты

Исследование задачи 1.

Считая $u(x)$ решением задачи 1 введем функцию

$$v(x) = l_d[u](x) \equiv \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j u(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x). \quad (4)$$

Сразу заметим, что из граничного условия (2) следует

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j u(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x) \Big|_{\partial\Omega} = g(x).$$

Далее, в работе [2] доказано, что если S - ортогональная матрица и $I_S u(x) = u(Sx)$, $\Delta u(x) = r \frac{\partial u(x)}{\partial r} \equiv \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}$, то справедливы равенства

$$\Delta I_S u(x) = I_S \Delta u(x), \quad \Delta I_S u(x) = I_S \Delta u(x). \quad (5)$$

Тогда применяя к функции $v(x)$ оператор Δ получаем

$$\Delta v(x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j \Delta u(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \Delta u(x).$$

Отсюда

$$\Delta v(S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1} x) = I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \left[\sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \Delta u(x) \right].$$

Из этого равенства и учитывая уравнение (1) получаем

$$\begin{aligned} L_a[v](x) &= \sum_{i=0}^{2^m-1} a_i \Delta v(S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1} x) = \sum_{i=0}^{2^m-1} a_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \left[\sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \Delta u(x) \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \sum_{i=0}^{2^m-1} a_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \Delta u(x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \sum_{i=0}^{2^m-1} a_i \Delta u(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x) = \\ &= \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} f(x) = l_d[f](x). \end{aligned}$$

Таким образом, если функция $u(x)$ является решением задачи 1, то функция $v(x)$ из равенства (4) удовлетворяет условиям следующей задачи Дирихле:

$$L_a v(x) = l_d[f](x), x \in \Omega, v(x)|_{\partial\Omega} = g(x). \quad (6)$$

Задача (6) исследована в работе [5], где доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть коэффициенты оператора L_a такие, что для всех $k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ выполняются условия $\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0$, где Здесь $k \otimes i \equiv k_n i_n + \dots + k_1 i_1$, $(i)_2 = (i_n \dots i_1)_2$ – запись индекса i в двоичной системе счисления. Тогда для любых

$l_d[f](x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$, $0 < \lambda < 1$ решение задачи (6) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$.

Далее, из равенства (4) следует, что функции $v(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x)$, $j = 0, \dots, 2^m - 1$, могут быть линейно выражены через функции $u(S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1} x)$, $i = 0, \dots, 2^m - 1$. Эту зависимость можно выразить в следующей матричной форме

$$V = D_m U. \quad (7)$$

Здесь векторы V и U имеют вид

$$V = (v(x), \dots, v(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x), \dots, v(S_m^{1_m} \dots S_1^{1_1} x))^T, U = (u(x), \dots, u(S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1} x), \dots, u(S_m^{1_m} \dots S_1^{1_1} x))^T,$$

а D_m является матрицей порядка $2n \times 2n$.

Свойства матрицы D_m изучены в работе [5] и доказаны следующие утверждения.

Лемма 2.1. Матрица D_m из равенства (7) однозначно определяется своей первой строкой $(d_0, d_1, \dots, d_{2^m-1})$ и имеет вид

$$D_m = (d_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^m-1} = (d_{i \oplus j})_{i,j=0,\dots,2^m-1},$$

где $i \oplus j \equiv (i)_2 \oplus (j)_2 = ((i_m + j_m \bmod 2) \dots (i_1 + j_1 \bmod 2))_2$.

Лемма 2.2. Определитель матрицы $D_m(d_0, \dots, d_{2^m-1})$ имеет вид

$$\det D_m(d_0, \dots, d_{2^m-1}) = \prod_{k=0}^{2^m-1} \left(\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k_m i_m + \dots + k_1 i_1} d_i \right).$$

Лемма 2.3. Пусть коэффициенты d_i такие что выполняются условия

$$\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k_m i_m + \dots + k_1 i_1} d_i \neq 0, k = 0, 1, \dots, 2^m - 1. \quad (8)$$

Тогда матрица D_m^{-1} существует и также имеет вид (7).

Пусть $B_m(b_0, \dots, b_{2^m-1})$ обратная матрица к матрице D_m . При выполнении условия (8) это матрица существует и верно равенство $U = B_m V$. В частности, справедливо равенство

$$u(x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} b_j v(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x). \quad (9)$$

Покажем, что если функция $v(x)$ является решением задачи (6), то функция $u(x)$ из равенства (9) будет решением задачи 1.

Для этого рассмотрим функции: $w(x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j f(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x)$ и $z(x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} b_j w(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x)$.

