УДК 519.6
ГРНТИ 27.41.15

http://orcid.org/0000-0002-1865-4681
Л.С. СПАНҚҰЛОВА[1], , Р.Қ. КЕРІМБАЕВ[1]

[1] әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы,
e-mail: Lyazzat.Spankulova@kaznu.kz, ker_im@mail.ru

КӨПӨЛШЕМДІ ПАЙДАЛЫЛЫҚ ФУНКЦИЯСЫ ЖӘНЕ ЭРРОУ -ПРАТТ ӨЛШЕМІ

Бұл мақалада адамдардың мінез-құлқын экономикалық тұрғыдан зерттеудегі пайдалылық функциясын зерттеу геометриялық әдіснама арқылы қарастырылады. Пайдалылық функциясы математикалық статистикадағы математикалық күтімнің аналогы және оны айқын табу - күрделі есеп. Эрроу-Пратт коэффициентіне сүйене отырып пайдалылық функциясының кейбір геометриялық қасиеттерін айқындаймыз. Экономикалық процесстерді бір ғана пайдалылық функциясымен сипаттау мүмкін емес. Авторлар өндіріс дамуы сияқты экономикалық жағдайларға сәйкес әртүрлі пайдалылық функциясының математикалық моделін ұсынады.

Кілттік сөздер: Эрроу - Пратт коэффициенті, геометриялық тәсіл, мінез-құлық экономикасы, күтілетін пайдалылық моделі, пайдалылық функциясы, Витушкин мысалы, күтілетін пайдалылық теориясы, тәуекелден аулақ болу.

Л.С. СПАНКУЛОВА[1], Р.К. КЕРИМБАЕВ[1]
[1] Казахский Нациоанльный Университет им. Аль-Фараби (г. Алматы, Казахстан)
e-mail: Lyazzat.Spankulova@kaznu.kz, ker_im@mail.ru

МНОГОМЕРНАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ И МЕРА ЭРРОУ-ПРАТТА

В этой статье изучение функций полезности экономического поведения индивида рассматривается с помощью геометрических методов. Функция полезности является аналогом математического ожидания в математической статистике, и поиск ее явного вида представляет собой сложную проблему. На основе коэффициента Эрроу - Пратта мы определяем некоторые геометрические свойства функции полезности. Экономические процессы нельзя описать одной функцией полезности. Авторы представляют различные функции полезности в форме математической модели в соответствии с экономическими условиями, такими как промышленное развитие.

Ключевые слова: коэффициент Эрроу - Пратта, геометрический подход, поведенческая экономика, модель ожидаемой полезности, функция полезности, пример Витушкина. теория ожидаемой полезности, неприятия риска.

L.S. SPANKULOVA[1], R.K. KERIMBAYEV[1]

[1]Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)
e-mail: Lyazzat.Spankulova@kaznu.kz, ker_im@mail.ru

MULTI-DIFFERENT BENEFIT FUNCTION AND ERROW-PRATT DIMENSION

In this article, the study of utility functions in the economic study of human behavior is explored using geometric methods. The utility function is an analogue of the mathematical expectation in mathematical statistics, and finding its explicit form is a difficult problem. Based on the Arrow-Pratt coefficient, we determine some of the geometric properties of the utility function. Economic processes cannot be described by a single utility function. The authors present various utility functions in the form of a mathematical model according to economic conditions such as industrial development.

Key words: Arrow - Pratt coefficient, geometric approach, behavioral economics, expected utility model, utility function, Vitushkin's example. theory of expected utility, risk aversion.

