ӘОЖ 517.925:62.50
МҒТАР 27.29.17

https://orcid.org/0000-0001-7397-8999
С.С.ЖҰМАТОВ
Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы
e-mail: sailau.math@mail.ru

ТҮРЛІ ТУРА ЕМЕС АВТОМАТТЫҚ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ БАҒДАРЛАМАЛЫҚ КӨПБЕЙНЕСІНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Мақалада автоматтық түрлі тура емес басқару жүйелерін тұрғызу есептері қарастырылады. Әрқашанда бастапқы, тұрақты әсер етуші түрткілер болуы себепті, берілген бағдарлама әрдайым дәл орындала бермейтіні белгілі. Сондықтан, бағдарламалық көпбейненің өзінің белгілібір функцияға қатысты орнықтылығын талап ету орынды. Бірінші бөлікте сыртқы жүктеуді ескеретін, тура емес басқарулы автоматтық жүйелердің орнықтылығы зерттеледі. Сыртқы жүктеуді ескеретін гидравликалық орындаушы тетіктің теңдеуі зерттеуге ыңғайлы түрде көрсетіледі. Онан кейін берілген көпбейнеге қатысты теңдеулер жүйесіне келтіріледі. Ляпунов функциясын құру арқылы канондық түрдегі жүйе үшін бағдарламалық көпбейненің абсолют орнықтылығының жеткілікті шарты белгілібір теңдік түрінде алынды. Екінші бөлікте қатаң кері байланысты тура емес басқару жүйесі қарастырылады. Түрлі Ляпунов функциялары құрылады. Абсолют орнықтылықтың алгебралық жеткілікті шарттары алынды. Олар Попов, Якубович түріндегі жиілік шарттарымен салыстырылды. Сонымен бірге, абсолют орнықтылықтың қажетті шарттары көрсетілді. Қарапайым жағдайда абсолют орнықтылықтың қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Алынған нәтижелер орнықты тура емес басқару жүйелерін тұрғызуға пайдаланыла алады.

Кілттік сөздер: бағдарламалық көпбейне, тура емес басқару жүйесі, сыртқы жүктеу, қатаң кері байланыс, Ляпунов функциясы.

С.С.ЖУМАТОВ
Институт математики и математического моделирования, Алматы
e-mail: sailau.math@mail.ru

УСТОЧИВОСТЬ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ РАЗЛИЧНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ

В данной статье рассматриваются задачи построения различных автоматических систем непрямого управления. Известно, что заданная программа не всегда точно выполняется, так как всегда имеются начальные, постоянно действующие возмущения. Поэтому, целесообразно также требовать устойчивости самого программного многообразия относительно некоторой функции. В первой части исследуется устойчивость автоматических систем непрямого управления с учетом внешней нагрузки. Уравнения гидравлического исполнительного механизма с учетом действия внешней нагрузки представлено к удобному виду исследования. Затем сводится к изучению системы уравнений относительно заданного многообразия. Путем построения функций Ляпунова для системы в канонической форме получены достаточные условия абсолютной устойчивости программного многообразия, в виде некоторого равенства. Во второй части рассматривается система непрямого управления с жесткой обратной связью. Строятся различные функции Ляпунова. Получены алгебраические достаточные условия абсолютной устойчивости. Они сравниваются с частотными условиями типа Попова, Якубовича. Также указаны необходимые условия абсолютной устойчивости. В простейшем случае получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости. Полученные результаты могут быть использованы при построении устойчивых автоматических систем непрямого управления.

Ключевые слова: программное многообразие, система непрямого управления, внешняя нагрузка, жесткая обратная связь, функция Ляпунова.

S.S. ZHUMATOV
Institute of Mathematics and Mathematical modelling, Almaty
e-mail: sailau.math@mail.ru

STABILITY OF THE PROGRAM MANIFOLD OF DIFFERENT AUTOMATIC INDIRECT CONTROL SYSTEMS

This article discusses the problems of constructing different automatic systems of indirect control. It is known that a given program is not always exactly performed, since there are always initial, constantly acting perturbations. Therefore, it is also advisable to require the stability of the program manifold itself with respect to some function. In the first part, the stability of automatic indirect control systems is investigated taking into account external load. The equations of the hydraulic actuating mechanism taking into account the action of an external load are presented for a convenient type of study. Then it comes down to studying a system of equations for a given manifold. By constructing the Lyapunov functions for the system in canonical form, sufficient conditions for the absolute stability of the program manifold are obtained in the form of some equality. In the second part, a tough feedback indirect control system is considered. Different Lyapunov functions are constructed. Algebraic sufficient conditions for absolute stability are obtained. They are compared with frequency conditions like Popov, Yakubovich. The necessary conditions for absolute stability are also indicated. In the simplest case, necessary and sufficient conditions for absolute stability are obtained. The results obtained can be used to construct stable automatic systems of indirect control.

Key words: program manifold, indirect control system, external load, tough feedback, Lyapunov function.

1. Кіріспе. Есептің қойылуы.

