УДК 517.965
ГРНТИ 27.31.21

https://orcid.org/0000-0002-0784-5183

Б.Д. КОШАНОВ [1,2], М.С. ШАМБАСОВ [2], Р.У. СЕГИЗБАЕВА [3]

[1] Казахский национальный педагогический университет имени Абая (Алматы, Казахстан),
[2] Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан),
[3] Академия гражданской авиаций (Алматы, Казахстан)
e-mail: koshanov@list.ru, shambasov@mail.ru, segizbaeva-55@mail.ru

ОДНА ТЕОРЕМА ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Необходимость исследования краевых задач для эллиптических параболических уравнений продиктована с многочисленными практическими приложениями при теоретическом изучении процессов гидродинамики, электростатики, механики, теплопроводности, теории упругости, квантовой физики.

В этой работе мы получаем теорему об априорной оценке решении нелинейных уравнений в конечномерном пространстве. Работа состоит из двух пунктов. В первом пункте приводятся используемые обозначения и формулировка основного результата. Во втором пункте доказывается теорема. Условие теоремы таково, что можно использовать при изучении некоторого класса начально-краевых задач для получения априорной оценки. В этом и состоит смысл этой теоремы.

Ключевые слова: конечномерное гильбертово пространство, нелинейные уравнения, обратимый оператор, дифференцируемые вектор-функций, априорная оценка решений.

Б.Д. ҚОШАНОВ [1,2], М.С. ШАМБАСОВ [2], Р.У. СЕГІЗБАЕВА [3]

[1] Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті (Алматы, Қазақстан),
[2] Математика және математикалық модельдеу институты (Алматы, Қазақстан),
[3] Азаматтық авиация академиясы (Алматы қ., Қазақстан)
e-mail: koshanov@list.ru, shambasov@mail.ru, segizbaeva-55@mail.ru

ШЕКТЕЛГЕН КЕҢІСТІКТЕ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР КЛАССЫ УШИН ШЕШІМДЕРІН БАҒАЛАУ ТУРАЛЫ БІР ТЕОРЕМАСЫ

Эллиптикалық және параболалық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу қажеттілігі гидродинамика, электростатика, механика, жылу өткізгіштік, серпімділік теориясы, кванттық физика процестерін теориялық тұрғыдан зерттеуде көптеген практикалық қосымшалардың түсіндіруімен тікелей байланысты. Бұл жұмыста ақырлы өлшемді кеңістікте сызықтық емес теңдеулердің шешімдері үшін априорлық бағалаулары туралы теорема аламыз. Жұмыс екі бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімде пайдаланылған белгілеулер мен негізгі нәтиженің тұжырымдамасы келтірілген. Екінші бөлімде теорема дәлелденді. Теореманың шарты, оны бастапқы-шекаралық есептердің белгілі бір класын зерттеу кезінде олардың шешімдеріне априорлық бағалау алу үшін қолдануға болады. Теореманың мәні осында.

Түйінді сөздер: ақырлы өлшемді Гильберт кеңістігі, сызықтық емес теңдеулер, кері оператор, дифференциалданатын вектор-функциялар, шешімдерді априорлық бағалау.

B.D. KOSHANOV[1,2], M.S. SHOMBASOV[2], R.U. SEGIZBAEVA[3]

[1]Abai Kazakh National Pedagogical University (Almaty, Kazakhstan),
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modelling (Almaty, Kazakhstan),
[3]Civil Aviation Academy (Almaty, Kazakhstan)
e-mail: koshanov@list.ru, shambasov@mail.ru, segizbaeva-55@mail.ru

A THEOREM ON ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLINEAR EQUATIONS IN FINITE-DIMENSIONAL SPACES

The need to study boundary value problems for elliptic parabolic equations is dictated by numerous practical applications in the theoretical study of the processes of hydrodynamics, electrostatics, mechanics, heat conduction, elasticity theory, quantum physics.

In this paper, we obtain a theorem on an a priori estimate for the solution of nonlinear equations in a finite-dimensional space. The work consists of two points. The first paragraph contains the notation used and the formulation of the main result. In the second section, the theorem is proved. The condition of the theorem is such that it can be used in the study of a certain class of initial-boundary value problems to obtain an a priori estimate. This is the meaning of this theorem.

Keywords: finite-dimensional Hilbert space, nonlinear equations, invertible operator, differentiable vector-functions, a priori estimate of solutions.

1. Формулировка основного результата, используемые обозначения.

Пусть H конечномерное гильбертово пространство $(10 \le \dim H = N < \infty)$ и G – обратимый оператор в H, такой, что $\|G\| \le 1, \|G^{-1}\| < \infty$. Нас будет интересовать уравнения следующего вида

$$f(u) := u + L(u) = g \in H\,. \tag{1}$$

Всюду в этой работе $f(u)$ будет означать операцию вида $u + L(u)$, где $L(\cdot)$ - нелинейное преобразование.

