УДК 517.956
ГРНТИ 27.31.15

https://orcid.org/0000-0001-8697-8920
А.Т. АСАНОВА[1], А. ЖОЛАМАНКЫЗЫ[1,2]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы,
[2] Казахский национальный университет имени Аль-Фараби (Алматы, Қазақстан)
e-mail: anartasan@gmail.com,

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ С ДАННЫМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАГРУЖЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящей статье рассматривается задача с данными на характеристиках для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка в прямоугольной области. Исследуется вопросы существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи, а также непрерывной зависимости решения от исходных данных. Задача с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений с непрерывными исходными данными всегда имеет единственное классическое решение. 6Если появляются нагруженные слагаемые в системе уравнений, то задача может и не быть однозначно разрешимой. Дополнительные требования к коэффициентам системы позволяют выделить класс разрешимых задач. При этом налагаемые условия должны быть проверяемы и согласовываться с теорией краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Как известно, основным методом решения задач с данными на характеристиках для системы нагруженных гиперболических уравнений является метод Римана. Однако, для его применения требуется непрерывная дифференцируемость коэффициентов при частных производных первого порядка системы уравнений. В данной статье предлагается новый подход к решению задачи с данными на характеристиках для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка на основе метода параметризации Джумабаева. Путем введения дополнительного параметра как значения искомой функции в точке нагрузки, задача сводится к эквивалентной задаче с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений с параметром. Неизвестный параметр определяется из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а неизвестная функция находится из задачи с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений при найденном параметре. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения эквивалентной задачи и доказана его сходимость. Установлены условия однозначной разрешимости задачи с данными на характеристиках для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка.

Ключевые слова: задача с данными на характеристиках, нагруженные гиперболические уравнения, метода параметризации Джумабаева, задача Коши, система обыкновенных дифференциальных уравнений, параметр.

А.Т. АСАНОВА[1], А. ЖОЛАМАНКЫЗЫ[1,2]

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы,
[2] Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті (Алматы қ., Қазақстан)
e-mail: anartasan@gmail.com,

ЕКІНШІ РЕТТІ ЖҮКТЕЛГЕН ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН МӘНДЕРІ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРДА БЕРІЛГЕН ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Бұл мақалада екінші ретті жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген есеп тік бұрышты облыста қарастырылады. Қарастырылып отырған есептің классикалық шешімінің бар болуы мен жалғыздығы, сонымен бірге шешімнің бастапқы берілімдерден үзіліссіз тәуелділігі мәселелері зерттеледі. Бастапқы берілімдері үзіліссіз болатын гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген есептің әрдайым жалғыз классикалық шешімі бар. Егер теңдеулер жүйесінде жүктелген қосылғыштар пайда болса, онда есеп бірмәнді шешілімді болмауы да мүмкін. Жүйе коэффициенттеріне қойылатын қосымша шарттар шешілімді есептер класын айқындауға мүмкіндік береді. Оған қоса қойылатын шарттар тексерілімді және жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясымен келісілуі тиіс. Жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген есептерді шешудің басты әдісі - Риман әдісі екені көпшілікке белгілі. Алайда, оны қолдану үшін теңдеулер жүйесіндегі бірінші ретті дербес туындылардың коэффициенттері үзіліссіз дифференциалдануы талап етіледі. Осы мақалада екінші ретті жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген есепті шешуге Жұмабаевтың параметрлеу әдісіне негізделген жаңа тәсіл ұсынылады. Қосымша параметрді ізделінді функцияның жүктелу нүктесіндегі мәні ретінде енгізу арқылы есеп параметрі бар гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген пара-пар есепке келтіріледі. Белгісіз параметр жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінен анықталады, ал белгісіз функция параметрдің табылған мәнінде гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген еесептен табылады. Пара-пар есептің жуық шешімін табу алгоритмі ұсынылды және оның жинақтылығы дәлелденді. Екінші ретті жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін мәндері характеристикаларда берілген есептің бірмәнді шешілімділігі шарттары орнатылды.