Жәй дифференциалдық теңдеулердің кері есебі өткен ғасырдың елуінші жылдарына тура келеді. Бұл саладағы алғашқы жұмыс Еругин Н.П. [1] мақаласы болды. Мұнда берілген интегралдық қисық бойынша дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің жиынын құру есебі қойылды және шешілді. Бұл есеп кейін Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. және олардың оқушыларының жұмыстарында гипержазықтықтардың қиылысуы арқылы берілген интегралдық көпбейне бойынша дифференциалдық теңдеулер жүйелерін құру есебіне, берілген көпбейне бойынша автоматтық басқару жүйелерін құру есебіне, динамиканың кері есептеріне, бағдарламалық қозғалыс жүйелерін құру есептеріне дамытылды [2-13]. Бұл есептер өздерінің өміршеңдңгіне байланысты математиктер мен механиктердің зор қызығушылығын туғызды. Түрлі есептерді шешу барысында бағдарламалық көпбейненің әртүрлі түрткілерге ұшырауына байланысты, оның өзінің орнықтылығын зертеу қажеттігі туындады [14-29]. Осы зерттеулерге қатысты егжей тегжейлі шолулар келесі жұмыстарда берілді[5, 15, 21, 26, 29]. Қазіргі уақытта бағдарламалық көпбейненің орнықтылығын белгілі бір көрсетеішке қатысты зерттеу жеке теорияға айналды.

Берілген жатық бағдарламалық көпбейне $\Omega(t)$ бойынша келлесі дифференциалдық теңдеуді тұрғызу есебін қарастырамыз

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

мұнда f, x - n-өлшемді векторлар, ал бағдарламалық көпбейне $\Omega(t)$ мына теңдеулермен анықталады

$$\omega(t, x) = 0\,, \tag{1.2}$$

бұл арада ω-s-өлшемді вектор өлшемді вектор $s \le n$.

R^n кеңістігінде $G(R)$ обылысын бөліп аламыз:

$$G(r) = \{(t, x) : t \ge 0 \wedge \|\omega(t, x)\| \le m < \infty\}. \tag{1.3}$$

Барлық $t \ge t_0$ болғанда, $x \in R^n$ үшін келесі шарттар орынды деп жоримыз:

1) (1.1) жүйесінің оң жағы бүкіл айнымалылар бойынша үзіліссіз және $x = x(t)$ шешімінің бар болу және жалғыздық шарттары орындалады;

2) $\omega(t, x)$ вектор-функциясы өзінің $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial t}$ дербес туындыларымен бірге $\Omega(t)$ көпбейнесін қамтитын белгілібір $G \subset R^n$ тұйық шектелген обылыста үзіліссіз;

3) $\Omega(t)$ көпбейнесінің бүкіл нүктелерінде $rank \frac{\partial \omega}{\partial x} = s$.

Берілген бағдарлама (1.2), тек жүйе күйінің векторының бастапқы мәндері $\omega(t_0, x_0) = 0$ шартарын қанағаттандырғанда ғана, дәл жүзеге асырылады. Бірақ бұл шарттар басқада түрткілеуші күштер болуы себепті әрқашан орындала бермейді. Сондықтан бағдарламалық қозғалыс жүйелерін тұрғызғанда, $\Omega(t)$ бағдарламалық көпбейнесінің де орнықтылығын ескеру керек.

$\Omega(t)$ бағдарламасы (1.1) жүйесі үшін интегралдық көпбейне болуы себепті келесі өрнек орынды

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = F(t, x, \omega), \tag{1.4}$$

мұнда $F(t, x, 0) \equiv 0$ - белгілібір Еругин [14].вектор-функциясы.

(1.1) теңдеуімен бірге келесі тура емес басқарылатын автоматты басқару жүйесін қарастырамыз

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t, x) - b_1\xi, \;\; t \in I \;= [0, \infty), \\ &\dot{\xi} = \varphi(\sigma)\cdot\psi(\nu), \;\; \sigma = p^T\omega - q\xi, \end{aligned} \quad , \tag{1.5}$$

мұнда $b_1 \in R^n$, $p \in R^s$, q тұрақты коэффициенттер, ал ξ дифференциалданатын функция және келесі шарттарды қанағаттандырады

$$\varphi(0) = 0 \wedge \varphi(\sigma)\sigma > 0 \quad \forall \sigma \ne 0\,, \tag{1.6}$$

ал $\psi(\nu)$ көбейткіші $\varphi(\sigma)$ функциясын ξ, σ координаттары өзгергенде деформациялайды. Бұл арада ν - автоматтық басқару жүйесінің күйінің күрделі үзілісті функциясы.

Қарапайым жағдайда ол мына түрде болады:

$$\nu = 1 - c\xi \, sign \, \sigma\,. \tag{1.7}$$

(1.2) көпбейнесі (1.5)-(1.7) жүйесі үшін де интегралдық көпбейне болуы үшін $\omega = 0$ болғанда $\xi = 0$ шарты орындалуы керек. Бұл сонда тек сонда ғана орындалады, егер $q \ne 0$ болатын болса.