Если ξ – параметр из $[0,+\infty)$ и вектор $u(\xi)$ – есть вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по параметру ξ, то будем предполагать, что также непрерывно дифференцируема и вектор-функция $L(u(\xi))$ (а также возникающие в дальнейшем из $L(u)$ и $f(u)$ выражения).

Введем обозначение L_u:

$$(L(u(\xi)))_\xi = L_u u_\xi\,. \tag{2}$$

Очевидно, что L_u (при каждом $u \in H$) будет линейным оператором

$$L_u v = (L(u(\xi)))_\xi \Big|_{u_\xi = v}\,. \tag{3}$$

Имеем

$$(f(u(\xi)))_{\xi} = u_{\xi} + L_u u_{\xi} = (E + L_u)u_{\xi}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем E – единичное преобразование.

Оператор, сопряженный к L_u, обозначим через L_u^* то есть $L_u^* = (L_u)^*$.

Обозначим

$$D_u^* = E + L_u^*, \tag{4}$$

$$D_u^* f(u) = f(u) + L_u^* f(u).$$

Если u – дифференцируемая вектор-функция, то положим

$$(D_u^* f(u))_{\xi} = M_u u_{\xi}.$$

Здесь линейный оператор M_u при каждом фиксированном u определяется формулой

$$M_u v = (M_u u_{\xi})\Big|_{u_{\xi} = v}. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть H – конечномерное гильбертово пространство. Предположим, $L(\cdot)$ что – непрерывное в H преобразование, а D – линейный обратимый оператор. Предположим, что $L(0) = 0$ и для любого $u \in H$ выполнено неравенство*

$$\langle Du, DL(u) \rangle \geq -\delta \|Du\|^2 \tag{6}$$

при некотором $0 < \delta < 1/2$. Тогда для любого $g \in H$ уравнение

$$u + L(u) = g$$

имеет решение, удовлетворяющее оценке

$$\|Du\|^2 \leq (1 - 2\delta)^{-1} \|Dg\|^2.$$

Доказательство теоремы. Пользуемся обозначениями теоремы. Если $g \in H$, то вектор $u = 0$ является решением уравнения

$$u + Lu = 0.$$

Пусть $0 \neq g \in H$ – произвольный вектор. Так как D – обратимый оператор, то $\|Dg\| > 0$.

Обозначим через M множество

$$M = \left\{ u : \|Du\|^2 \leq \frac{2}{(1 - 2\delta)\delta} \|Dg\|^2 \right\}. \tag{7}$$

Положим

$$F(u) = -\frac{u + L(u) - g}{\|D(u + L(u) - g\|} \eta, \tag{8}$$

где число $\eta > 0$ выбрано следующим образом:

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{(1-2\delta)\delta}\|Dg\|^2}.$$

Предположим, что уравнение $u + L(u) = g$ не имеет решения в M .

Так как уравнение $u + L(u) = g$ не имеет решения, то преобразование $F(\cdot)$ непрерывно на M и переводит M в M . Но тогда по теореме Шаудера о неподвижной точке получаем, что существует u_0 такое, что

$$-\frac{u_0 + L(u_0) - g}{\|D(u_0 + L(u_0) - g\|}\eta = u_0. \tag{9}$$

Отсюда и выбора η имеем

$$\|Du_0\|^2 = \eta^2 = \left(\frac{2}{(1-2\delta)\delta}\right)\|Dg\|^2 . \tag{10}$$

Подействуем на (9) оператором D , а затем умножим скалярно на Du_0 . Тогда пользуясь (10) и условием теоремы получаем

$$\eta^{-1}\|Du_0\|^2\|D(u_0 + L(u_0) - g)\| = -\|Du_0\|^2 - \langle DL(u_0), Du_0\rangle + \langle Dg, Du_0\rangle \le$$

$$-\|Du_0\|^2 + \delta\|Du_0\|^2 + \frac{\varepsilon^{-1}}{2}\|Du_0\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\|Du_0\|^2.$$

Возьмем $\varepsilon = 2\delta$. Тогда из последнего неравенства и из (10) выводим

$$0 \le -\|Du_0\|^2(1-2\delta) + \frac{1}{4\delta}\|Dg\|^2 = -\frac{2}{(1-2\delta)\delta}(1-2\delta)\|Dg\|^2 + \frac{1}{4\delta}\|Dg\|^2 = -\frac{7}{4\delta}\|Dg\|^2 .$$

Получили противоречие. Поэтому уравнение $u + L(u) = g$ имеет решение.