Кілттік сөздер: мәндері характеристикаларда берілген есеп, жүктелген гиперболалық теңдеулер, Жұмабаевтың параметрлеу әдісі, Коши есебі, жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі, параметр.

A.T. ASSANOVA[1], A. ZHOLAMANKYZY[1,2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty,
[23]Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)
e-mail: anartasan@gmail.com,

A SOLVABILITY OF A PROBLEM WITH DATA ON THE CHARACTERISTICS FOR A SYSTEM OF LOADED HYPERBOLIC EQUATIONS SECOND ORDER

In this paper we consider a problem with data on the characteristics for the system of loaded hyperbolic equations of second order on a rectangular domain. The questions of the existence and uniqueness of the classical solution of the considered problem, as well as the continuity dependence of the solution on the initial data, are investigated. Problem with data on the characteristics for the system of the hyperbolic equations with continuous initial data always has a unique classical solution. If a loaded terms appear in the system of equations, then the problem may not be uniquely solvable. Additional requirements for the coefficients of the system allow us to distinguish a class of solvable problems. In this case, the imposed conditions must be verified and consistent with the theory of boundary value problems for the loaded differential equations. It is known, the main method for solving problems with data on the characteristics for the system of loaded hyperbolic equations is the Riemann method. However, its application requires continuous differentiability of coefficients in the partial derivatives first order of the system of equations. This article proposes a new approach to solving the problem with data on the characteristics for the system of loaded hyperbolic equations second order based on the Dzhumabaev's parameterization method. By introducing an additional parameter as the value of the desired function at the load point, the problem is reduced to an equivalent problem with data on the characteristics for a system of hyperbolic equations with a parameter. The unknown parameter is determined from the Cauchy problem for the system of ordinary differential equations, and the unknown function is found from the problem with data on the characteristics for the system of hyperbolic equations for the found parameter. An algorithm for finding an approximate solution to the equivalent problem is proposed and its convergence is proved. Conditions for the unique solvability of the problem with data on the characteristics for the system of loaded hyperbolic equations of second order are established.

Key words: problem with data on the characteristics, loaded hyperbolic equations, Dzhumabaev's parameterization method, Cauchy problem, system of ordinary differential equations, parameter.

В области $\Omega = [0,T]\times[0,\omega]$ рассматривается задача с данными на характеристиках для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + C_0(t,x)u(t,x_0) + f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (2)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \qquad (3)$$

где $u(t,x) = col\big(u_1(t,x), u_2(t,x),...,u_n(t,x)\big)$ - искомая функция, $(n\times n)$ - матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $C_0(t,x)$, n – вектор - функция $f(t,x)$ непрерывны в области Ω, n – вектор - функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, n – вектор - функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, и удовлетворяют условию согласования $\psi(0) = \varphi(0)$, $0 \le x_0 \le \omega$.

Функция $u^*(t,x)$ является классическим решением задачи с данными на характеристиках для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка (1)--(3), если функция $u^*(t,x)$ непрерывна в области Ω, $\dfrac{\partial u^*(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u^*(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u^*(t,x)}{\partial t \partial x}$ являются непрерывными в области Ω, удовлетворяет системе нагруженных гиперболических уравнений второго порядка для всех $(t,x)\in\Omega$, условиям (2) и (3) на характеристиках $x=0$ и $t=0$ для всех $t\in[0,T]$ и $x\in[0,\omega]$, соответственно.

Хорошо известно, что задача с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений с непрерывными исходными данными (1)—(3) при $C_0(t,x)=0$ всегда имеет единственное классическое решение. Нагруженное слагаемое $C_0(t,x)u(t,x_0)$ в системе уравнений (1) играет существенную роль для однозначной разрешимости задачи (1)—(3). Дополнительные требования к коэффициентам системы (1) позволяют выделить класс разрешимых задач (1)—(3). При этом налагаемые условия должны быть проверяемы и согласовываться с теорией краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений [1-3]. Основным методом решения задач с данными на характеристиках для системы нагруженных гиперболических уравнений является метод Римана [1]. Однако, для применения метода Римана требуется непрерывная дифференцируемость коэффициентов $A(t,x)$ и $B(t,x)$ системы уравнений (1). Ранее в работах [4-9] были исследованы и решены различные краевые задачи для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, когда нагрузки задаются по переменной t. В отличие от работ [6-9] в данной работе рассматривается система нагруженных гиперболических уравнений, когда нагрузка задается по переменной x. Вопросы разрешимости задачи с данными на характеристиках для нагруженного гиперболического уравнения рассмотрены в [1].