Анықтама 1.1. *Сыртқы жүктеуді есекеретін тура емес басқару жүйесінің бағдарламалық көпбейнесі, егер ол (1.5) жүйесінің шешімдерінде кез келген* $\omega(t_0, x_0)$ *және (1.6) , (1.7) шарттарын қанағаттандыратын* $\varphi(\sigma)$, $\psi(\nu)$ *үшін толықтай орнықты болса, онда абсолют орнықты деп аталады.*

Есептің қойылуы. Сыртқы жүктеуді есекеретін тура емес басқару жүйесінің бағдарламалық көпбейнесінің ω-ға қатысты абсолют орнықты болу шартын (1.6) , (1.7) қатыстарда табу керек.

2. Гидравликалық орындаушы тетіктің сыртқы жүктеуді ескергендегі теңдеуі.

$$\dot{\xi} = \varphi(\sigma)\cdot\psi(\nu) \tag{2.1}$$

теңдеуін Летов А.М. [30] ұсынған болатын, бұл арада $\varphi(\sigma)$ функциясы σ бойынша үзіліссіз және (1.6) шартын қанағаттандырады.

Ол Хохлов В.А. [31] алған сыртқы жүктеуді ескеретін гидравликалық орындаушы тетіктің теңдеуін зерттеуге ыңғайлы түрге келтірген болатын:

$$\dot{x} = \mu\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\cdot\frac{l}{F}\sqrt{p_0 - \Delta p\, sign\,\sigma}\cdot\sigma . \tag{2.2}$$

Мұнда $\mu\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\cdot\frac{l}{F}$ - конструктивті тұрақты, μ - шығын коэффициенті, σ - золотниктің ауытқуы, $p_0 = p_k - p_a$, p_k - коректендіруші магистралдың қысымы, p_a - ағызудағы қысым, Δp - жүктеумен анықталатын, орындаушы тетіктің камераларындағы қысымдардың айырмашылығы.

$\varphi(\sigma)$ функциясы, жүктелмеген орындаушы тетіктің жылдамдығын анықтайтын $\sqrt{\frac{gp_0}{\gamma}}\cdot\frac{l}{F}\mu\sigma$ өрнегін алмастырады, ал $\psi(\nu) = \sqrt{1-\frac{\Delta p}{p_0}sign\,\sigma}$ көбейткіші жүктеудің әсерін ескереді.

Гидравликалық орындаушы тетікті дросселді басқаруды физикалық мағынасынан қарайтын болсақ позициялық жүктеу болғанда $p_0 > \Delta p\, sign\,\sigma$ әрқашанда орындалады.

Инерциялық жүктеу болғанда шектеу бар болады. Егер жүктеудің инерцисы күдікті мәннен аспаса $p_0 > \Delta p\, sign\,\sigma$ орындалады. Осы теңсіздіктің орындалу шарты және инерцияның күдікті мәні мына [31], [32] жұмыстарда анықталған.

$\psi(\nu)$ көбейткіші, ν реттеуші органның ξ , оның жылдамдығының $\dot{\xi}$ және оның үдеуінің $\ddot{\xi}$ ауытқуынан тәуелді болғанда келесі түрде анықталады:

$$\psi(\nu) = \begin{cases} 1 \;\; \textit{болады} \;\; \nu \geq 1, \\ \sqrt{\nu} \;\; \textit{болады} \;\; 0 < \nu < 1, \\ 0 \;\; \textit{болады} \;\; \nu \leq 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

бұл арада ν жалпы жағдайда келесі түрде болады [31]:

$$\nu = 1 - (a\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + c\xi)\, sign\,\sigma . \tag{2.4}$$

Мұнда a, b, c - нақты сандар, ал $sign\,\sigma$ - Кронекер функцияы:

$$sign\,\sigma = \begin{cases} +1 \;\; \textit{болады} \;\; \sigma > 0, \\ 0 \;\; \textit{болады} \;\; \sigma = 0, \\ -1 \;\; \textit{болады} \;\; \sigma < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

3. Сыртқы жүйені ескерген бақсқару жүйесінің орнықтылығы .

(1.2) көпбейнесі (1.5)-(1.7) жүйесі үшін де интегралдық көпбейне екенін есере отырып, және Еругин функциясын ω қатысты сызықты етіп алып

$$F(t, x, \omega) = -A\omega, \tag{3.1}$$

ω қатысты келесі жүйеге келеміз:

$$\begin{aligned} &\dot{\omega} = -A\omega - b\xi, \ t \in I \ = [0, \infty), \\ &\dot{\xi} = \varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu), \ \sigma = p^T \omega - q\xi, \end{aligned} \tag{3.2}$$

бұл арада $b = Hb_1$, $H = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$, ал $-A(s \times s)$ -тұрақты гурвицтік матрица, $\varphi(\sigma)$ бесызығы (1.6) шарттарын қанағаттандырады, ал $\psi(\nu)$ көбейткіші (2.3) формуласымен анықталады.

(3.2) жүйесі канондық түрге келтіріледі [30]

$$\begin{aligned} &\dot{\eta} = -\rho\eta + \varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu), \\ &\sigma = c^T \eta - g\xi, \\ &\dot{\sigma} = \gamma^T \eta - q\varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu), \end{aligned} \tag{3.4}$$

мұнда $\rho = diag(\rho_1, ..., \rho_s), c, g, q, \gamma$ –тұрақтылар.