Введем векторы

$$W = (w(x), \dots, w(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x), \dots, w(S_m^1 \dots S_1^1 x))^T, F = (f(x), \dots, f(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x), \dots, f(S_m^1 \dots S_1^1 x))^T.$$

Тогда $W = D_m F, Z = B_m W$, а значит $B_m W = B_m D_m F = F$.

Далее, применяя к функции $u(x)$ из равенства (9) оператор Δ , имеем

$$\Delta u(x) = \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i \Delta v(S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1} x) = \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \Delta v(x) \Rightarrow \Delta u(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x) = I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \left[\sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \Delta v(x) \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} L_a u(x) &= \sum_{j=0}^{2^m-1} a_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \left[\sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \Delta v(x) \right] = \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \left[\sum_{j=0}^{2^m-1} a_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \Delta v(x) \right] = \\ &= \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \left[\sum_{j=0}^{2^m-1} a_j \Delta v(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x) \right] = \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} l_d[f](x) = \\ &= \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j f(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x) = (B_m W)_{i=0} = (B_m D_m F)_{i=0} = f(x). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно показать выполнения следующих равенств:

$$\begin{aligned} l_b u(x) \Big|_{\partial\Omega} &= \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \left[\sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} v(x) \right] \Big|_{\partial\Omega} = \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \left[\sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} v(x) \right] \Big|_{\partial\Omega} = \\ &= \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \left[\sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} g(x) \right] \Big|_{\partial\Omega} = g(x). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u(x)$ из равенства (9) удовлетворяет уравнению (1) и граничному условию (2). Остается исследовать гладкость решения. Если $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, то $l_d[f](x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$. Тогда по теореме 1 при выполнении условия $\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, для функций $l_d[f](x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ и $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ решение задачи (6) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$. Кроме того, если

выполняются условия $\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k_m i_m + \dots + k_1 i_1} d_i \neq 0, k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, то с помощью функции $v(x)$ по формуле (9) можно построить функцию $u(x)$ которая удовлетворяет условиям задачи 1.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть коэффициенты a_i и b_i такие, что для всех $k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ выполняются условия $\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0$ и $\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k \otimes i} d_i \neq 0$. Тогда для любых $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega}), g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega), 0 < \lambda < 1$ решение задачи 1 существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$.

Пример 2.1. Пусть $Sx = -x$. Рассмотрим следующую однородную задачу

$$\begin{cases} a_0 \Delta u(x) + a_1 \Delta u(Sx) = 0, x \in \Omega, \\ d_0 u(x) - d_1 u(Sx) = 0, x \in \partial\Omega \end{cases}. \quad (10)$$

Пусть $H_m(x)$ - однородный гармонический полином степени m , обладающий свойством $H_m(x) = H_m(-x)$ и $u(x) = |x|^2 H_m(x)$. Для функции $u(x)$ справедливы равенства

$$\Delta u(x) = \Delta(|x|^2 H_m(x)) = 2(2m+n)H_m(x), \Delta u(Sx) = 2(2m+n)H_m(-x) = 2(2m+n)H_m(x).$$

Тогда

$$a_0 \Delta u(x) + a_1 \Delta u(Sx) = 2(2m+n)[a_0 H_m(x) + a_1 H_m(-x)] = 2(2m+n)(a_0 + a_1)H_m(x),$$

$$d_0 u(x) - d_1 u(Sx) = d_0 H_m(x) - d_1 H_m(-x) = (d_0 - d_1)H_m(x).$$

Теперь видно, что если выполняются равенства $a_0 + a_1 = 0$ и $d_0 - d_1 = 0$, то однородная задача (10) имеют ненулевые решения.

Из этого примера следует, что при нарушении условия $\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0$ и (или) $\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k \otimes i} d_i \neq 0$ однородная задача 1 может иметь бесконечно много решений.

Исследование второй задачи.

В этом разделе исследуем задачу 2. Сформулируем основное утверждение относительно задачи 2.

Теорема 3.1. Пусть $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega}), g(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega), 0 < \lambda < 1$, коэффициенты $a_i, d_i, i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ такие, что выполняются условия

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, \sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k \otimes i} d_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1.$$

Тогда для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условия

$$\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} d_i \right) \int_{\Omega} f(y) dy + \left(\sum_{i=0}^{2^m-1} a_i \right) \int_{\partial\Omega} g(y) dS_y = 0. \quad (11)$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. Предположим, что $u(x)$ является решением задачи 2. Рассмотрим функцию

$$v(x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j u(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x). \quad (12)$$

Используя второе равенство формулы (5) и граничное условие (2) для функции $v(x)$ получаем

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \Big|_{\partial\Omega} = \Lambda v(x) \Big|_{\partial\Omega} = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j \Lambda u(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x) \Big|_{\partial\Omega} = g(x).$$