Эрроу-Пратт коэффициенті пайдалылық функциясының локальді қасиеті. Пайдалылық функциясын алғаш рет фон Нейман мен Моргенштерн енгізген [1]. Олар төрт аксиома енгізе отырып, осы аксиомаларды қанағаттандыратын жалғыз ғана пайдалылық функциясы табылатынын көрсетті [1]. Пайдалылық функциясы атақты көлемді зерттеулерде жан жақты талқыланып, бір айнымалыға тәуелді бір ғана пайдалылық функциясын егжей-тегжей зерттелген [2-4]. Коровин Д. И. өзінің [5] мақаласында пайдалылық функцияларының экономикалық интерпретациясын және мысалдарын келтірген, олар төмендегідей:

1. $u(x) = Ax^{\propto}$, $0 <\propto< 1$, $r_э(x) = \frac{1-\propto}{x}$;
2. $u(x) = 1 - e^{-\propto x}$, $\propto> 0$, $r_э(x) =\propto$;
3. $u(x) = log_{\propto}(x + 1)$, $\propto> 0, \propto\neq 1$; $r_э(x) = \frac{1}{x+1}$;
4. $u(x) = ax - bx^2$, $a, b > 0$, $x \in [0, \frac{a}{2b}]$; $r_э(x) = \frac{2b}{a-2bx}$

Мұндағы $r_э(x)$Эрроу-Пратт коэффициенті. Ол $r_э(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ формуласымен есептеледі [2]. $u(x)$ пайдалылық функциясын зерттеу үшін y айнымалысын енгіземіз де $y = u(x)$ теңдеуін қарастырамыз. Осы теңдеуге (x_0, y_0)нүктесінде жанама жүргіземіз. Жанама теңдеуіндегі айнымалыларды үлкен латын әріпімен белгілейміз. Сонда $Y - y_0 = u'(x_0)(X - x_0)$ немесе

$$u'(x_0)X - Y = u'(x_0)x_0 - y_0 \tag{1}$$

жанама түзудің жалпы теңдеуі шығады.

Егер x айнымалысының математикалық күтімі нольге тең болса, яғни $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0$, онда x^2 функциясының математикалық күтімі дисперсияға тең болады, яғни $\delta^2 = E((x - E(x))^2) = E(x^2)$. Осыдан $u(c - x)$ -ді x_0 бойынша Тейлор қатарына жіктеп x_0^2 үлкен не тең мүшелерін алып тастап және оны

$$E\big(u(c + x)\big) \simeq E\left(u(c) + u'(c)x + \frac{1}{2}u''(c)x^2\right) = u(c) + \frac{1}{2}u''(c)\delta^2$$

теңестіре отырып $-xu'(c) = \frac{1}{2}\delta^2 u''(c)$ өрнегін аламыз. Сонда біз $x = -\frac{u''(c)\delta^2}{2u'(c)}$ коэффициентін аламыз. Бұл тәуелділікті қабылдаудың шегі.

Көп айнымалы бір пайдалылық функциясы

$u(x_1, x_2, .., x_n) - n$ айнымалыға тәуелді пайдалылық функциясы болсын. $x_0 = \left(x_{1,}^0\ x_{2,..,}^0 x_n^0\right)$ нүктесінде осы функцияны Тейлор қатарына жіктейміз.

$$u(x_0 - x) \simeq u(x_0) - (x_1, x_2, \dots, x_n)u'(x_0)$$
$$= u(x_0) - \left(x_1 u_{x_1}(x_0) + x_2 u_{x_2}(x_0) + \cdots + x_n u_{x_n}(x_0)\right)$$

Енді $u(x_0 + x)$ функциясын Тейлор қатарына жіктеп $E(x) = 0$ болғанда $E(u(x_0 + x))$математикалық күтімін есептейміз. Сонда $E\big(u(x_0 + x)\big) \simeq E\big(u(x_0) + xu'(x_0)\big) + \frac{1}{2}xu''(x_0)x^t) = u(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,\le j\le n} u_{x_i x_j}(x_0)E(x_i x_j)$

Мұндағы x –жол, x^t- баған, $u'(x_0)$ – баған, $u''(x_0)$ – матрица. $U(x_0 - x) = E\big(u(x_0 + x)\big)$ теңестіре отырып $xu'(x_0) = -\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} u_{x_i x_j} E\big(x_i x_j\big)$ теңдігін аламыз.

