**УДК 531.31; 519.21**
**ГРНТИ 27.29.17; 27.35.30**

**М.И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1,2], Г.К. ВАСИЛИНА[1,3], Д.Т. АЖЫМБАЕВ[4]**

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы,
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы,
[3]Алматинский университет энергетики и связи им. Г. Даукеева, Алматы,
[4]Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, Актобе
e-mail: marat207@mail.ru, v_gulmira@mail.ru, darkhan70@gmail.com

# О РЕШЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА ПО СКОРОСТЯМ

Классическая задача Гельмгольца - это задача построения по заданным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка эквивалентных дифференциальных уравнений в форме Лагранжа. В настоящей работе по уравнениям Ито второго порядка строятся эквивалентные по распределению стохастические уравнения лагранжевой структуры. Для решения стохастической задачи Гельмгольца используется метод преобразования фазового пространства. Полученные результаты иллюстрируются на двух примерах. Анализ разрешимости стохастической задачи Гельмгольца проводится в классе стохастических дифференциальных уравнений эквивалентных по распределению в отличие от работы *[Tleubergenov, M.I., Azhymbaev, D.T. On the Solvability of Stochastic Helmholtz Problem. J. Math. Sci. Vol. 253. – P.297–305 (2021)*], в которой задача Гельмгольца решается методом дополнительных переменных в классе стохастических дифференциальных уравнений эквивалентных почти наверное (п.н.). Исследование стохастической задачи Гельмгольца в классе уравнений эквивалентных по распределению позволяет существенно расширить область разрешимости этой задачи за счет возможности использовать в этом классе метода преобразования фазового пространства.

***Ключевые слова***: стохастические дифференциальные уравнения Ито, задача Гельмгольца, метод преобразования фазового пространства, эквивалентность уравнений по распределению.

**М. Ы. ТІЛЕУБЕРГЕНОВ[1,2], Г. Қ. ВАСИЛИНА[1,3], Д. Т.ӘЖЫМБАЕВ[4]**

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы,
[2]Қазақ ұлттық университеті әл-Фараби атындағы қазұу, Алматы,
[3]Г. Даукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті., Алматы,
[4]Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе
e-mail: marat207@mail.ru, v_gulmira@mail.ru, darkhan70@gmail.com

# ФАЗАЛЫҚ КЕҢІСТІКТІ ЖЫЛДАМДЫҚПЕН ТҮРЛЕНДІРУ ӘДІСІМЕН ГЕЛЬМГОЛЬЦТЫҢ СТОХАСТИКАЛЫҚ ЕСЕБІН ШЕШУ ТУРАЛЫ

Гельмгольцтың классикалық есебі-Лагранж түрінде эквивалентті дифференциалдық теңдеулерді екінші ретті берілген қарапайым дифференциалдық теңдеулеріне сәйкес құру

есебі болып табылады. Бұл жұмыста екінші ретті Ито теңдеулері бойынша Лагранж құрылымының баламалы стохастикалық теңдеулері құрылады. Гельмгольцтың стохастикалық есебін шешу үшін фазалық кеңістікті түрлендіру әдісі қолданылады. Алынған нәтижелер екі мысалда көрсетілген. Гельмгольцтың стохастикалық есебінің шешімділігіне талдау үлестіру бойынша эквивалентті стохастикалық дифференциалдық теңдеулер класында [Tleubergenov, M. I., Azhymbaev, D. T. On the Solvability of stochastic Helmholtz Problem] жұмысына қатысты жүргізіледі. J. Math. Sci. Vol. 253. - P. 297-305 (2021)], онда Гельмгольц есебі стохастикалық дифференциалдық теңдеулер класындағы қосымша айнымалылар әдісімен шешіледі (п.ғ. д.).
Гельмгольцтың стохастикалық есебін эквивалентті үлестіру теңдеулері класында зерттеу осы кластағы фазалық кеңістікті түрлендіру әдісін қолдану мүмкіндігіне байланысты осы мәселенің шешілу аймағын едәуір кеңейтуге мүмкіндік береді.