Далее, применяя к равенству (12) оператор Лапласа имеем

$$(-\Delta)v(x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j (-\Delta)u(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x), (-\Delta)v(S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1} x) = I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} (-\Delta)u(x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} L_a[v](x) &= \sum_{i=0}^{2^m-1} a_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} (-\Delta)u(x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} \left[\sum_{i=0}^{2^m-1} a_i I_{S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1}} (-\Delta)u(x) \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j I_{S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1}} f(x) = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j f(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} x) = l_d[f](x). \end{aligned}$$

Таким образом, если $u(x)$ является решением задачи 2, то для функции $v(x)$ получаем следующую задачу Неймана

$$L_a[v](x) = l_d[f](x), x \in \Omega, \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = g(x). \quad (13)$$

В работе [5] доказано следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $l_d[f](x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, $g(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$, $0 < \lambda < 1$ и выполняются условия $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Тогда для разрешимости задачи (13) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\Omega} l_d[f](y) dy + \left(\sum_{i=0}^{2^m-1} a_i \right) \int_{\partial\Omega} g(y) dS_y = 0. \quad (14)$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Заметим, что для интеграла $\int_{\Omega} l_d[f](y) dy$ справедливо следующее равенство

$$\int_{\Omega} l_d[f](y) dy = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j \int_{\Omega} f(S_m^{j_m} \dots S_1^{j_1} y) dy = \sum_{j=0}^{2^m-1} d_j \int_{\Omega} f(y) dy.$$

Тогда условие разрешимости (3.4) можно переписать в виде (11).

Далее, если выполняются условия $\sum_{i=0}^{2^m-1} (-1)^{k \otimes i} d_i \neq 0$ как и в случае задачи 1, решение задачи 2 можно найти по формуле

$$u(x) = \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i v(S_m^{i_m} \dots S_1^{i_1} x), \quad (15)$$

где $b_i, i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ элементы матрицы $B(b_0, \dots, b_{2^m-1})$ обратной к матрице $D(d_0, \dots, d_{2^m-1})$.

Аналогичным образом, как в случае задачи 1, можно показать, что функция (15) удовлетворяет всем условиям задачи 2. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если в задаче 2 выполняются условия $a_i = b_i, i = 0, \dots, 2^m - 1$, то условие разрешимости задачи имеет вид

$$\int_{\Omega} f(y) dy + \int_{\partial\Omega} g(y) dS_y = 0.$$

Таким образом, в этом случае условие разрешимости задачи 2 совпадает с условием разрешимости задачи Неймана для классического уравнения Пуассона.

Заключение

В представленном исследовании разработан подход к описанию нелокальных аналогов уравнения Пуассона на основе операторов с преобразованием аргументов. Установлено, что введённые нелокальные операторы позволяют корректно формулировать новые типы краевых условий, относящихся к задачам Бицадзе–Самарского. Построены соответствующие функции Грина, что дало возможность получить явные интегральные формулы для решения поставленных задач. Полученные результаты формируют теоретическую основу для дальнейшего анализа и обобщения нелокальных моделей.

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488086).

Список использованной литературы

1. Przeworska-Rolewicz, D. (1974). Some boundary value problems with transformed argument. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 17, 451–457.
2. Karachik, V. V., & Turmetov, B. Kh. (2020). Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 50(1), 67–88. <https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942>
3. Turmetov, B. K., & Karachik, V. V. (2023). Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 68(7), 1204–1218. <https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2040021>
4. Зарубин, А.Н. (2004). Краевая задача с инволютивным сдвигом в граничном условии. *Дифференц. уравнения*, 40(10), 1423–1425.
5. Turmetov, B. K., & Karachik, V. V. (2021). On solvability of the Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Mathematics. Mechanics. Computer Sciences*, 31(4), 651–667. <https://doi.org/10.35634/vm210409>
6. Turmetov, B., & Karachik, V. (2021). On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple involution. *Symmetry*, 13, 1781. <https://doi.org/10.3390/sym13101781>
7. Baranetskij, Y. O., Demkiv, I. I., & Kaleniuk, P. I. (2024). Inverse problems of determination of the time-dependent coefficient of a parabolic equation with involution and antiperiodicity conditions. *Journal of Mathematical Sciences*, 282(5), 699–717.
8. Beroudj, M. E., Kirane, M., & Mennouni, A. (2025). An inverse problem for an evolution equation with a time fractional derivative of order involving Legendre polynomials. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – S*.
9. Bzheumikhova, O. I. (2025). Elliptic equations with involutive deviation of the argument. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 27(3), 5–20. <https://doi.org/10.46698/i3311-3054-4734-g>
10. Kozhanov, A. I., & Bzheumikhova, O. I. (2022). Elliptic and parabolic equations with involution and degeneration at higher derivatives. *Mathematics*, 10(18), 3325. <https://doi.org/10.3390/math10183325>
11. Kozhanov, A. I., & Bzheumikhova, O. I. (2024). Eigenvalues and eigenfunctions of differential operators with involution. *Siberian Mathematical Journal*, 65(5), 1139–1149.
12. Бицадзе, А.В., & Самарский, А.А. (1969). О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. *Докл. АН СССР*, 185(4), 739–740.
13. Samarskii, A. A. (1980). Some problems of the theory of differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 16(11), 1925–1935.
14. Skubachevskii, A. (2008). Nonclassical boundary value problems I. *Journal of Mathematical Sciences*, 155(2), 199–334.
15. Skubachevskii, A. (2010). Nonclassical boundary value problems II. *Journal of Mathematical Sciences*, 166(4), 377–561.

