УДК 517.925
МРНТИ 27.29.19

https://orcid.org/0000-0003-1752-7848

У.К.КОЙЛЫШОВ[1,2] , М.А.САДЫБЕКОВ[2]

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан.
[2]Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан.
e-mail: koylyshov@mail.ru, sadybekov@math.kz

НАЧАЛЬНО - КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КУСОЧНО – ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами давно и хорошо исследуются. Следует отметить работы [1-5] , наиболее близкие по тематике к нашей работе. В работе Самарского А.А. [1] методом функции Грина и тепловых потенциалов доказана корректность первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом. А в работе казахстанских математиков Е.И. Ким и Б.Б. Баймуханов [2] методом потенциалов, сведением к интегральному уравнению доказана корректность первой начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности в полупространстве.

В работах [3-5] с помощью тепловых потенциалов доказано существование классических решений различных краевых задач для уравнений параболического типа.

В случае без разрыва спектральная теория этих задач построена практически полностью. Здесь можно отметить работы [6-16].

В данной работе обосновано решение методом разделения переменных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при краевых условиях типа Штурма (разделенные краевые условия) и рассмотрены всевозможные случаи.

Ключевые слова. Уравнение теплопроводности, разрывные коэффициенты, собственные значения, собственные функции, метод разделения переменных.

Ү.Қ.ҚОЙЛЫШОВ[1,2] , М.А.САДЫБЕКОВ[2]

[1]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан.
[2]Математика және Математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан.
e-mail: koylyshov@mail.ru, sadybekov@math.kz

КОЭФФИЦИЕНТІ БӨЛІКТІ – ТҰРАҚТЫ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУ ҮШІН БАСТАПҚЫ – ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

Коэффициенттері үзілісті жылуөткізгіштік есептері ұзақ уақыт бойы жақсы зерттелген.

Біздің жұмысымызға тақырыптар жағынан ең жақын туындыларды [1-5] атап өткен жөн. А.А.Самарскийдің еңбегінде [1] Грин функциясы және жылу потенциалдары әдісін қолдана отырып, коэффициенттері үзілісті жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші бастапқы-шекаралық есептің қисындылығы дәлелденді. Ал қазақстандық математиктер Е.И. Ким және Б. Б. Баймұхановтың еңбегінде [2] потенциалдар әдісімен, интегралдық теңдеуге келтіре отырып, жартылай кеңістікте үзілісті жылуөткізгіштік коэффициенті бар екі

өлшемді жылуөткізгіштік теңдеу үшін бірінші бастапқы -шекаралық есептің қисындылығы дәлелденген. [3-5] жұмыстарда жылу потенциалдарын қолдана отырып, параболалық типтегі теңдеулер үшін әр түрлі шекаралық есептердің классикалық шешімдерінің бар болуы дәлелденді.

Коэффициенті үзілісті болған жағдайда, бұл мәселелердің спектрлік теориясы толығымен құрылды. Бұл жерде [6-16] еңбектерді атап өтуге болады.

Берілген жұмыста жылуөткізгіштік коэффициенті бөлікті-тұрақты жылуөткізгіштік теңдеу үшін шеттік шарты Штурм типіндегі (бөлінген шекаралық шарттар) бастапқы-шекаралық есепті, айнымалыларды ажырату әдісімен шешу негізделген және барлық мүмкін жағдайлар қарастырылған.

U.K.KOILYSHOV[1,2] , M.A.SADYBEKOV[2]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
e-mail: koylyshov@mail.ru, sadybekov@math.kz

INITIAL - BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE EQUATION THERMAL CONDUCTIVITY WITH A PIECEWISE CONSTANT COEFFICIENT

Heat conduction problems with discontinuous coefficients have been well studied for a long time. It should be noted the works [1-5], which are the closest in terms of topics to our work. In the work of A.A. Samarsky [1] using the method of Green's function and thermal potentials, the correctness of the first initial-boundary value problem for the heat equation with a discontinuous coefficient was proved. And in the work of Kazakhstani mathematicians E.I. Kim and B. B. Baimukhanov [2] by the method of potentials, by reducing to an integral equation, the correctness of the first initial-boundary value problem for a two-dimensional heat equation with a discontinuous heat conductivity coefficient in a half-space is proved. In [3-5], using thermal potentials, the existence of classical solutions to various boundary value problems for parabolic equations was proved.