Действуем на уравнение $u + L(u) = g$ оператором D :

$$Du + DL(u) = Dg.$$

Умножая полученное равенство скалярно на Du получаем:

$$\|Du\|^2 + \langle Du, DL(u)\rangle = \langle Dg, Du\rangle \le \frac{1}{2}\|Dg\|^2 + \frac{1}{2}\|Du\|^2.$$

Теперь, пользуясь условием $\langle Du, DL(u)\rangle \ge -\delta\|Du\|^2$, получаем искомую оценку

$$(1-2\delta)\|Du\|^2 \le \|Dg\|^2 .$$

Теорема доказана.

Результатов данной теоремы можно использовать при изучении некоторого класса начально-краевых задач при получении необходимых априорных оценок для решений.

Работа выполнена при поддержке гранта AP 08857604 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier_Stokes equation // http:// claymath.org/ millennium/ Navier-Stokes_Equations/. _ Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. - P. 1 - 5.
2. Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса // Математический журнал (Алматы). 2013. Т. 13, № 4 (50). - С. 5-104.
3. Ладыженская О.А. Решение «в целом» краевые задачи Навье-Стокса в случае двух пространственных // Доклады АН СССР. 1958. Т. 123, № 3. - С.427-429.
4. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость // Успехи математических наук. 2003. Т. 58, № 2 (350). - С. 45-78.
5. Hopf E. Uber die Anfangswertaufgabe fur die Hydrodinamischen Grundgleichungen // Math. Nachr. 1951. V. 4. - P. 213 – 231.
6. Отелбаев М. Примеры не сильно разрешимых в целом уравнений типа Навье-Стокса // Математические заметки. 2011. Т. 89, № 5. – С. 771-779.
7. Отелбаев М., Дурмагамбетов А. А., Сейткулов Е. Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. II / / Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49, № 4. - С. 855-864.
8. Отельбаев М., Жапсарбаева Л.К. Непрерывная зависимость решения параболического уравнения в гильбертовом пространстве от параметров и от начальных данных // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6. - С. 818-849.
9. Лионс Ж. – Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с фр. – М.: Мир. 1972. - 586 с.
10. Сакс Р.С. Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 1. - С. 53-79.
11. Похожаев С.И. Гладкие решения уравнений Навье-Стокса // Математический сборник. 2014. Т. 205, № 2. - С. 131-144.
12. Koshanov B.D., Otelbaev M.O. Correct Contractions stationary Navier-Stokes equations and boundary conditions for the setting pressure // AIP Conference Proceedings. 2016. №1759. V. 1759, 020005, http://dx.doi.org/10.1063/1.4959619

REFERENCES

1. Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier_Stokes equation// http:// claymath.org/ millennium/ Navier-Stokes_Equations/. _ Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. - P. 1 - 5.
2. Otelbaev M. Existence of a strong solution of the Navier-Stokes equation // Mathematical journal (Almaty). 2013. T. 13, № 4 (50). - P. 5-104.
3. Ladyzhenskaya O.A. Solution "in the large" of Navier-Stokes boundary value problems in the case of two spatial problems // Dokl. 1958. T. 123, № 3. - P. 427-429.
4. Ladyzhenskaya O.A. The sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness // Uspekhi matematicheskikh nauk. 2003. T. 58, № 2 (350). - P. 45-78.

5. Hopf E. Uber die Anfangswertaufgabe fur die Hydrodinamischen Grundgleichungen // Math. Nachr. 1951. V. 4. - P. 213 - 231.
6. Otelbaev M. Examples of Navier-Stokes type equations that are not strongly solvable in the large // Matematicheskie zametki. 2011. T. 89, № 5. - P. 771-779.
7. Otelbaev M., Durmagambetov A.A., Seitkulov E.N. Conditions for the existence of a strong solution in the large for a class of nonlinear evolution equations in a Hilbert space. II / / Siberian Mathematical Journal. 2008. T. 49, № 4. - P. 855-864.
8. Hotelbaev M., Zhapsarbaeva L.K. Continuous dependence of the solution of a parabolic equation in a Hilbert space on parameters and on initial data // Differential Equations. 2009. T. 45, № 6. - P. 818-849.
9. Lions J.-L. Some methods for solving nonlinear boundary value problems. - M.: Mir. 1972. - 586 p.
10. Sachs R.S. The Cauchy problem for the Navier-Stokes equations, the Fourier method // Ufa Mathematical Journal. 2011. T. 3, № 1. - P. 53-79.
11. Pohozhaev S.I. Smooth solutions of the Navier-Stokes equations // Mathematical collection. 2014. T. 205, № 2. - P. 131-144.
12. Koshanov B.D., Otelbaev M.O. Correct Contractions stationary Navier-Stokes equations and boundary conditions for the setting pressure // AIP Conference Proceedings. 2016. №1759. V. 1759, 020005, http://dx.doi.org/10.1063/1.4959619