В настоящей статье предлагается новый подход к решению задачи с данными на характеристиках для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка (1)-(3) на основе метода параметризации Джумабаева [10-12].

Обозначим через $\mu(t)$ значение функции $u(t,x)$ в точке $x=x_0$: $\mu(t)=u(t,x_0)$.

В задаче (1)—(3) сделаем следующую замену функции: $u(t,x)=\tilde{u}(t,x)+\mu(t)$ для всех $(t,x)\in\Omega$, здесь $\tilde{u}(t,x)$ - новая неизвестная функция.

Тогда задача (1)--(3) перейдет к следующей эквивалентной задаче с параметром для системы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+C(t,x)\tilde{u}+B(t,x)\dot{\mu}(t)+[C(t,x)+C_0(t,x)]\mu(t)+f(t,x), \qquad (4)$$

$$\tilde{u}(t,0)=\psi(t)-\mu(t), \qquad t\in[0,T], \qquad (5)$$

$$\tilde{u}(0,x)=\varphi(x)-\mu(0), \qquad x\in[0,\omega], \qquad (6)$$

$$\tilde{u}(t,x_0)=0, \qquad t\in[0,T], \qquad (7)$$

Решением задачи с параметром (4)—(7) является пара $(\tilde{u}(t,x),\mu(t))$, где функция $\tilde{u}(t,x)$ непрерывна в области Ω и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial\tilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial\tilde{u}(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\tilde{u}(t,x)}{\partial t\partial x}$ на Ω, функция $\mu(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, удовлетворяет системе гиперболических уравнений с параметром (4) для всех $(t,x)\in\Omega$, удовлетворяет условиям на характеристиках (5) для всех $t\in[0,T]$ и (6) для всех $x\in[0,\omega]$, а также дополнительному условию (7) при $x=x_0$.

Из условия согласования данных в точке $(0,x_0)$ следует: $\tilde{u}(0,x_0)=\varphi(x_0)-\mu(0)=0$.

Отсюда получим

$$\mu(0)=\varphi(x_0). \qquad (8)$$

При фиксированном $\mu(t)$ задача (4)—(6) является задачей с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений второго порядка. Соотношение (7) вместе с условием (8) позволяет определить неизвестный параметр $\mu(t)$.

Введем обозначения: $\tilde{v}(t,x)=\frac{\partial\tilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\tilde{w}(t,x)=\frac{\partial\tilde{u}(t,x)}{\partial t}$. Из условий (5), (6) вытекает $\tilde{w}(t,0)=\dot{\psi}(t)-\dot{\mu}(t)$, $t\in[0,T]$, $\tilde{v}(0,x)=\dot{\varphi}(x)$, $x\in[0,\omega]$.

Задача с данными на характеристиках (4)—(6) при фиксированном $\mu(t)$ эквивалентна системе трех интегральных уравнений:

$$\tilde{v}(t,x)=\dot{\varphi}(x)+\int_0^t\left[A(\tau,x)\tilde{v}(\tau,x)+B(\tau,x)\tilde{w}(\tau,x)+C(\tau,x)\tilde{u}(\tau,x)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t\left[B(\tau,x)\dot{\mu}(\tau)+[C(\tau,x)+C_0(\tau,x)]\mu(\tau)+f(\tau,x)\right]d\tau, \tag{9}$$

$$\tilde{w}(t,x)=\dot{\psi}(t)-\dot{\mu}(t)+\int_0^x\left[A(t,\xi)\tilde{v}(t,\xi)+B(t,\xi)\tilde{w}(t,\xi)+C(t,\xi)\tilde{u}(t,\xi)\right]d\xi+$$