In the case without discontinuity, the spectral theory of these problems is almost completely constructed. Here we can mention the works [6-16].

In this paper, we substantiate the solution of the initial-boundary value problems by the method of separation of variables for the heat equation with a piecewise constant heat conductivity coefficient under boundary conditions of the Sturm type (separated boundary conditions) and consider all possible cases.

Keywords. Heat equation, discontinuous coefficients, eigenvalues, eigenfunctions, method of separation of variables.

Постановка задачи.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом

$$Lu \equiv \begin{Bmatrix} u_t - k_1^2 u_{xx} + q(x)u(x,t), & 0 < x < x_0 \\ u_t - k_2^2 u_{xx} + q(x)u(x,t), & x_0 < x < l \end{Bmatrix} = f(x,t), \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и краевыми условиями вида

$$\begin{cases} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_x(l,t) + \beta_2 u(l,t) = 0, \end{cases} \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

Краевые условия такого типа (разделенные краевые условия) называют условиями типа Штурма. Точка x_0 - строго внутренняя точка интервала $0 < x_0 < l$. Коэффициенты $k_i, \alpha_i, \beta_i, \quad (i = 1,2)$ являются действительными числами. Кроме того $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, \qquad |\alpha_2| + |\beta_2| > 0$.

Задача (1)-(3) моделирует процесс распространения температурного поля в тонком стержне длины l, состоящем из двух участков - $0 < x < x_0$ и $x_0 < x < l$ - с различными теплофизическими характеристиками. Дополнительно к краевым условиям (3) задаются условия на границе контакта двух сред с различными теплофизическими характеристиками - условия сопряжения при $x = x_0$. Хорошо известно (см., например, [1]), что естественными условиями сопряжения (они следует из самого уравнения и обуславливаются только разрывами теплофизических характеристик при переходе границы сред) являются условия идеального контакта: условие непрерывности температуры при переходе из одной среды в другую (4), и условие непрерывности теплового потока (5):

$$u(x_0 - 0, t) = u(x_0 + 0, t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$k_1 u_x(x_0 - 0, t) = k_2 u_x(x_0 + 0, t), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

Функции $q(x),\ f(x,t)$ непрерывны, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям (3) и условиям сопряжения (4)-(5).

После несложной замены задачу (1) – (5) можно свести к следующей задаче: в области $\Omega = \{(x,t): -1 < x < 1,\ 0 < t < T\}$, требуется найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющее уравнению

$$Lu \equiv \left. \begin{cases} u_t - k_1^2 u_{xx} + q(x)u(x,t), & -1 < x < 0 \\ u_t - k_2^2 u_{xx} + q(x)u(x,t), & 0 < x < 1 \end{cases} \right\} = f(x,t), \tag{6}$$

начальному условию $$u(x,0) = \varphi(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{7}$$

граничным условиям $$\begin{cases} \alpha_1 u_x(-1,t) + \beta_1 u(-1,t) = 0, \\ \alpha_2 u_x(1,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \end{cases} \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

и условиям сопряжения

$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

$$k_1 u_x(-0,t) = k_2 u_x(+0,t), \quad 0 \le t \le T, \tag{10}$$

Далее, не уменьшая общности, будем рассматривать задачу (6)-(10).

Классическим решением задачи (6)-(10) будем называть функцию $u(x,t)$, которая непрерывна в $\overline{\Omega}$, имеет в области Ω непрерывную производную первого порядка по t и непрерывную производную второго порядка по x при $-1 < x < 0, \quad 0 < x < 1$, и удовлетворяет уравнению (6) и условиям (7)-(10) в обычном классическом смысле.

Метод решения.

