УДК 519.6
ГРНТИ 27.41.15

https://orcid.org/0000-0003-4615-741X
Р.Қ. КЕРІМБАЕВ
әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, (Алматы, Қазақстан)
e-mail: ker_im@mail.ru

ПОЛИНОМАЛЬДІ БЕЙНЕЛЕУЛЕРДІҢ ЛОКАЛЬДІ НИЛПОТЕНТТІГІ

Абстракт. Бұл мақалада құпиясы көп объектілердің бірі болып табылатын полиномиальді бейнелеулер қарастырылады. Полиномиальді бейнелеулерге қатысты мәселелердің бірі, олардың керіленуі, күрделі есеп. Негізі қиындықтардың бірі болып полиномиальді бейнелеулер жиыны сақина болмауында. Полиномиальді бейнелеулер жиыны тек жарты топ болады. Амал ретінде олардың суперпозиция қарастырылады. А. Ягжева, H. Bass, E. Connel және Д. Wright полиномиальді бейнелеуі қарастырылады. Осы бейнелеуге сәйкес біртекті үшінші дәрежелі көпмүшелер арқылы құрылған полиномиалды бейнелеудің локальді нильпотенттілігі көрсетілген. Бұл нәтиже осы бейнелеудің Якоби матрицасы нильпотентті болғандығынан шығады. Бұл жағдайда матрицалардың көбейту амалы кәдімгі көбейтуден басқаша. Матрицалар айнымалы болғандықтан олардың көбейту амалы нүктелерге байланысты болады. Нүктелер өзгерген сайын сәйкес Якоби матрицасы да өзгереді.

Кілттік сөздер: Полиномиальді бейнелеулер, якобиан, локальді нильпотенттік.

Р.К. КЕРИМБАЕВ
[1]Казахский Национальный Университет имени Аль-Фараби (Алматы, Казахстан),
e-mail: ker_im@mail.ru

ЛОКАЛЬНАЯ НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИИ

В этой статье обсуждаются полиномиальные отображения, которые являются одними из самых загадочных объектов. Одна из сложных проблем полиномиальных отображений - их обратимость. Основная трудность - отсутствие структуры колец в множестве полиномиальных отображений. Множество полиномиальных отображений составляет только полугруппу. Их суперпозиция рассматривается как операция. Рассмотрены полиномиальные отображения А. В. Ягжева, Х. Басса, Э. Коннела и Д. Райта. В соответствии с этим отображением показана локальная нильпотентность полиномиального отображения, образованного однородными многочленами. Этот результат связан с тем, что матрица Якоби полиномиального отображения нильпотентна. В этом случае метод умножения матриц отличается от обычного умножения. Поскольку матрицы являются переменными, их умножение зависит от точек. По мере изменения точек меняется и соответствующая матрица Якоби.

Ключевые слова: полиномиальные отображения, якобиан, локальный нильпотентность.

R.K. KERIMBAYEV

Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)
e-mail: ker_im@mail.ru

LOCAL NILPOTENCE OF POLYNOMIAL MAP

This article discusses polynomial mappings, which are some of the most mysterious objects. One of the tricky problems with polynomial mappings is their reversibility. The main difficulty is the absence of a ring structure in the set of polynomial mappings. The set of polynomial mappings constitutes only a semigroup. Their superposition is considered an operation. The polynomial mappings of A. V. Yagzhev, H. Bass, E. Connel, and D. Wright are considered. In accordance with this mapping, the local nilpotency of the polynomial mapping formed by homogeneous polynomials is shown. This result is related to the fact that the Jacobi matrix of the polynomial map is nilpotent. In this case, the method of matrix multiplication is different from the usual multiplication. Since matrices are variable, their multiplication depends on the points. As the points change, the corresponding Jacobi matrix also changes.

Key words: polynomial maps, Jacobian, local nilpotency.

H. Bass, E. Connel және Wright 1982 жылы сонымен бірге А. В. Ягжев 1980 жылы полиномиальді бейнелеулердің керіленуін қарапайым түрдегі полиномиальді бейнелеудің керіленуіне әкеліп тіреді. Атап айтқанда, полиномиальді бейнелеудің керіленуін тек сызықты компонентасы мен оның кубтық компоненталары бар полиномальді бейнелеудің керіленуіне әкеліп тіреді, [1], [2]. Яғни келесі теорема полиномиальді бейнелеудің керіленуін көрсетуге жеткілікті.

Теорема. $f_i = x_i + f_{i(3)} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ көпмүшелері $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ полиномиальді бейнелеуін берсін, мұндағы $f_{i(3)}$-біртекті үшінші дәрежелі көпмүшелер $i = 1,2, \dots, n$. Сонда Якобиан проблемасын шешу үшін осы F полиномиальді бейнелеудің керіленуін көрсетсек жеткілікті.