$$+\int_0^x\left[B(t,\xi)\dot{\mu}(t)+[C(t,\xi)+C_0(t,\xi)]\mu(t)+f(t,\xi)\right]d\xi, \tag{10}$$

$$\tilde{u}(t,x)=\psi(t)+\varphi(x)-\varphi(0)-\mu(t)+\int_0^x\int_0^t\left[A(\tau,\xi)\tilde{v}(\tau,\xi)+B(\tau,\xi)\tilde{w}(\tau,\xi)+C(\tau,\xi)\tilde{u}(\tau,\xi)\right]d\tau d\xi+$$

$$+\int_0^x\int_0^t\left[B(\tau,\xi)\dot{\mu}(\tau)+[C(\tau,\xi)+C_0(\tau,\xi)]\mu(\tau)+f(\tau,\xi)\right]d\tau d\xi, \tag{11}$$

Продифференцируем соотношение (7) по переменной t

$$\tilde{w}(t,x_0)=0, \qquad t\in[0,T]. \tag{12}$$

Из интегрального соотношения (10) определим $\tilde{w}(t,x_0)$ и подставим в равенство (12)

$$\tilde{w}(t,x_0)=\dot{\psi}(t)-\dot{\mu}(t)+\int_0^{x_0}\left[A(t,\xi)\tilde{v}(t,\xi)+B(t,\xi)\tilde{w}(t,\xi)+C(t,\xi)\tilde{u}(t,\xi)\right]d\xi+$$

$$+\int_0^{x_0}B(t,\xi)d\xi\dot{\mu}(t)+\int_0^{x_0}\left[C(t,\xi)+C_0(t,\xi)\right]d\xi\mu(t)+\int_0^{x_0}f(t,\xi)d\xi=0. \tag{13}$$

Из равенства (13) получим

$$\left[I-\int_0^{x_0}B(t,\xi)d\xi\right]\dot{\mu}(t)=\int_0^{x_0}\left[C(t,\xi)+C_0(t,\xi)\right]d\xi\mu(t)+\dot{\psi}(t)+\int_0^{x_0}f(t,\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^{x_0}\left[A(t,\xi)\tilde{v}(t,\xi)+B(t,\xi)\tilde{w}(t,\xi)+C(t,\xi)\tilde{u}(t,\xi)\right]d\xi, \tag{14}$$

где I - единичная матрица размерности $(n\times n)$.

Система уравнений (14) вместе с условием (8) является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной при фиксированных $\tilde{v}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$, $\tilde{u}(t,x)$.

Пусть $D(t,x_0)=I-\int_0^{x_0}B(t,\xi)d\xi$.

Предположим, что матрица $D(t,x_0)$ обратима для всех $t\in[0,T]$. Тогда систему (14) можно записать в виде

$$\dot{\mu}=\tilde{A}(t,x_0)\mu+\tilde{F}(t,x_0)+\tilde{G}(t,x_0,\tilde{v},\tilde{w},\tilde{u}), \qquad t\in[0,T], \tag{15}$$

где $\widetilde{A}(t,x_0)=\left[D(t,x_0)\right]^{-1}\int\limits_0^{x_0}\left[C(t,\xi)+C_0(t,\xi)\right]d\xi$,

$$\widetilde{F}(t,x_0)=\left[D(t,x_0)\right]^{-1}\left\{\dot{\psi}(t)+\int\limits_0^{x_0}f(t,\xi)d\xi\right\},$$

$$\widetilde{G}(t,x_0,\widetilde{v},\widetilde{w},\widetilde{u})=\left[D(t,x_0)\right]^{-1}\int\limits_0^{x_0}\left[A(t,\xi)\widetilde{v}(t,\xi)+B(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)\right]d\xi .$$

При фиксированных $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$ представим решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15), (8) с помощью фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ однородной системы дифференциальных уравнений $\dot{\mu}(t)=\widetilde{A}(t,x_0)\mu(t)$.

Тогда решение задачи Коши (15), (8) имеет вид:

$$\mu(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)\varphi(x_0)+\Phi(t)\int\limits_0^t\Phi^{-1}(\tau)\widetilde{F}(\tau,x_0)d\tau+\Phi(t)\int\limits_0^t\Phi^{-1}(\tau)\widetilde{G}(\tau,x_0,\widetilde{v},\widetilde{w},\widetilde{u})d\tau . \qquad (16)$$

Построен алгоритм нахождения решения задачи с параметром (4)—(7).