Решение задачи (6)-(10) представим в виде суммы решений задачи А: $\left(f(x,t)=0,\ \varphi(x)\neq 0\right)$ и задачи В: $\left(f(x,t)\neq 0,\ \varphi(x)=0\right)$. Решение задачи А ищем в виде $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)\neq 0$. Подставляя в уравнение (6) (при $f(x,t)=0$) и условия (8)-(10), и разделяя переменные получаем следующую спектральную задачу

$$\left.\begin{cases}-k_1^2X''(x)+q(x)X(x), & -1<x<0\\ -k_2^2X''(x)+q(x)X(x), & 0<x<1\end{cases}\right\}=\lambda X(x), \tag{11}$$

$$\begin{cases}\alpha_1X'(-1)+\beta_1X(-1)=0,\\ \alpha_2X'(1)+\beta_2X(1)=0,\end{cases} \tag{12}$$

$$X(-0)=X(+0),\qquad k_1X'(-0)=k_2X'(+0), \tag{13}$$

Функция $T(t)$ является решением уравнения $T'(t)+\lambda T(t)=0$.

Предположим, что $q(x)=0$. Тогда общее решение уравнения (11) имеет вид

$$\begin{cases}X(x)=c_1\cos\mu_1x+c_2\sin\mu_1x, & -1<x<0,\\ X(x)=d_1\cos\mu_2x+d_2\sin\mu_2x, & 0<x<1,\end{cases} \tag{14}$$

где $\mu_i=\dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_i},\quad (i=1,2)$. (15)

Подставляя в граничные условия (12) и условия сопряжения (13) получим

$$\begin{cases}c_1\left(\alpha_1\mu_1\sin\mu_1+\beta_1\cos\mu_1\right)+c_2\left(\alpha_1\mu_1\cos\mu_1-\beta_1\sin\mu_1\right)=0\\ c_1\left(-\alpha_2\mu_2\sin\mu_2+\beta_2\cos\mu_2\right)+c_2\left(\alpha_2\mu_2\cos\mu_2+\beta_2\sin\mu_2\right)=0\end{cases} \tag{16}$$

Учитывая формулу (15), после громоздких, но несложных вычислений найдем характеристический определитель системы (16):

$$\Delta(\lambda)=\frac{\alpha_1\alpha_2}{k_1k_2}\lambda\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)-$$
$$-\left(\frac{\alpha_1\beta_2}{k_1}-\frac{\alpha_2\beta_1}{k_2}\right)\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)+\beta_1\beta_2\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)=0, \tag{17}$$

Рассмотрим всевозможные случаи.

1) Пусть $\alpha_1\alpha_2\neq 0$, $\dfrac{\alpha_1\beta_2}{k_1}-\dfrac{\alpha_2\beta_1}{k_2}=0$, $\beta_1\beta_2=0$. Тогда из уравнения (17) имеем

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{k_1k_2}\lambda\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)=0,$$

При $\lambda = 0$ уравнения (11) имеет только постоянное решение. На самом деле общее решение в этом случае имеют вид $\begin{cases} X(x) = c_1 x + c_2, & -1 < x < 0, \\ X(x) = d_1 x + d_2, & 0 < x < 1, \end{cases}$

Из граничных условий и условий сопряжение имеем

$$\begin{cases} c_1 = 0, \quad d_1 = 0, \\ c_2 = d_2, \quad k_1 c_1 = k_2 d_1, \end{cases}$$

Характеристический определитель системы равна $\Delta(\lambda) = 0,$ Итак $X(x) = C = const, \ -1 < x < 1.$

Из уравнения $\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1} + \frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right) = 0,$ найдем собственные значения. $\lambda_n = \left(\frac{\pi n k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)^2,$ где $n \in Z$.

Нетрудно найти, что этим собственным значениям соответствуют следующие собственные функции.

$$X_n(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi n k_2 (x+1)}{k_1 + k_2}\right), & -1 < x < 0, \\ (-1)^n \sin\left(\frac{\pi n k_1 (x-1)}{k_1 + k_2}\right), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

2) Если $\alpha_1 \alpha_2 = 0$, $\frac{\alpha_1 \beta_2}{k_1} - \frac{\alpha_2 \beta_1}{k_2} = 0$, $\beta_1 \beta_2 \neq 0$, то аналогичным образом можно найти собственные значения и собственные функции.