Айта кету керек тетіктің толық тоқтау облысында $\dot{\xi} = 0$, біз (3.4) жүйесінен мына түрге келеміз

$$\begin{aligned} &\dot{\eta} = -\rho\eta, \\ &\sigma = c^T \eta - g\xi. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Жүктеу позициялық болғандағы, яғни (1.7) жағдайын қарастырамыз.

(3.4) жүйесі үшін Ляпунов функцисын келесі түрде тұрғызамыз

$$V = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} \frac{l_i \cdot l_k}{\rho_i + \rho_k} \eta_i \eta_k + \frac{1}{2} \sum_{k}^{s} L_k \eta_k^2 + \int_0^{\sigma} \varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu) d\sigma. \tag{3.6}$$

Бұл арада l_i - нақты сандар, ал L_i $(i = i1, ..., s)$ - оң нақты сандар.

V функциясының оң-анықталған болу шарты $\xi \neq 0$ болғанда, яғни орындаушы тетік жұмыс істегенде әрқашанда орындалады.

t айнымалысы бойынша V функциясының толық туындысын (3.4) жүйесіне қатысты табамыз.

$$\begin{aligned} -\dot{V} = &\left[\sum_{k=1}^{s} l_k \eta_k + \sqrt{q} \varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu) \right]^2 + \sum_{k=1}^{s} \rho_k L_k \eta_k^2 - \\ &- \left[\int_0^{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \varphi(\sigma) d\sigma \right] \varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu) > 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

$-\dot{V} > 0$ болуы үшін келесі теңдіктің орыдалуы жеткілікті:

$$L_k + 2\sqrt{q} l_k + 2 l_k \sum_{i=1}^{s} \frac{l_i}{\rho_i + \rho_k} + \gamma_k + 0 \quad (k = 1, ..., s). \tag{3.8}$$

(1.6), (1.7) және (2.3) - (2.5) өрнектерінің негізінде кез келген $\sigma \neq 0$ үшін (3.7) туындының соңғы қосындысы оң таңбада болатынын айта кету керек, яғни, $\dfrac{\partial \psi}{\partial \xi} < 0$ егер $\sigma > 0$ болса, ал $\dfrac{\partial \psi}{\partial \xi} > 0$ егер $\sigma < 0$ болса. Демек, орындаушы тетік жұмыс істеп тұрғанда $-\dot{V} > 0$ орындалады.

Сонымен келесі тұжырым орынды:

Теорема 3.1. *Егер Еругин функциясы ω-ға қатысты сызықты болса және $l_i\,(i=1,...,s)$ нақты сандары, $L_i\,(i=1,...,s)$ оң нақты сандары бар болса, жәнеде $\varphi(\sigma)$ бейсызығы (1.6), ал $\psi(\nu)$ функциясы (1.7) және (2.3) - (2.5) шарттарын қанағаттандырса, онда сыртқы жүктеуді ескеретін тура емес басқарылатын автоматты жүйенің бағдарламалық көпбейнесі ω-ға қатысты абсолют орнықты болу үшін (3.8) теңдігінің орындалуы жеткілікті.*

4. Қатаң кері байланысты басқару жүйесінің бағдарламалық көпбейнесінің абсолют орнықтылығы.

Енді берілген интегралдық көпбейнесі $\Omega(t) \equiv \omega(t,\eta) = 0$ бар, қатаң кері байланысты тура емес басқарулы жүйені, $r > 0$ жағдайында қарастырамыз

$$\begin{aligned} &\dot{\eta} = f(t,\eta) - b\xi - d\dot{\xi}; \\ &\dot{\xi} = \varphi(\sigma); \quad \sigma = c^T\omega - r\xi. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Мұнда $\eta, b, d - n$-өлшемді, $c - s$-өлшемді векторлар, $\xi, \sigma, r -$ скаляр шамалар, ал $\varphi(\sigma)$ бейсызық функциясы келесі шарттарды қанағаттандарады

$$\varphi(0) = 0, \quad k_1\sigma^2 < \sigma\varphi(\sigma) \le k_2\sigma^2 \quad \forall\sigma \ne 0\,. \tag{4.2}$$

$\Omega(t)$ (4.1) жүйенің интегралдық көпбейнесі болуы себепті, $F(t,x,\omega) = -A\omega,$ $A(s\times s)$-берілген матрица, келесі жүйені аламыз

$$\begin{aligned} &\dot{\omega} = -A\omega - Hb\xi - Hd\dot{\xi};\; H = \frac{\partial\omega}{\partial\eta}, \\ &\dot{\xi} = \varphi(\sigma); \quad \sigma = c^T\omega - r\xi. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Анықтама 4.1. *Егер $\Omega(t)$ бағдарламалық көпбейнесі, кез келген $\omega(t_0,\eta_0)$ және* (4.2) *шарттарды қанағаттандыратын $\varphi(\sigma)$ үшін* (4.1) *теңдеудің шешімдерінде толықтай орнықты болса, онда абсолют орнықты деп аталады.* .

Есептің қойылымы: $\Omega(t)$ бағдарламалық көпбейнесінің абсолют орнықтылығының шартын ω вектор-функциясына қатысты алу керек.