References

1. Przeworska-Rolewicz, D. (1974). Some boundary value problems with transformed argument. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 17, 451–457.
2. Karachik, V. V., & Turmetov, B. Kh. (2020). Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 50(1), 67–88. <https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942>
3. Turmetov, B. K., & Karachik, V. V. (2023). Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 68(7), 1204–1218. <https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2040021>
4. Zarubin, A. N. (2004). Kraevaya zadacha s involyutivnym sdvigom v granichnom uslovii. *Differentsial'nye Uravneniya*, 40(10), 1423–1425.
5. Turmetov, B. K., & Karachik, V. V. (2021). On solvability of the Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Mathematics. Mechanics. Computer Sciences*, 31(4), 651–667. <https://doi.org/10.35634/vm210409>
6. Turmetov, B., & Karachik, V. (2021). On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple involution. *Symmetry*, 13, 1781. <https://doi.org/10.3390/sym13101781>
7. Baranetskij, Y. O., Demkiv, I. I., & Kaleniuk, P. I. (2024). Inverse problems of determination of the time-dependent coefficient of a parabolic equation with involution and antiperiodicity conditions. *Journal of Mathematical Sciences*, 282(5), 699–717.

8. Beroudj, M. E., Kirane, M., & Mennouni, A. (2025). An inverse problem for an evolution equation with a time fractional derivative of order involving Legendre polynomials. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* – S.
9. Bzheumikhova, O. I. (2025). Elliptic equations with involutive deviation of the argument. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 27(3), 5–20. <https://doi.org/10.46698/i3311-3054-4734-g>
10. Kozhanov, A. I., & Bzheumikhova, O. I. (2022). Elliptic and parabolic equations with involution and degeneration at higher derivatives. *Mathematics*, 10(18), 3325. <https://doi.org/10.3390/math10183325>
11. Kozhanov, A. I., & Bzheumikhova, O. I. (2024). Eigenvalues and eigenfunctions of differential operators with involution. *Siberian Mathematical Journal*, 65(5), 1139–1149.
12. Bitsadze, A. V., & Samarskii, A. A. (1969). O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach. *Doklady AN SSSR*, 185(4), 739–740.
13. Samarskii, A. A. (1980). Some problems of the theory of differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 16(11), 1925–1935.
14. Skubachevskii, A. (2008). Nonclassical boundary value problems I. *Journal of Mathematical Sciences*, 155(2), 199–334.
15. Skubachevskii, A. (2010). Nonclassical boundary value problems II. *Journal of Mathematical Sciences*, 166(4), 377–561.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Алтынбек Д.Н. - докторант, М.Ауезов атындағы Оңтүстік Қазақстан зерттеу университеті, Шымкент қ., Қазақстан, e-mail: dinara.altynbek@ayu.edu.kz , +7 747 093 27 66
	Altynbek D.N. - doctoral student, M.Auezov South Kazakhstan Research University Shymkent, Kazakhstan, e-mail: dinara.altynbek@ayu.edu.kz , +7 747 093 27 66
	Алтынбек Д.Н. - докторант, Южно-Казахстанский исследовательский университет имени М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан, e-mail: dinara.altynbek@ayu.edu.kz , +7 747 093 27 66
2	Смайыл Н.С. - магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: nurkhan.smail@ayu.edu.kz , +7 708 811 61 48
	Smayl N.S. - master student, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan, e-mail: nurkhan.smail@ayu.edu.kz , +7 708 811 61 48
	Смайыл Н.С. - магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: nurkhan.smail@ayu.edu.kz , +7 708 811 61 48
3	Турметов Б.Х. - ф.-м.ғ.д., профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , +7777 448 76 44
	Turmetov B.Kh. - doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , +7 777 448 76 44
	Турметов Б.Х. - доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , +7777 448 76 44