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)^2, \quad \text{где } n \in Z. \qquad X_n(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi n k_2 (x+1)}{k_1 + k_2}\right), & -1 < x < 0, \\ (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n k_1 (x-1)}{k_1 + k_2}\right), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

3) Теперь пусть $\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\dfrac{\alpha_1\beta_2}{k_1} - \dfrac{\alpha_2\beta_1}{k_2} \neq 0$, $\beta_1\beta_2 = 0$, то из уравнения (17) получим $\left(\dfrac{\alpha_1\beta_2}{k_1} - \dfrac{\alpha_2\beta_1}{k_2}\right)\sqrt{\lambda}\cos\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_1} + \dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right) = 0,$

Нетрудно проверить, что при $\lambda = 0$ уравнения (11) имеет только нулевое решение. А из уравнения $\cos\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_1} + \dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right) = 0,$ найдем собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)k_1k_2}{2(k_1+k_2)}\right)^2, \quad \text{где } n \in Z.$$

Для того чтобы найти собственные функции, рассмотрим два возможных случая. В случае, если $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \neq 0,\ \ \beta_1 \neq 0,\ \beta_2 = 0,$ собственные функции имеют вид

$$X_n(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi(2n+1)k_2(x+1)}{2(k_1+k_2)}\right), & -1 < x < 0, \\ (-1)^n \cos\left(\dfrac{\pi(2n+1)k_1(x-1)}{2(k_1+k_2)}\right), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

А в случае $\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 = 0,\ \ \beta_1 = 0,\ \beta_2 \neq 0,$ собственные функции будут равны

$$X_n(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi(2n+1)k_2(x+1)}{2(k_1+k_2)}\right), & -1 < x < 0, \\ (-1)^{n+1} \sin\left(\dfrac{\pi(2n+1)k_1(x-1)}{2(k_1+k_2)}\right), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

4) Рассмотрим случай $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, $\dfrac{\alpha_1\beta_2}{k_1} - \dfrac{\alpha_2\beta_1}{k_2} \neq 0$, $\beta_1\beta_2 = 0$, то из уравнения (17) имеем $\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{k_1k_2}\lambda\sin\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_1} + \dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right) - \left(\dfrac{\alpha_1\beta_2}{k_1} - \dfrac{\alpha_2\beta_1}{k_2}\right)\sqrt{\lambda}\cos\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_1} + \dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right) = 0,$

Нетрудно проверить, что при $\lambda = 0$ уравнения (11) имеет только нулевое решение.
В этом случае собственные значения будут решениями уравнения

$$tg\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)=\frac{k_2\beta_2}{\alpha_2\sqrt{\lambda}}\text{, если }\quad \beta_1=0,\quad \beta_2\neq 0,$$

$$tg\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)=\frac{k_1\beta_1}{\alpha_1\sqrt{\lambda}},\quad\text{если }\quad \beta_1\neq 0,\quad \beta_2=0,$$

Найти явно собственные значения и собственные функции не удается.

5) В случае $\alpha_1\alpha_2=0$, $\dfrac{\alpha_1\beta_2}{k_1}-\dfrac{\alpha_2\beta_1}{k_2}\neq 0$, $\beta_1\beta_2\neq 0$, рассуждая аналогичным образом можно убедиться, что собственные значения будут решениями уравнения

$$ctg\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)=-\frac{k_2\beta_2}{\alpha_2\sqrt{\lambda}}\text{, если }\quad \alpha_1=0,\quad \alpha_2\neq 0,$$

$$ctg\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)=\frac{k_1\beta_1}{\alpha_1\sqrt{\lambda}},\quad\text{если }\quad \alpha_1\neq 0,\quad \alpha_2=0,$$

6) В случае $\alpha_1\alpha_2\neq 0$, $\dfrac{\alpha_1\beta_2}{k_1}-\dfrac{\alpha_2\beta_1}{k_2}=0$, $\beta_1\beta_2\neq 0$, из уравнения (17) имеем

$$\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{k_1k_2}\lambda+\beta_1\beta_2\right)\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)=0,$$

Если $\sin\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\dfrac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)=0,$ то собственные значения равны $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n k_1k_2}{k_1+k_2}\right)^2$.