**Түйінді сөздер**: стохастикалық дифференциалдық теңдеулер, Гельмгольц есебі, фазалық кеңістікті түрлендіру әдісі, үлестіру теңдеулерінің эквиваленттілігі.

**M. I. TLEUBERGENOV[1,2], G. K. VASILINA[1,3], D. T. AZHYMBAYEV[4]**

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty,
[2]Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty,
[3]Almaty University of Energy and Communications named after G. Daukeev, Almaty,
[4]Aktyubinsk Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe
e-mail: marat207@mail.ru, v_gulmira@mail.ru, darkhan70@gmail.com

## ON THE SOLUTION OF THE STOCHASTIC HELMHOLTZ PROBLEM BY THE METHOD OF PHASE SPACE'S TRANSFORMATION BY VELOCITIES

The classical Helmholtz problem is the problem of constructing equivalent Lagrange-shaped differential equations from given second-order ordinary differential equations. In this paper, stochastic equations of the Lagrangian structure, equivalent in distribution, are constructed using the second-order Ito equations. The phase space transformation method is used to solve the stochastic Helmholtz problem. The results obtained are illustrated by two examples. The solvability analysis of the stochastic Helmholtz problem is carried out in the class of stochastic differential equations equivalent in distribution, in contrast to the work [*Tleubergenov, M. I., Azhymbaev, D. T. On the Solvability of Stochastic Helmholtz Problem. J. Math. Sci. Vol. 253. – P. 297–305 (2021)*], in which the Helmholtz problem is solved by the method of addi-tional variables in the class of stochastic differential equations equivalent almost surely (a.s.). The study of the stochastic Helmholtz problem in the class of equations equivalent in distribution allows us to significantly expand the domain of solvability of this problem due to the possibility of using the phase space transformation method in this class.

**Keywords**: stochastic differential equations, Helmholtz problem, phase space transformation method, equivalence of equations in distribution.

Теория обратных задач динамики в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1-4] восходит к работе Еругина [5], где по заданной интегральной кривой строится множество ОДУ. Галиуллиным [1] предложена классификация основных видов обратных задач динамики в классе ОДУ, а также разработаны общие методы их решения. Разрешимость обратных задач динамики в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито исследуется в [6-11].

Новый этап исследования обратных задач дифференциальных систем тесно связан с возросшим в последние десятилетия интересом к исследованию задачи Гельмгольца [12] (обзор работ по обратным задачам динамики, связанными с задачей Гельмгольца, см., например, в монографии [13]). Майер [14] и Суслов [15] независимо друг от друга показали, что классические условия Гельмгольца перехода от ньютоновых уравнений к эквивалентным лагранжевым являются не только необходимыми, но и достаточными условиями.

И решение задачи Гельмгольца [12] в более широком классе дифференциальных уравнений позволяет распространить на этот класс уравнений хорошо развитые математические методы классической механики. Отметим в этой связи двухтомную монографию Р. М. Сантилли [16,17], которая по разнообразию аспектов исследования задачи Гельмгольца и полноте изложения материала занимает особое место. Она посвящена задаче представления ОДУ второго порядка в виде уравнений Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа.

С дальнейшими исследованиями задачи Гельмгольца можно ознакомиться по работам [16,17,18], в которых приводятся как собственные исследования, в основном, в классе ОДУ и ДУЧП (дифференциальных уравнений в частных производных), так и проведен исторический обзор по развитию и обобщению указанной задачи.

Пусть заданы уравнения

$$d\dot{y} = Y_1(y,\dot{y},t)dt + Y_2(y,\dot{y},t)d\xi, \tag{a}$$

$$d\dot{z} = Z_1(z,\dot{z},t)dt + Z_2(z,\dot{z},t)d\xi, \tag{b}$$

**Определение 1** [19]. Будем говорить, что уравнения (a) и (b) эквивалентны почти наверное (п.н.), если из $y(t_0) = z(t_0)$, $\dot{y}(t_0) = \dot{z}(t_0)$ п.н. следует $y(t,t_0,y_0,\dot{y}_0) = z(t,t_0,z_0,\dot{z}_0)$, $\dot{y}(t,t_0,y_0,\dot{y}_0) = \dot{z}(t,t_0,z_0,\dot{z}_0)$ п.н. при всех $t \ge t_0$.