Орнықтылықтың жеткілікті шарты.

$$u = -A\omega - Hb\xi, \quad \sigma = c^T\omega - r\xi\,,$$

азынбаған түрлендіруінің көмегімен (3) жүйенің орнына келесі жүйені аламыз

$$\dot{u} = -Au - l\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T u - \rho\varphi(\sigma), \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \tag{4.4}$$

бұл арада $l = Hb - AHd$, $\rho = r + c^T Hd$.

A матрицасы ерекше емес болсын. Онда, ω-ны түрлендірудің бірінші теңдеуінен анықтай отырып, екінші теңдеуге қою арқылы келесі қатысты аламыз

$$\sigma = p^T u - \delta\xi\,, \tag{4.5}$$

мұнда $p^T = -c^T A^{-1}$, $\delta = c^T A^{-1}Hb + r$.

(4.5) қатыс негізінде мына теңдік орынды

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma - p^T u\right) = -\delta\varphi(\sigma).$$

(4.4) жүйе үшін Ляпунов функциясын келесі түрде тұрғызамыз

$$V = u^T Lu + \beta_1 \left(\sigma - p^T u\right)^2 + \beta \int_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma . \tag{4.6}$$

Мұнда $L = L^T > 0,\ \beta_1 > 0$.

(4.6) функцияны (4.4) жүйеге қатысты t бойынша дифференциалдап, мынаны аламыз

$$-\dot{V} = 2u^T Gu + 2u^T g_1 \varphi + 2\beta_1 \delta\sigma\varphi + g\varphi^2 , \tag{4.7}$$

мұнда

$$2G = A^T L + LA, \quad g_1 = Ll - p\beta_1\delta - \frac{1}{2}c\beta = Ll + c^T A^{-1}\beta_1\delta - \frac{1}{2}c\beta, \quad g = \beta\rho .$$

$-\dot{V} > 0$ болуы үшін , мына теңсіздіктің орындалуы жеткілікті

$$\begin{Vmatrix} 2G & g_1 \\ g_1^T & g \end{Vmatrix} > 0 \wedge \delta > 0 \wedge \beta > 0 . \tag{4.8}$$

Сонымен мына теорема дұрыс

Теорема 4.1. $-A$ *матрицасы гурвиціктік болсын,* $L = L^T > 0,\ \beta_1 > 0$ *және* $\varphi(\sigma)$ *бейсызығы* (4.2) *шарттарды қанғаттандырсын. Онда* $\Omega(t)$ *бағдарламалық көпбейнесі* ω *вектор-функциясына қатысты абсолют орнықты болу үшін* (4.8) *теңсіздіктердің орындалуы жеткілікті.*

[33] Якубович леммасының негізінде теорема 4.1 келесі жиілік теоремасына эквивалентті:

Теорема 4.2. $-A$ *матрицасы гурвициктік болсын,* $Hb = b_1, Hd = d_1$ *-тұрақтылар және*

$$\rho = r + c^T H d > 0 . \tag{4.9}$$

Онда $\Omega(t)$ *бағдарламалық көпбейнесі* $(0,k)$ $k = k_2 - k_1$ *бұрышында абсолют орнықты болу үшін* $\beta_1 \geq 0$ *және* $\beta > 0$ *сандарының болуы, жәнеде* $\forall\varpi \geq 0$ *келесі теңсіздіктің орындалуы жеткілікті*

$$\Psi(\varpi) = \beta\rho + 2\,\mathrm{Re}\left(\beta_1 \delta A^{-T} c + 2^{-1}\beta c\right)^T A_{i\varpi}^{-1}\left(Hb - AHd\right) > 0 . \tag{4.10}$$

Салдар 4.1. *Егер* $-A$ *матрицасы гурвициктік болса,* $Hb = b_1, Hd = d_1$ *-тұрақтылар және*

$$\rho = r + c^T Hd = 0 , \tag{4.11}$$

онда $\Omega(t)$ *бағдарламалық көпбейнесі* $]0,k[$ *бұрышында абсолют орнықты болу үшін келесі теңсіздіктердің орындалуы жеткілікті*

$$\Psi_0(\varpi) = \mathrm{Re}\left(\beta_1 \gamma A^{-T} \beta + 2^{-1} c\right)^T A_{i\varpi}^{-1}\left(Hb - AHd\right) > 0 , \tag{4.12}$$

$$\Psi_1(\varpi) = \lim_{\varpi \to \infty} \varpi^2 \Psi_0(\varpi) > 0 . \tag{4.13}$$

Ескерту 4.1. *Егер* b *басқару векторы мына шарттан сайланып алынса*

$$Hb = AHd \ , \tag{4.14}$$

онда $\Omega(t)$ *бағдарламалық көпбейнесінің абсолют орнықтылығының жеткілікті шарттары айтарлықтай жеңілдейді және* (4.6) *қатысты тек* (4.5) *теңсіздікке әкеледі.*

Ескерту 4.2. $\beta_1 = 0$, $Hb = b_1, \ Hd = d_1$ *-тұрақтылар болсын.*

Онда (4.8)*-ден келесі теңсіздік шығады*

$$\Psi_2(\varpi) = \rho + \operatorname{Re} c^T A_{i\varpi}^{-1}(Hb - AHd) > 0 \ \forall \varpi \ge 0 . \tag{4.15}$$