Сонда ізделінді $x = (x_{1,} x_{2,} \ldots x_n)$ векторы $u_{x_1}(x_0)x_1 + u_{x_2}(x_0)x_2 + \cdots + u_{x_n}(x_0)x_n$ гипержазықтығында жатады. Әрине x векторы бір мәнді түрде табылмайды. Осыдан біз $S\big(x_{1,..,}x_n\big) = \frac{1-\sum_{1\le i,j\le n} u_{x_i x_j} E(x_i x_j)}{2\sqrt{U_{x_1}(x_0)^2+\cdots+U_{x_n}(x_0)^2}}$ коэффициентін аламыз. Оның геометриялық мағынасы координаталар басынан гипержазықтыққа дейінгі арақашықтық. $\sum_{1\le i,j\le n} U_{x_i x_j} E(x_i\, x_j)$ өрнегі $u''(x) = \Big(u_{x_i x_j}(x)\Big)$ матрицасы мен $E = (E\big(x_i x_j\big))$матрицасының скаляр көбейтіндісі болады, $1 \le i,j \le n. r_э(x_1, x_2, \ldots x_n)$ Эрроу-Пратт коэффициентінің көпөлшемді аналогі ретінде келесі шаманы аламыз.

$$r_э(x_1^0, x_2^0, .., x_n^0) = -\frac{\det(u''(x_0))}{\|grad\, u(x_0)\|} \tag{2}$$

Көп айнымалы бірнеше пайдалылық функциялары

Жанама жазықтықтан $x = (x_1, .., x_n)$ шамасы бір мәнді түрде табылмады. x шамасын бір мәнді түрде табу үшін бізге тағы да пайдалылық функциялары керек. Біз екі айнымалы екі пайдалылық функцияларымен шектелеміз. Яғни $x = (x_1, x_2)$ болсын, ал $u(x) = \big(u_1(x), u_2(x)\big)$болсын. Енді $u_1(x_0 - x)$және $u_2(x_0 - x)$ функцияларын Тейлор қатарына жіктеп $x_i x_j$ дәлдікке дейін аламыз,

$$i = 1{,}2; j = 1{,}2;\ u_1(x_0 - x) \cong u_1(x_0) - (x_1, x_2)(u_{1x_1}(x_0), u_{1x_2}(x_o))^t,$$
$$u_2(x_0 - x) \cong u_2(x_0) - (x_1, x_2)(u_{2x_1}(x_0), u_{2x_2}(x_0))^t.$$

$x = (x_1, x_2)$ векторының $E(x)$ математикалық күтімі нөльге тең деп ұйғарып $u(x_0 + x)$ функциясын Тейлор қатарына жіктеп $E\big(u(x_0 + x)\big)$математикалық күтімін есептейміз, мұнда $E\big(u_1(x_0 + x)\big) \cong E\left(u_1(x_0) + xu_1'(x_0) + \frac{1}{2}xu_1''(x_0)x^t\right) = u_1(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2} u_{1x_{ix_j}}(x_0)E\big(x_i x_j\big)$,

$E\big(u_2(x_0 + x)\big) \cong E\left(u_2(x_0) + xu_2'(x_0) + \frac{1}{2}xu_2''(x_0)x^t\right) = u_2(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2} u_{x_i x_j}(x_0)E\big(x_i x_j\big)$.

Осыдан келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$u_{1x_1}(x_0)x_1 + u_{1x_2}(x_0)x_2 = -\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2} u_{2x_i x_j}(x_0)E(x_i x_j), \tag{3}$$
$$u_{2x_1}(x_0)x_1 + u_{2x_2}(x_0)x_2 = -\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2} u_{2x_i x_j}(x_0)E(x_i x_j) \tag{4}$$