А эквивалентность уравнений (a) и (b) по распределению понимается в смысле следующего определения.

**Определение 2** [19]. *Будем говорить, что уравнения* $(a)$ *и* $(b)$ $d$ *-эквивалентны (или эквивалентны по распределению), если для* $(y(t_0)^T, \dot{y}(t_0)^T)^T$ *и* $(z(t_0)^T, \dot{z}(t_0)^T)^T$ *с одинаковыми начальными распределениями на* $R^{2n}$ *совпадают законы распределения процессов* $(y(t)^T, \dot{y}(t)^T)^T$ *и* $(z(t)^T, \dot{z}(t)^T)^T$ *в пространстве* $W^{2n} = C([0,\infty) \to R^{2n})$.

Приведем, следуя R.M. Santilli [15], необходимое в дальнейшем следующее определение с учетом действия случайных возмущающих сил.

**Определение 3**. *Назовем кинематической формой уравнения Ньютона при наличии случайных возмущений уравнение вида*

$$d\dot{x}_\nu = F_\nu(x,\dot{x},t)dt + \sigma_{\nu j}(x,\dot{x},t)d\xi^j, \quad \left(\nu = \overline{1,n},\ j = \overline{1,r}\right). \tag{1}$$

*А уравнение вида*

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k}dt = \sigma'_{kj}(x,\dot{x},t)d\xi^j, \qquad \left(k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,r}\right) \tag{2}$$

*назовем стохастическим уравнением лагранжевой структуры.*

В дальнейшем будем предполагать, что функции, входящие в приведенные выше уравнения, обладают необходимой гладкостью и удовлетворяют теореме существования и единственности решения задачи Коши в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито [19].

Здесь $\{\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_r(t,\omega)\}$ представляют систему случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [20], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(y)P^0(t,dy)$, где $\xi = (\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_r(t,\omega))^T$, $\xi_0 -$ векторный винеровский процесс; $P^0$ – пуассоновский процесс; $P^0(t,dy)$ – число скачков процесса $P^0$ в интервале [0, $t$], попадающих на множество $dy$; $c(y)$ - векторная функция, отображающая пространство $R^{2n}$ в пространство значений $R^r$ процесса $\xi(t)$ при любом $t$.

Уравнения (1), (2) являются стохастическими уравнениями второго порядка типа Ито, а под $d\xi^j$ понимаем дифференциал в смысле Ито [21].

Указанная задача при отсутствии случайных возмущений $\sigma_{\nu j} \equiv \sigma'_{\nu j} \equiv 0$, $\nu = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,r}$ рассмотрена в [15]. Здесь и далее по повторяющимся индексам сомножителей предполагается суммирование. Индексы $i,k,\nu$ изменяются от 1 до $n$, а индекс $j$ - от 1 до r.

Уравнениями вида (1) или (2) описываются важные в приложении модели механических систем, учитывающие воздействие внешних случайных сил: например, движение искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил [22], или флуктуационный дрейф тяжелого гироскопа в кардановом подвесе [23] и др.

**Постановка задачи.** Пусть задана система стохастических уравнений Ито второго порядка вида (1). Требуется привести систему уравнений (1) к эквивалентным уравнениям лагранжевой структуры.