(4.15)*-ке қатысты* , $\varpi = 0$ *және* $\varpi = \infty$ *үшін*

$$\Psi_2(0) = \gamma = r + c^T A^{-1} Hb > 0 , \tag{4.16}$$

$$\Psi_2(\infty) = \rho = r + c^T Hd > 0 . \tag{4.17}$$

Енді (4.4) жүйесі үшін жалпы түрдегі Ляпунов функциясын тұрғызамыз

$$V = u^T Lu + 2x^T l_1 \sigma + l_2 \sigma^2 + \alpha \int_0^t S(\tau) d\tau + \beta \int_0^\sigma \varphi(\sigma) d\sigma , \tag{4.18}$$

мұнда $\alpha \ge 0$ және $\beta \ge 0$ - тұрақтылар; ал тұрақты матрица M :

$$M = \begin{Vmatrix} L & l_1 \\ l_1^T & l_2 \end{Vmatrix} > 0 . \tag{4.19}$$

(4.18) функцияны t уақыт бойынша (4) жүйеге қатысты дифференциалдап, мынаны аламыз

$$-\dot{V} = W = z^T Qz , \tag{4.20}$$

мұнда

$$z = \begin{Vmatrix} u \\ \sigma \\ \varphi(\sigma) \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} G & g_1 & g_3 \\ g_1^T & g_2 & g_4 \\ g_3^T & g_4^T & g_5 \end{Vmatrix} . \tag{4.21}$$

Бұл арада

Енді $g_1 = 0$ болсын. Онда (4.23)- шарттан (4.21)-ді ескере отырып мынаны аламыз

$$G > 0 \wedge g_2 > 0 \wedge g_2(Gg_5 - g_3^T g_3) - g_4^2 G > 0 . \tag{4.34}$$

Ал егер $g_1 = g_4 = 0$ болса, онда

$$G > 0 \wedge g_2 > 0 \wedge Gg_5 - g_3^T g_3 > 0 . \tag{4.35}$$

Абсолют орнықтылықтың қажетті шарты. $\Omega(t)$ бағдарламалық көпбейнесі $(0,k)$ бұрышында абсолют орнықты болуы үшін, сызықталған жүйе, яғни $\varphi(\sigma) = h\sigma$ болғанда (4.3) -тен алынған жүйе

$$\dot{u} = -Au - lh\sigma, \quad \dot{\sigma} = c^T u - \rho h\sigma, \tag{4.36}$$

барлық $h: : 0 < h < k$ өзгеруінде, асимптотикалық орнықты болу керек.

Яғни, ішінара, мына теңсіздіктер орындалуы қажет:

$$Sp(A + h\rho) = SpA + h\rho > 0 , \tag{4.37}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & b \\ -c^T & r \end{vmatrix} > 0 . \qquad (4.38)$$

Орнықтылықтың қажетті және жеткілікті шарттары.

Теорема 4.4. *Егер* $-A$ *матрицасы гурвицтік,* $Hb = b_1$, $Hd = d_1$ *-тұрақтылар және* (4.17) *теңсіздіктер орындалатын болса және де*

$$\frac{d\Psi_2}{d\varpi} \geq 0 \vee (< 0), \qquad (4.39)$$

онда $\Omega(t)$ *бағдарламалық көпбейнесі* $(0,k)$ *бұрышында абсолют орнықты болуы үшін* (4.16) *теңсіздіктердің орындалуы қажетті және жекілікті.*

Дәлелдеуі. Егер $-A$ матрицасы гурвицтік болса, онда, ішінара, келесі теңсіздік орындалады

$$|A| > 0 . \qquad (4.40)$$

(4.38) –ден мынаны аламыз

$$\Delta = |A|\left(r + c^T A^{-1} Hb\right) = |A|\gamma > 0 . \qquad (4.41)$$

(4.40) және (4,41) негізінде (4.15) теңсіздіктерді аламыз.

(4.39) шарт орындалғанда, яғни $\Psi_1(\varpi)$ функциясының монотондығы және (4.17) болжам негізінде, Попов шарты (4.15) орындалады. Демек, $\Omega(t)$ бағдарламалық көпбейнесі ω вектор-функциясына қатысты абсолют орнықты.

Қаржыландыру: Бұл нәтижелер Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2021-2023 жылдарға арналған No AP 09258966 грантымен қолдау тапты.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. 1952. Т.16, вып.6. - С. 659-670.

2 Галиуллин А. С. Некоторые вопросы устойчивости программного движения. – Казань. 1960. – 87 с.

3 Галуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986. – 224 с.

4 Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. и др. Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971.

5 Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского ун-та Дружбы народов. 1994, № 1, – С.5-21.

6 Мухарлямов, Р. Г. О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения, 1969. Т. 5, № 4. – С. 688-699.

7 Мухарлямов Р. Г О построении множества систем дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию // Дифференц. уравнения, 1971. Т.7, № 10. – С. 1825-1834.

8 Мухарлямов Р. Г. О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференц. Уравнения. 2003 Т. 39, № 3. – С. 343-353.