Алгоритм

Шаг 0. 1) Полагая $\mu=\varphi(x_0)$, $\dot{\mu}=0$ в системе (4) и условиях (5), (6) решаем следующую задачу с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}+C(t,x)\widetilde{u}+[C(t,x)+C_0(t,x)]\varphi(x_0)+f(t,x), \qquad (17)$$

$$\widetilde{u}(t,0)=\psi(t)-\varphi(x_0),\qquad t\in[0,T], \qquad (18)$$

$$\widetilde{u}(0,x)=\varphi(x)-\varphi(x_0),\qquad x\in[0,\omega]. \qquad (19)$$

Задача (17)--(19) эквивалентна системе интегральных уравнений (9)--(11).
Из этих уравнений при $\mu=\varphi(x_0)$, $\dot{\mu}=0$ находим начальные приближения $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.
2) В системе (15) полагая $\widetilde{v}(t,x)=\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)=\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)=\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, решаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и находим $\mu^{(0)}(t)$, а из системы (15) – ее производную $\dot{\mu}^{(0)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$.
Шаг 1. 1) Полагая $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$, $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(0)}(t)$ в системе (4) и условиях (5), (6) решаем следующую задачу с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}+C(t,x)\widetilde{u}+B(t,x)\dot{\mu}^{(0)}(t)+[C(t,x)+C_0(t,x)]\mu^{(0)}(t)+f(t,x), \quad (20)$$

$$\widetilde{u}(t,0)=\psi(t)-\mu^{(0)}(t),\qquad t\in[0,T], \qquad (21)$$

$$\widetilde{u}(0,x)=\varphi(x)-\varphi(x_0),\qquad x\in[0,\omega], \qquad (22)$$

Задача (20)--(22) эквивалентна системе интегральных уравнений (9)--(11).

Из этих уравнений при $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$, $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(0)}(t)$ находим первые приближения $\tilde{v}^{(1)}(t,x)$, $\tilde{w}^{(1)}(t,x)$, $\tilde{u}^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

2) В системе (15) полагая $\tilde{v}(t,x)=\tilde{v}^{(1)}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)=\tilde{w}^{(1)}(t,x)$, $\tilde{u}(t,x)=\tilde{u}^{(1)}(t,x)$, решаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и находим $\mu^{(1)}(t)$ а из системы (15) – ее производную $\dot{\mu}^{(1)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$.

И так далее

Шаг k. 1) Полагая $\mu(t)=\mu^{(k-1)}(t)$, $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(k-1)}(t)$ в системе (4) и условиях (5), (6) решаем следующую задачу с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+C(t,x)\tilde{u}+B(t,x)\dot{\mu}^{(k-1)}(t)+[C(t,x)+C_0(t,x)]\mu^{(k-1)}(t)+f(t,x), \tag{23}$$

$$\tilde{u}(t,0)=\psi(t)-\mu^{(k-1)}(t),\qquad t\in[0,T], \tag{24}$$

$$\tilde{u}(0,x)=\varphi(x)-\varphi(x_0),\qquad x\in[0,\omega], \tag{25}$$

Задача (23)--(25) эквивалентна системе интегральных уравнений (9)--(11).

Из этих уравнений при $\mu(t)=\mu^{(k-1)}(t)$, $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(k-1)}(t)$ находим k-ые приближения $\tilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\tilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\tilde{u}^{(k)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$.

2) В системе (15) полагая $\tilde{v}(t,x)=\tilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)=\tilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\tilde{u}(t,x)=\tilde{u}^{(k)}(t,x)$, решаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и находим $\mu^{(k)}(t)$ а из системы (15) – ее производную $\dot{\mu}^{(k)}(t)$ для всех $t\in[0,T]$.

Здесь $k=1,2,...$.