Рассмотрим преобразование фазового пространства по скоростям

$$\tilde{\dot{x}}_i = \varphi_i(x,\dot{x},t) \tag{3}$$

в предположении, что $\varphi_i \in C^{121}_{x\,\dot{x}\,t}$ и существует обратное преобразование $\psi_\nu = \psi_\nu(x,\tilde{\dot{x}},t) \in C^{121}_{x\,\dot{x}\,t}$ такое, что

$$\dot{x}_\nu = \psi_\nu(x,\tilde{\dot{x}},t). \tag{4}$$

Тогда в силу правила стохастического дифференцирования Ито [20] вычислим дифференциал

$$d\tilde{\dot{x}}_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{x}_k}d\dot{x}_k + \frac{1}{2}\sigma_{lj}\sigma_{kj}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\dot{x}_l\partial\dot{x}_k}dt + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{x}_k}\sigma_{kj}d\xi$$

и, следовательно, имеет место соотношение

$$d\tilde{\dot{x}}_i = \tilde{F}_i(x,\tilde{\dot{x}},t)dt + \tilde{\sigma}_{ij}(x,\tilde{\dot{x}},t)d\xi^j, \tag{5}$$

где $\tilde{F}_i = \left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{x}_k}F_k + \frac{1}{2}\sigma_{lj}\sigma_{kj}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\dot{x}_l\partial\dot{x}_k}\right]\Bigg|_{\dot{x}_\nu=\psi_\nu(x,\tilde{\dot{x}},t)}$,

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{x}_\nu}\sigma_{\nu j}\Bigg|_{\dot{x}_\nu=\psi_\nu(x,\tilde{\dot{x}},t)}.$$

Предположим далее, что функции $\varphi_i$ при заданных $F_i$ и $\sigma_{ij}$ таковы, что в пространстве $(x,\tilde{\dot{x}})$ относительно переменных $\tilde{F}_i$ и $\tilde{\sigma}_{ij}$ имеют место соотношения (условия Гельмгольца [15]):

$$\frac{\partial\tilde{F}_\nu}{\partial\tilde{\dot{x}}_\mu} + \frac{\partial\tilde{F}_\mu}{\partial\tilde{\dot{x}}_\nu} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{F}_\nu}{\partial\tilde{\dot{x}}_\mu\partial\tilde{\dot{x}}_k} - \frac{\partial^2\tilde{F}_\mu}{\partial\tilde{\dot{x}}_\nu\partial\tilde{\dot{x}}_k} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\tilde{F}_\nu}{\partial\dot{\tilde{x}}_\mu}-\frac{\partial\tilde{F}_\mu}{\partial\dot{\tilde{x}}_\nu}=\frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot{\tilde{x}}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\}(\frac{\partial\tilde{F}_\nu}{\partial\dot{\tilde{x}}_\mu}-\frac{\partial\tilde{F}_\mu}{\partial\dot{\tilde{x}}_\nu}), \quad (8)$$

которые обеспечивают существование некоторого $\tilde{L}=\tilde{L}(x,\dot{\tilde{x}},t)$ и переход от уравнений (6) к уравнениям лагранжевой структуры

$$d(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\tilde{x}}_i})-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial x_i}dt=\tilde{\sigma}_{ij}(x,\dot{\tilde{x}},t)d\xi^j. \quad (9)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 1.** *Пусть существует преобразование (3)* $\varphi_i=\varphi_i(x,\dot{x},t)\in C^{121}_{x\dot{x}t}$, *имеющее обратное (4)* $\psi_\nu=\psi_\nu(x,\dot{x},t)\in C^{121}_{x\dot{x}t}$ *и удовлетворяющее условиям (7)-(9).*

*Тогда заданное в пространстве* $(x,\dot{x})$ *уравнение (1) эквивалентно по распределению уравнению лагранжевой структуры (10) в пространстве* $(x,\dot{\tilde{x}})$.

Замечание 1.1. Теоремой 1 удобно воспользоваться, если в задаче прямого представления функции $F_i$ не удовлетворяют условиям Гельмгольца [20] в пространстве $(x,\dot{x})$. А в случае, когда $F_i$ удовлетворяют классическим условиям Гельмгольца, $\varphi_i$ достаточно положить равными $\varphi_i\equiv\dot{x}_i$ и условия (6)-(8) в этом случае совпадут с условиями Гельмгольца в пространстве $(x,\dot{x})$.