9 Мухарлямов Р. Г. Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства. // Прикл. мат. и механика. 2006. Т. 70, № 2. – С. 236-249.
10 Мухарлямов Р. Г. Приведение к заданной структуре уравнений динамики систем со связями // Прикл. мат. и механика. 2007. Т. 71, №.3. – С. 401-410.
11 Мухаметзянов И.А. Об устойчивости программного многообразия I // Дифференц. уравнения. 1973, № 5. – С.846-856.
12 Мухаметзянов И.А. Об устойчивости программного многообразия II // Дифференц. уравнения. 1973, № 6. – С.1037-1048.
13 Мухаметзянов И.А., Саакян А.О. Некоторые достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных интегральных многообразий. //Проблемы механики управляемого движения. – Пермь. – 1979. – С.137-144.
14 Майгарин Б.Ж. Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата: Наука. 1980. – 316 с.
15 Жуматов С.С. , Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж. Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управление движением. Алматы, Fылым, 1999. – 228 с.
16 .Zhumatov S.S. Stability of a program manifold of control systems with locally quadratic relationsw // Ukrainian Mathematical Journal. 2009. Vol.61. No 3. P.500-509. https://doi.-org/10.1007/s 11253-008-0224-y
17 Zhumatov S.S. Exponential stability of a program manifold of indirect control systems // Ukrainian Mathematical Journal. 2010. Vol.62. No 6. P.907-915. https://doi.org/10.1007/s 11253-010-0399-2
18 Tleubergenov M.T. On the inverse stochastic reconstruction problem // Differential Equations. 2014. Vol. 50. No 2. P. 274-278. https://doi.org/10.1134/s 0012266 11402 0165
19. Mukharlyamov R.G. Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Contraints// Journal of Computer and Systems Sciences International. 2015. 54, No.1., 13–26.
20.Vasilina G.K., Tleubergenov M.T. Solution of the problem of stochastic stability of an integral manifold by the second Lyapunov method // Ukrainian Mathematical Journal. 2016. Vol.68. No 1. P.14-28. https://doi.org/10.1007/s 11253-016-1205-6
21 Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. Springer International Publishing Switzerland. 2016.
22 .Zhumatov S.S. On an instability of the indirect control systems in the neighborhood of program manifold // Mathematical Journal.- Almaty, 2017. Vol.17. No 1. P.91-97.
23 Zhumatov S.S. Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold // Journal of Mathematical Sciences, 2017. 226(3), 260-269. DOI 10.1007/s10958-017-3532-z.
24 Zhumatov S.S. On a program manifrold's stability of one contour automatic control systems// Open Engineering, 2017. Vol. 7, Issue 1, Pages 479-484, ISSN (Online) 2391-5439, DOI: https://doi.org/10.1515/eng-2017-0051.
25 Samoilenko A.M., Stanzhytsskj O.M. The reduction principle in stability theory of invariant sets for stochastic Ito type systems // Differentialnye uravnenya. 2001. 53(2). – P. 282– 285.
26.Zhumatov S.S. Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems // News of the NAS RK. Physico-mathematical series. 2018. V.6. No 6. – P.37– 43.
27.Zhumatov S.S. Stability of a program manifold of indirect control systems with variable coefficients // Mathematical Journal. 2019. Vol.19. No 2. P.121-130.
28 Zhumatov S.S. On the stability of a program manifold of control systems with variable coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. 2020. Vol. 71, No 8. – P. 1202-1213 . DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-019-01707-7.

29 Zhumatov S.S. On the absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities // Mathematical Journal. 2019. Vol.20. No 4. P.35-45.
30 Летов А.М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М., Наука. 1962. 484 с.
31 Хохлов И.А. Электрогидравлический следящий привод. М., Наука. 1966.
32 Шиманов С.Н. Об устойчивости в целом одной нелинейной системы// Успехи математических наук. 1953. Т. 8. № 6(58) –С.155-158.
33 Якубович, В. А Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с нелинейными и линейными нестационарными блоками // Автоматика и телемеханика. -- 1967, № 6, -- С. 5-30.