После громоздких вычислений можно найти собственные функций. Они имеют вид

$$X_n(x)=\begin{cases}\beta_1\sin\left(\dfrac{\pi n k_2(x+1)}{k_1+k_2}\right)-\dfrac{\alpha_1\lambda n k_2}{k_1+k_2}\cos\left(\dfrac{\pi n k_2(x+1)}{k_1+k_2}\right), & -1<x<0,\\ (-1)^{n-1}\left(\dfrac{\alpha_1\pi n k_2}{(k_1+k_2)}\cos\left(\dfrac{\pi n k_1(x-1)}{k_1+k_2}\right)-\beta_1\sin\left(\dfrac{\pi n k_1(x-1)}{k_1+k_2}\right)\right), & 0<x<1,\end{cases}$$

Если $\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{k_1k_2}\lambda+\beta_1\beta_2=0,\Rightarrow\lambda=-\dfrac{\beta_1\beta_2k_1k_2}{\alpha_1\alpha_2}$

Учитывая $\frac{\alpha_1\beta_2}{k_1}-\frac{\alpha_2\beta_1}{k_2}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta_1 k_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2 k_2}{\alpha_2}$, получим

$\lambda=-\left(\frac{\beta_1 k_1}{\alpha_1}\right)^2=-\left(\frac{\beta_2 k_2}{\alpha_2}\right)^2$ Тогда соответствующая собственная функция равна

$$X_n(x)=\begin{cases} e^{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}x}, & -1<x<0,\\ e^{-\frac{\beta_2}{\alpha_2}x}, & 0<x<1, \end{cases}$$

7)Последний случай, когда $\alpha_1\alpha_2\neq 0$, $\frac{\alpha_1\beta_2}{k_1}-\frac{\alpha_2\beta_1}{k_2}\neq 0$, $\beta_1\beta_2\neq 0$, приводит нас к уравнению (17). Введем обозначения:

$$g(\lambda)=\frac{\alpha_1\alpha_2}{k_1k_2}\lambda\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right),$$

$$\psi(\lambda)=-\left(\frac{\alpha_1\beta_2}{k_1}-\frac{\alpha_2\beta_1}{k_2}\right)\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right)+\beta_1\beta_2\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{k_1}+\frac{\sqrt{\lambda}}{k_2}\right),$$

По теореме Руше, если выполняется неравенство $|g(\lambda)|>|\psi(\lambda)|$, то функции $g(\lambda)$ и $g(\lambda)+\psi(\lambda)$ имеют одинаковое число нулей.

Можно показать, что задача (11)-(13) является самосопряженной, тогда система собственных функций образует базис. На основании этого решение задачи (6)-(10) может быть построено методом разделения переменных в виде ряда $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$

Используем следующие обозначения для отдельных частей области Ω: $\Omega_0=\{(x,t):-1<x<0,\,0<t<T\}$, $\Omega_1=\{(x,t):0<x<1,\,0<t<T\}$.

Таким образом имеет место следующая

Теорема. Для любых функций $\varphi(x)\in C[-1,1]\cap C^2[-1,0]\cap C^2[0,1]$ и $f(x,t)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\overline{\Omega}_0)\cap C^2(\overline{\Omega}_1)$ удовлетворяющих краевым условиям (8) и условиям сопряжения (9)-(10), существует единственное классическое решение $u(x,t)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}(\overline{\Omega}_0)\cap C^{2,1}(\overline{\Omega}_1)$ задачи (6)-(10).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РК (грант AP08855352)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А.А. Параболические уравнения с разрывными коэффициентами.//ДАН СССР, 1958, т.121, №2, с.225-228.
2 Ким Е.И., Баймуханов Б.Б. О распределении температуры в кусочно-однородной полубесконечной пластинке.// ДАН СССР,1961,т. 140, №2, с.333-336.
3 Камынин Л.И. О решении краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами.// ДАН СССР, 1961, т.139, №5, с.1048-1051.
4 Камынин Л.И. О решении IV и V краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка в криволинейной области // Журн.вычисл.математики и мат.физики.-1969.-Т.9.-№3.-с.558-572.
5 Камынин Л.И. О методе потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами.//ДАН СССР, 1962, т.145,№6, с.1213-1216.
6. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов.//Известия вузов. Математика – 1964. – №2. – с. 82-93.
7. Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$. // Доклады АН СССР – 1962. – Т. 144, №5. – с. 981-984.
8. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. часть III, Спектральные операторы. – Нью Йорк. – 1974, 662 с.
9. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. //Дифференциальные уравнения, 1979. – Т.15.-№7. с. 1284–1295.
10. Ионкин Н.И. Решение одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.// Дифференциальные уравнения, 1977.-Т.13.-№2. С. 294-304.
11. Ионкин Н.И., Морозова В.А. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. //Дифференциальные уравнения, 2000. – Т.36.-№7. с. 884–888.
12. Оразов И., Садыбеков М.А. Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам.// Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, №1. – с. 180-186.
13. Оразов И., Садыбеков М.А. Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла. // Известия вузов. Математика. – 2012. – №2. – с. 70–75.
14. Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2017. – Vol. 216. – P. 330–348.
15. Orazov I., Sadybekov M.A. On an inverse problem of mathematical modeling of the extraction process of polydisperse porous materials. – AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1676, 020005. – 4 pp.
16. Orazov I., Sadybekov M.A. One-dimensional Diffusion Problem with not Strengthened Regular Boundary Conditions // AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1690, 040007. – 6pp.