**Пример 1.** Рассмотрим плоское движение симметричного спутника по круговой орбите в предположении изменения тангажа под действием сил тяготения и аэродинамических сил [22]

$$\ddot{\theta}=f(\theta,\dot{\theta})+\sigma(\theta,\dot{\theta})\dot{\xi},(2.100) \quad (10)$$

где $\theta$ - угол тангажа, а функции $f$ and $\sigma$ имеют вид

$$f=Ql\sin2\theta-Q[g(\theta)+\eta\dot{\theta}],\sigma=Q\delta[g(\theta)+\eta\dot{\theta}].(2.101) \quad (11)$$

Пусть преобразование фазового пространства (3) имеет вид $\dot{\tilde{\theta}}=\varphi(\theta,\dot{\theta})=\dot{\theta}-a\theta$, где $a$ - пока неизвестный коэффициент. Используя правило стохастического дифференцирования Ито, а также выражения $f$ и $\sigma$ из (11) найдем коэффициенты $\tilde{f}$ и $\tilde{\sigma}$ преобразованного уравнения $\ddot{\tilde{\theta}}=\tilde{f}(\theta,\dot{\theta})+\tilde{\sigma}(\theta,\dot{\theta})\dot{\xi}$. А из требования $\partial\tilde{f}/\partial\dot{\tilde{\theta}}=0$ (условие Гельмгольца в одномерном случае [15]) определим $a=-Q\eta$. В итоге уравнение (10) преобразуется к виду

$$\ddot{\tilde{\theta}}=Qlsin2\theta-Qg(\theta)+Q\delta[g(\theta)+\eta(\dot{\tilde{\theta}}-Q\eta\theta)]\dot{\xi}.(2.102) \quad (12)$$

Функцию Лагранжа будем искать в виде $L=\frac{1}{2}\dot{\tilde{\theta}}^2+W(\theta)=\frac{1}{2}(\dot{\theta}+Q\eta\theta)^2+W(\theta)$ и определим $W(\theta)$ так, чтобы уравнение (12) было эквивалентно по распределению уравнению лагранжевой структуры.

После несложных вычислений получим, что стохастическое уравнение лагранжевой структуры с заданным $L$ эквивалентно уравнению $\ddot{\tilde{\theta}}=Q^2\eta^2\theta+W_\theta+\sigma'\dot{\xi}$. Следовательно, сравнивая полученное уравнение с уравнением (12), определим $W(\theta)$ как $W=-\frac{1}{2}Qlcos2\theta-QG(\theta)-Q\eta\theta-\frac{1}{2}Q^2\eta^2\theta^2$, где $G=\int g(\theta)d\theta$, и в предположении $\sigma'=$ $=\sigma=Q\delta[g(\theta)+\eta\dot{\theta}]$ приходим по теореме 1 к выводу, что преобразование $\varphi$ с $a=-Q\eta$

обеспечивает существование лагранжиана $L = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\theta}}^2 - Q(\frac{1}{2}lcos2\theta + G(\theta) + \eta\theta + \frac{1}{2}Q\eta^2\theta^2)$ и построение уравнения лагранжевой структуры вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\tilde{\dot{\theta}}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \tilde{\sigma}(\theta,\tilde{\dot{\theta}})\dot{\xi}$$

эквивалентного по распределению уравнению (10).

**Пример 2.** Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение внутреннего кольца гироскопа в кардановом подвесе [23]

$$\ddot{\beta} + 2\nu\dot{\beta} + f(\beta) = \dot{\xi}, (2.109) \qquad (13)$$

где $\beta$ - угол поворота внутреннего кольца. Здесь коэффициент при белом шуме $\sigma = 1$.

Аналогично примеру 1 преобразование фазового пространства определим в виде $\tilde{\dot{\beta}} = = \phi_i(\beta,\dot{\beta}) = \dot{\beta} - a\beta$. Условия Гельмгольца будут выполняться при $a = -2\nu$ и уравнение (13) примет вид

$$\tilde{\dot{\beta}} = -g(\beta) + \dot{\xi}.(2.110) \qquad (14)$$

Положим функцию Лагранжа равной $L = \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 + \gamma(\beta)$ и аналогично примеру 1 определим $\gamma$ и $\sigma'$ в виде

$$\gamma(\beta) = -2\nu - G(\beta) - 4\nu^2\beta^2/2, \quad \sigma' = \sigma = 1, \quad \text{где } \frac{d}{d\beta}G(\beta) = g(\beta).$$