На каждом шаге алгоритма: 1) Решается задача с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений относительно функции $\tilde{u}(t,x)$ (находятся также ее производные $\tilde{v}(t,x)$, $\tilde{w}(t,x)$);

2) Решается задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно функции $\mu(t)$ (находится также ее производная $\dot{\mu}(t)$).

Условия сходимости алгоритма обеспечивают предположения относительно исходных данных и обратимость матрицы $D(t,x_0)=I-\int_0^{x_0}B(t,\xi)d\xi$ для всех $t\in[0,T]$.

Указанные условия одновременно дают условия существования единственного классического решения задачи (1)—(3).

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

i) $(n\times n)$ *- матрицы* $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $C_0(t,x)$, n *– вектор - функция* $f(t,x)$ *непрерывны в области* Ω*;*

ii) n *– вектор - функция* $\psi(t)$ *непрерывно дифференцируема на* $[0,T]$, n *– вектор - функция* $\varphi(x)$ *непрерывно дифференцируема на* $[0,\omega]$, *и удовлетворяют условию согласования* $\psi(0)=\varphi(0)$*;*

iii) матрица $D(t,x_0)=I-\int_0^{x_0}B(t,\xi)d\xi$ *обратима для всех* $t\in[0,T]$, *где* $0\le x_0\le\omega$.

Тогда задача с данными на характеристиках для системы нагруженных гиперболических уравнений (1)-(3) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x)$, *определяемое как предел суммы* $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)+\mu^{(k)}(t)$ *при* $k\to\infty$, *где последовательности функций* $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$ *и* $\mu^{(k)}(t)$ *находятся из построенного выше алгоритма для всех* $(t,x)\in\Omega$ *и* $t\in[0,T]$, *соответственно.*

Доказательство теоремы проводится по схеме предложенного алгоритма.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука. 2006. - 287 с.

2 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Гылым. 2010. - 334 с.

3 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. – Москва: Наука. 2012. - 428 с.

4 Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58, No. 4. - P. 508-516.

5 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 37, No. 4. - P. 4966-4976.

6 Asanova A.T., Kadirbaeva Zh.M., Bakirova E.A. On the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. Vol. 69, No. 8. - P. 1175-1195.

7 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018, No. 72. - P. 1-8.

8 Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М. О разрешимости многоточечной задачи для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка // Математический журнал. 2018. Том.18. No.1. - С. 27-35.

9 Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order // Bulletin of the Karaganda university - Mathematics. 2020. Vol. 97, No. 1. – P. 6-16.

10 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. - P. 34-46. DOI: 10.1016/0041-5553(89)90038-4

11 Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 327. No. 1. - P. 79-108. DOI: 10.1016/j.cam.2017.06.010

12 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. No. 2. - P. 1788-1802. DOI: 10.1002/mma.6003

REFERENCES

1 Nakhushev A.M. Zadachi so cmesheniem dlia uravnenii v chastnyh proizvodnyh. – M.: Nauka. 2006. - 287 s.

2 Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. Nagruzhennye uravnenia kak vozmushenia differentcial'nyh uravnenii. - Almaty: Gylym. 2010. - 334 s.

3 Nakhushev A.M. Nagruzhennye uravnenia i ih prilozhenia. – M.: Nauka. 2012. - 428 s.

4 Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58, No. 4. - P. 508-516.

5 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 37, No. 4. - P. 4966-4976.

6 Asanova A.T., Kadirbaeva Zh.M., Bakirova E.A. On the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. Vol. 69, No. 8. - P. 1175-1195.

7 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018, No. 72. - P. 1-8.

8 Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. O razreshimosti mnogotochechnoi zadachi dlia nagruzhennogo differentsial’nogo uravnenia v chastnyh proizvodnyh tret’ego poriadka // Matematicheskii jurnal. 2018. Tom.18. No.1. - S. 27-35.

9 Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order // Bulletin of the Karaganda university - Mathematics. 2020. Vol. 97, No. 1. – P. 6-16.

10 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1989. Vol. 29. No 1. - P. 34-46. DOI: 10.1016/0041-5553(89)90038-4

11 Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 327. No. 1. - P. 79-108. DOI: 10.1016/j.cam.2017.06.010

12 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43. No. 2. - P. 1788-1802. DOI: 10.1002/mma.6003