REFERENCES

1 Erugin N.P. Postroenie vsego mnojestva sistem differentsialnyx uravneniy, imeiushix zadannuiu integralnuiu krivuiu// Prikladnaya matematika i mexanika. 1952. T.16, vyp.6. –S. 659-670.
2 Galiullin A.S. Nekotorye voprosy ustoithivosti programnogo dvijeniya.– Kazagn. 1960. – 87 s.
3 Galiullin A.S. Metody resheniya obratnyx zadath dinamiki. M.: Nauka, 1986. – 224 s.
4 Galiullin A.S., Muxametzyanov I. A., Muxarlyamov R. G. i dr. Postroyenie system programnogo dvijenya. M.: Nauka, 1971.
5 Galiullin A.S., Muxametzyanov I. A., Muxarlyamov R. G. Obzor issledovaniy po analititheskomu postroyeniiu system programnogo dvijenya // Vestnik Rossiyskogo un-ta Drujby narodov. 1994, № 1, – S.5-21.
6 Muxarlyamov R. G. O postroyenii mnojestva sistem differentsialnyx uravneniy ustoithivogo dvijeniya po integralnomu mnogoobraziiu // Differents. uravneniya, 1969. T. 5, № 4. – S. 688-699.
7 Muxarlyamov R. G. O postroyenii mnojestva sistem differentsialnyx uravneniy optimalnogo dvijeniya po integralnomu mnogoobraziiu // Differents. uravneniya. 1971. T.7, № 10. –S. 1825-1834.
8 Muxarlyamov R. G. O postroyenii mnojestva sistem differentsialnyx uravneniy dvijeniya mexanitheskix sistem // Differents. uravneniya. 2003 T. 39, № 3. – S. 343-353.
9 Muxarlyamov R. G. Stabilizatsiya dvijeniy mexanitheskix sistem na zadannyx mnogoobraziyax fazovogo prostranstva // Prikladnaya matematika i mexanika. 2006. T. 70, № 2. – S. 236-249.
10 Muxarlyamov R. G. Privedenie k zadannoi structure uravneniy dinamiki system so sviyazami // Prikladnaya matematika i mexanika. 2007. T. 71, №.3. – S. 401-410.
11 Muxametzyanov I. A. Ob ustoithivosti programnogo mnogoobraziya I // Differents. Uravneniya. 1973, № 5. – S.846-856.
12 Muxametzyanov I. A. Ob ustoithivosti programnogo mnogoobraziya II // Differents. Uravneniya. 1973, № 6. – S.1037-1048.
13 Muxametzyanov I. A., Saakyan A.O. Nekotorye dostatothnye usloviya absolutnoi ustoithivosti nelineinyx mnogoobraziy // Problemy mexaniki upravlyaemogo dvijenya. Perm. 1979. – S.137-144.
14 Maygarin B.J. Ustoithivost i kathestvo protsessov nelineinyx system avtomatitheskogo upravleniya. Alma-Ata: Nauka. 1980. – 316 s.
15 .Zhumatov S.S.. , Krementulo V.V., Maygarin B.J. Vtoroy metod Lyapunova v zadathax ustoithivosti i upravleniya dvijeniyem. Almaty, Gylym. 1999. – 228 s.

16 .Zhumatov S.S. Stability of a program manifold of control systems with locally quadratic relationsw // Ukrainian Mathematical Journal. 2009. Vol.61. No 3. P.500-509. https://doi.-org/10.1007/s 11253-008-0224-y

17 Zhumatov S.S. Exponential stability of a program manifold of indirect control systems // Ukrainian Mathematical Journal. 2010. Vol.62. No 6. P.907-915. https://doi.org/10.1007/s 11253-010-0399-2

18 Tleubergenov M.T. On the inverse stochastic reconstruction problem // Differential Equations. 2014. Vol. 50. No 2. P. 274-278. https://doi.org/10.1134/s 0012266 11402 0165

19. Mukharlyamov R.G. Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Contraints// Journal of Computer and Systems Sciences International. 2015. 54, No.1., 13–26.

20.Vasilina G.K., Tleubergenov M.T. Solution of the problem of stochastic stability of an integral manifold by the second Lyapunov method // Ukrainian Mathematical Journal. 2016. Vol.68. No 1. P.14-28. https://doi.org/10.1007/s 11253-016-1205-6

21 Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. Springer International Publishing Switzerland. 2016.

22 .Zhumatov S.S. On an instability of the indirect control systems in the neighborhood of program manifold // Mathematical Journal.- Almaty, 2017. Vol.17. No 1. P.91-97.

23 Zhumatov S.S. Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold // Journal of Mathematical Sciences, 2017. 226(3), 260-269. DOI 10.1007/s10958-017-3532-z.

24 Zhumatov S.S. On a program manifrold’s stability of one contour automatic control systems// Open Engineering, 2017. Vol. 7, Issue 1, Pages 479-484, ISSN (Online) 2391-5439, DOI: https://doi.org/10.1515/eng-2017-0051.

25 Samoilenko A.M., Stanzhytsskj O.M. The reduction principle in stability theory of invariant sets for stochastic Ito type systems // Differentialnye uravnenya. 2001. 53(2). – P. 282– 285.

26.Zhumatov S.S. Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems // News of the NAS RK. Physico-mathematical series. 2018. V.6. No 6. – P.37– 43.

27.Zhumatov S.S. Stability of a program manifold of indirect control systems with variable coefficients // Mathematical Journal. 2019. Vol.19. No 2. P.121-130.

28 Zhumatov S.S. On the stability of a program manifold of control systems with variable coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. 2020. Vol. 71, No 8. – P. 1202-1213 . DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-019-01707-7.

29 Zhumatov S.S. On the absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities // Mathematical Journal. 2019. Vol.20. No 4. P.35-45.

30 Letov A.M. Ustoithivost nelineinyx reguliruyimyx system. M., Nauka. 1962. 484 s.

31 Xoxlov I.A. Elektrogidravlitheskiy slediyashiy privod. M., Nauka. 1966.

32 Shimanov S .N. Ob ustoithivosti v tselom odnoi nelineinoi sistemy // Uspexi matematitheskix nauk. 1953. T. 8. № 6(58) –S.155-158.

33 Yakubovith V. A Thastotnye usloviya absolutnoi ustoithivosti sistem upravleniya s nelineinymi I lineinymi nestatsionarnymi blokami // Avtomatika I telemexanika. 1967, № 6, --S. 5-30.