На основании этого приходим к выводу, что лагранжиан $L = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\beta}}^2 - (2\nu + G(\beta) + 4\nu^2\beta^2/2)$ обеспечивает представление уравнения (13), определенного в пространстве $(\beta,\dot{\beta})$ в виде стохастического уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\tilde{\dot{\beta}}}) - \frac{\partial L}{\partial\beta} = \dot{\xi}$$

в пространстве $(\beta,\tilde{\dot{\beta}})$.

Ранее на примерах 1 и 2 в работе [11] по заданным уравнениям (10) и (13) в задаче прямого построения лагранжиана строились уравнения лагранжевой структуры методом дополнительных переменных в классе стохастических дифференциальных уравнений эквивалентных п.н.

*Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант № AP 09258966).*

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М.,1986. 224с.
2 Mukharlyamov R.G. Differential-algebraic equations of programmed motions of Lagrangian dynamical systems // Mechanics of Solids. - 2011. - Т. 46. - № 4. - С. 534-543.
3 Mukharlyamov R.G., Tleubergenov M.I. Control of system dynamics and constrains stabilization, Communications in Computer and Information Science. – 2017. – 700. - Pp. 431-442.
4 Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. – Springer International Publishing Switzerland, -2016. – 266 pp.

5 Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую //ПММ. –М.,1952. -Т.10. -В. 6. -С.659-670.
6 Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. Main Inverse Problem for Differential System with Generate Diffusion, Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. - Vol. 65 (5). – Pp. 787-792.
7 Tleubergenov M.I. On the inverse stochastic reconstruction problem, Differential Equations. – 2014. - Vol. 50 (2). – Pp. 274-278.
8 Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. Stochastic inverse problem with indirect control, Differential Equations. – 2017. - Vol. 53 (10). – Pp. 1387-1391.
9 Vassilina G.K., Tleubergenov M.I. Solution of the Problem of Stochastic Stability of an Integral Manifold by the Second Lyapunov Method, Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. -Vol. 68(1). – Pp. 14-28.
10 Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. On the Solvability of the Main Inverse Problem for Stochastic Differential Systems, Ukrainian Mathematical Journal. -2019. -Vol.71 (1). -Pp. 157-165.
11 Tleubergenov, M.I., Azhymbaev, D.T. On the Solvability of Stochastic Helmholtz Problem. *J. Math. Sci. Vol.* 253. – P.297–305 (2021). https://doi.org/10.1007/s10958-021-05229-1
12 Гельмгольц Г. О физическом значении принципа наименьшего действия //Вариационные принципы механики. -Москва,1959. - С.430-459.
13 Галиуллин А.С. Системы Гельмгольца. –Москва, 1995. - 86 с.
14 Mayer A. Die existenzbeingungen eines kinetischen potentiales. Ber. Verhand. Kgl. Sachs. Ges. Wiss. -Leipzig. 1896. 48. -Pp.519-529.
15 Суслов Г.К. О кинетическом потенциале Гельмгольца //Математический сборник. – 1896. -Т.19. -№ 1. -С. 197-210.
16 Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics. Springer-Verlag. New-York. 1978. 266 p.
17 Santilli R.M. Foundation of Theoretical Mechanics. 2. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics. Springer-Verlag. New-York. 1983. 370 p.
18 Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов //Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения /ВИНИТИ, 1992. Т.40. С.3-178.
19 Watanabe S., Ikeda N., Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, --1981, Elsevier, North-Holland Mathematical Library, Vol. 24. -464p.
20 Pugachev V.S., Sinitsyn I.N., Stochastic Differential Systems. Analysis and Filtering. – Wiley, 1987. – 570p.
21 Ito K. On a stochastic differential equation //Mem. Am. Soc. 1951. V.4. C. 51-89.
22 Сагиров П. Стохастические методы в динамике спутников //Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей. М. 1974. № 5(147). С.28-47. 1974. № 6(148). С.3-38.
23 Синицын И.Н. О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе //Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 3. С.23-31.