Arno van den Essen өзінің фундаментальді монографиясында [3] локальді нильпотентті дифференцталдарды қарастырған. Себебі локальді нильпотентті дифференциальдар полиномиальді автоморфизмдермен тығыз байланысты. Егер бізге локальді нильпотентті дифференциал берілетін болса, онда оған сәйкес полиномиальді бейнелеу автоморфизм болады. Егер F полиномиальді бейнелеу болса, онда оған сәкес $\mathbb{R}$-эндоморфизмдер нильпотентті болмайды, себебі $\varphi(const) = const$ болады, мұндағы φ- F-ке сәйкес $\mathbb{R}$-эндоморфизм. Бірақ $\mathbb{R}$-эндоморфизмдер туралы локальді нильпотентті_ұғымды енгізуге болады екен.

Анықтама. Егер әрбір x_i айнымалы үшін $\varphi^{n_i}(x_i) = \underbrace{(\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi)}_{n_i \text{ рет}}(x_i) = 0$ болатын $n_i \epsilon \mathbb{N}$ натурал саны табылса, онда φ $\mathbb{R}$-эндоморфизм локальді нильпотентті деп аталады, $i = 1,2, \dots, n$.

Нәтиже. Теоремадағы $f_i = x_i + f_{i(3)},\ i = 1,2, \dots, n$, көпмүшелері Келлер көпмүшелері болса, яғни олардың якобианы нөлден өзгеше тұрақты сан болса, онда $f_{i(3)},\ i = 1,2, \dots, n$ көпмүшелерінің Якоби матрицасы нильпотентті болатын түсінікті, яғни Якоби матрицасының , n-ші дәрежесі нөлдік матрица болады. Сонда $\varphi_3(x_i) = f_{i(3)}$ $\mathbb{R}$-эндоморфизмі қандай болады деген сұрақ туады, $i = 1,2, \dots, n$.

Теорема ЛН. $\varphi_3^n(x_i) = 0$, $i = 1,2, \dots, n$ болады, яғни φ_3 $\mathbb{R}$-эндоморфизмі локальді нильпотентті болады.

Дәлелі. $j \in \mathbb{N}$ арқылы индукция бойынша $f_{i(3)}^j$ көпмүшесін анықтаймыз:

$f_{i(3)}^1 = f_{i(3)}, f_{i(3)}^j = f_{i(3)}\ (f_{1(3)}^{j-1}, f_{2(3)}^{j-1}, \dots, f_{n(3)}^{j-1}),$
$j \geq 2$ сонда $0 = J(\varphi_3)^n x^t = 3J(\varphi_3)^{n-1} f_{(3)}^t \Rightarrow$

$0 = J(\varphi_3(f_{(3)}))^{n-1} f_{(3)}^t = J(\varphi_3(f_{(3)}))^{n-2} (f_{(3)}^2)^t =, \dots, = J(\varphi_3(f_{(3)}^{n-1}))(f_{(3)}^{n-1})^t = (f_{(3)}^n)^t = \varphi_3^n(x)^t$,

Мұндағы $\varphi_3^n(x) = f_{(3)}^n = (f_{1(3)}^n, f_{2(3)}^n, \dots, f_{n(3)}^n) = (0,0,\dots,0)$, яғни $\varphi_3^n(x_i) = f_{i(3)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1,2,\dots,n$, ал $J(\varphi_3(f_{(3)}^j))$ дегеніміз $J(\varphi_3)$ Якоби матрицасын $f_{(3)}^j = (f_{1(3)}^j, f_{2(3)}^j, \dots, f_{n(3)}^j)$ нүктесінде есептеген матрица.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 H. Bass, E. Connel and D. Wright, The Jacobian Conjecture:Reduction of Degree and Formal Expansion of the Inverse, Bulletin of the American Mathe metical Society, 7(1982), 287-330

2 A.V. Yagzhev, On Keller's problem, Siberian Math. J., 21(1980), 747-754

3 Arno vann den Essen, Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture, Birkhauser, 2000

4 Kerimbayev, R.K. (2018). A Geometric Solution to the Jacobian Problem // Journal of New Theory, 24, P. 44-49.

REFERENCES

1 H. Bass, E. Connel and D. Wright, The Jacobian Conjecture:Reduction of Degree and Formal Expansion of the Inverse, Bulletin of the American Mathe metical Society, 7(1982), 287-330

2 A.V. Yagzhev, On Keller's problem, Siberian Math. J., 21(1980), 747-754

3 Arno vann den Essen, Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture, Birkhauser, 2000

4 Kerimbayev, R.K. A Geometric Solution to the Jacobian Problem // Journal of New Theory, 2018. 24, P. 44-49.