REFERENCES

1. Samarskiy A.A. Parabolicheskiye uravneniya s razryvnymi koeffitsiyentami.//DAN SSSR, 1958, t.121, №2, s.225-228.
2 Kim Ye.I., Baymukhanov B.B. O raspredelenii temperatury v kusochno-odnorodnoy polubeskonechnoy plastinke.// DAN SSSR,1961,t. 140, №2, s.333-336.
3 Kamynin L.I. O reshenii krayevykh zadach dlya parabolicheskogo uravneniya s razryvnymi koeffitsiyentami.// DAN SSSR, 1961, t.139, №5, s.1048-1051.
4 Kamynin L.I. O reshenii IV i V kraevykh zadach dlya odnomernogo parabolicheckogo uravneniya vtorogo poryadka v krivolineynoy oblacti // Zhurn.vychicl.matematiki i mat.fiziki.-1969.-T.9.-№3.-s.558-572.
5 Kamynin L.I. O metode potentsialov dlya parabolicheskogo uravneniya s razryvnymi koeffitsiyentami.//DAN SSSR, 1962, t.145,№6, s.1213-1216.
6 Kesel'man G.M. O bezuslovnoy skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam nekotorykh differentsial'nykh operatorov.//Izvestiya vuzov. Matematika – 1964. – №2. – s. 82-93.
7 Mikhaylov V.P. O bazisakh Rissa v $L_2(0,1).$ // Doklady AN SSSR – 1962. – T. 144, №5. – s. 981-984.
8 Danford N., Shvarts Dzh.T. Lineynyye operatory. chast' III, Spektral'nyye operatory. – N'yu York. – 1974, 662 s.
9 Ionkin N.I., Moiseyev Ye.I. O zadache dlya uravneniya teploprovodnosti s dvutochechnymi krayevymi usloviyami. //Differentsial'nyye uravneniya, 1979. – T.15.-№7. s. 1284–1295.
10 Ionkin N.I. Resheniye odnoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim krayevym usloviyem.// Differentsial'nyye uravneniya, 1977.-T.13.-№2. S. 294-304.
11 Ionkin N.I., Morozova V.A. Dvumernoye uravneniye teploprovodnosti s nelokal'nymi krayevymi usloviyami. //Differentsial'nyye uravneniya, 2000. – T.36.-№7. s. 884–888.
12 Orazov I., Sadybekov M.A. Ob odnom klasse zadach opredeleniya temperatury i plotnosti istochnikov tepla po nachal'noy i konechnoy temperaturam.// Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. – 2012. – T. 53, №1. – s. 180-186.
13 Orazov I., Sadybekov M.A. Ob odnoy nelokal'noy zadache opredeleniya temperatury i plotnosti istochnikov tepla. // Izvestiya vuzov. Matematika. – 2012. – №2. – s. 70–75.
14. Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2017. – Vol. 216. – P. 330–348.
15. Orazov I., Sadybekov M.A. On an inverse problem of mathematical modeling of the extraction process of polydisperse porous materials. – AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1676, 020005. – 4 pp.
16. Orazov I., Sadybekov M.A. One-dimensional Diffusion Problem with not Strengthened Regular Boundary Conditions // AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1690, 040007. – 6pp.