REFERENCES

1 Galiullin A.S. Metody resheniya obpatnyh zadach dinamiki. M., 1986. 224s.
2 Mukharlyamov R.G. Differential-algebraic equations of programmed motions of Lagrangian dynamical systems // Mechanics of Solids. - 2011. - T. 46. - № 4. - C. 534-543.
3 Mukharlyamov R.G., Tleubergenov M.I. Control of system dynamics and constrains stabilization, Communications in Computer and Information Science. – 2017. – 700. - Pp. 431-442.

4 Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. - Springer International Publishing Switzerland, -2016. – 266 pp.
5 Yerugin N.P. Postroeniye vsego mnozhestva system differentsial'nyh uravnenij, imeuschih zadannuyu integral'nuyu krivuyu //PMM. –M.,1952.-T.10. V.6. –S.659-670.
6 Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. Main Inverse Problem for Differential System with Generate Diffusion, Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. - Vol. 65 (5). – Pp. 787-792.
7 Tleubergenov M.I. On the inverse stochastic reconstruction problem, Differential Equations. – 2014. - Vol. 50 (2). – Pp. 274-278.
8 Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. Stochastic inverse problem with indirect control, Differential Equations. – 2017. - Vol. 53 (10). – Pp. 1387-1391.
9 Vassilina G.K., Tleubergenov M.I. Solution of the Problem of Stochastic Stability of an Integral Manifold by the Second Lyapunov Method, Ukrainian Mathematical Journal. –2016. -Vol. 68(1). – Pp. 14-28.
10 Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. On the Solvability of the Main Inverse Problem for Stochastic Differential Systems, Ukrainian Mathematical Journal. -2019. -Vol.71 (1). -Pp. 157-165.
11 Tleubergenov, M.I., Azhymbaev, D.T. On the Solvability of Stochastic Helmholtz Problem. *J. Math. Sci. Vol.* 253. – P.297–305 (2021). https://doi.org/10.1007/s10958-021-05229-1
12 Helmholtz G. O fizicheskom znachenii printsipa naimen'shego dejstviya // Variatsionnye printsipy mehaniki.-Moskva, 1959.-S.430-459.
13 Galiullin A.S. Sistemy Helmholtza.- Moskva, 1995. – 86 s.
14 Mayer A. Die existenzbeingungen eines kinetischen potentiales. Ber. Verhand. Kgl. Sachs. Ges. Wiss. -Leipzig. 1896. 48. -Pp.519-529.
15 Suslov G.K. O kineticheskom potentsiale Helmholtza //Matematicheskij sbornik. – 1896. – T. 19. -№ 1. –C. 197-210.
16 Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics. Springer-Verlag. New-York. 1978. 266 p.
17 Santilli R.M. Foundation of Theoretical Mechanics. 2. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics. Springer-Verlag. New-York. 1983. 370 p.
18 Filippov V.M., Savchin V.M., Shorohov S.G. Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial'nyh operatorov //Itogi nauki i tehniki. Ser. Sovremennye problemy matematiki. Novejshie dostizheniya /VINITI, 1992. T.40. S.3-178.
19 Watanabe S., Ikeda N., Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, --1981, Elsevier, North-Holland Mathematical Library, Vol. 24. -464p.
20 Pugachev V.S., Sinitsyn I.N., Stochastic Differential Systems. Analysis and Filtering. – Wiley, 1987. – 570p.
21 Ito K. On a stochastic differential equation //Mem. Am. Soc. 1951. V.4. C. 51-89.
22 Sagirov P. Stohasticheskye metody v dinamike sputnikov // Mehanika. Periodicheskij sbornik perevodov inostrannyh statej. M. 1974. № 5(147). S.28-47. 1974. № 6(148). S.3-38.
23 Sinitsyn I.N. O fluktuatsuyah giroskopa v kardanovom podvese // Izvestiya AN SSSR. Mehanika tverdogo tela. 1976. № 3. S.23-31