Мұндағы $u_{1x_i x_j}(x)$, $u_{2x_i x_j}(x)$екінші ретті дербес туындылар. Егер $det\begin{pmatrix} u_{1x_1}(x_0) & u_{1x_2}(x_0) \\ u_{2x_1}(x_0) & u_{2x_2}(x_0)\end{pmatrix}$ якобианы нөльден өзгеше болса, онда теңдеулер жүйесінен $x = (x_1, x_2)$ шамасы бір мәнді түрде табылады [6]. Егер $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$бейнелеуі R^2-ні R^2- ге бейнелейтін автоморфизм болса, онда $det\, \mathcal{J}(u(x)) = const \ne 0$ болады. Сонымен

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1x_1}(x_0) & u_{1x_2}(x_0) \\ u_{2x_1}(x_0) & u_{2x_2}(x_0)\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2} u_{1x_i x_j} E\big(x_i x_j\big) \\ -\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2} u_{2x_i x_j} E\big(x_i x_j\big)\end{pmatrix} \tag{5}$$

Табылған $x = (x_1, x_2)$ векторының ұзындығын есептейміз. Эрроу-Пратт коэффиициенті вектор түрінде беріледі:

$$r_э(x_0) = -\frac{1}{\det J(u(x_0))}\begin{pmatrix} u_{2x_2}(x_0) & -u_{1x_2}(x_0) \\ -u_{2x_1}(x_0) & u_{1x_2}(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \det u_1''(x_0) \\ \det u_2''(x_0) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Мұндағы:

$$\det J(u(x_0)) = \det\begin{pmatrix} u_{1x_1}(x_0) & u_{1x_2}(x_0) \\ u_{2x_1}(x_0) & u_{2x_2}(x_0) \end{pmatrix} \quad (7)$$

u_{ix_j} − дербес туындылар, $i = 1,2, j = 1,2$

$$\det(u_i''(x_0)) = \det\begin{pmatrix} u_{ix_1x_1}(x_0) & u_{ix_1x_2}(x_0) \\ u_{ix_2x_1}(x_0) & u_{ix_1x_2}(x_0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$u_{ix_k x_l}$– екінші ретті дербес туындылар, $i, k, l = 1,2$.

Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің Ғылым комитетінің гранттық қаржыландыру жобасының аясында орындалған (грант № AP 09259811).

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Aumann R.J. The St. Petersburg Paradox: A Discussion of Some Recent Comments // Journal of Economic Theory. 1977. Vol. 14 (2). P. 443—445.
2 Bernoulli D. Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanea. 1738. Vol. V. P. 175—192. (Translated and republished as: Bernoulli D. Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk // Econometrica. 1954. Vol. 22. P. 23—36.)
3 Seidl C. The St. Petersburg Paradox at 300 // Journal of Risk and Uncertainty. 2013. Vol. 46. P. 247—264.
4 Schoemaker, P.J.H. The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations // Journal of Economic Literature, 1982. 20(2), 529-563.
5 Коровин Д.И. О нахождении функции полезности в теории Неймана-Моргенштерна // Вестник ИГЭУ, 2005. № 4, С. 83-88.
6 Kerimbayev, R.K. (2018). A Geometric Solution to the Jacobian Problem // Journal of New Theory, 24, P. 44-49.

REFERENCES

1 Aumann R.J. The St. Petersburg Paradox: A Discussion of Some Recent Comments // Journal of Economic Theory. 1977. Vol. 14 (2). P. 443—445.
2 Bernoulli D. Specimen Theoria Novae de Mensura Sortis // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanea. 1738. Vol. V. P. 175—192. (Translated and republished as: Bernoulli D. Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk // Econometrica. 1954. Vol. 22. P. 23—36.
3 Seidl C. The St. Petersburg Paradox at 300 // Journal of Risk and Uncertainty. 2013. Vol. 46. P. 247—264.
4 Schoemaker**,** P.J.H. The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations // Journal of Economic Literature, 1982. 20(2), P. 529-563.
5 Korovin D.I. Finding the utility function in the Neumann-Morgenstern theory // “Vestnik IGEU” journal, 2005. No. 4, 83-88. (in Russian).
6 Kerimbayev, R.K. A Geometric Solution to the Jacobian Problem // Journal of New Theory, 2018. 24, P. 44-49.