УДК 517.956
МРНТИ 27.31.15

Б.Х.ТУРМЕТОВ [1] , И.Г. САЛИХАНОВА[2]
[1]доктор физико-математических наук, профессор,
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2]магистрант, E-mail: indi.salikhanova@mail.ru
Международный казахско-турецкий университет им. Ходжа Ахмеда Ясави

О РАЗРЕШИМОСТИ ДРОБНЫХ АНАЛОГОВ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Абстракт. В данной статье мы изучаем вопросы разрешимости некоторых краевых задач для нелокального бигармонического уравнения. В качестве граничных операторов рассматриваются дифференциальные операторы дробного порядка в смысле Миллера-Росса. Рассматриваемые задачи являются обобшениями известных задач Неймана.

Ключевые слова. нелокальное уравнение, задача Неймана, бигармоническое уравнение, краевая задача, дробная производная, оператор Миллера-Росса.

Б.Х.ТУРМЕТОВ [1] , И.Г. САЛИХАНОВА[2]
[1]физика-математика ғылымдарының кандидаты, профессор,
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2]магистрант, E-mail: indi.salikhanova@mail.ru
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

БЕЙЛОКАЛ БИГАРМОНИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН НЕЙМАН ЕСЕБІНІҢ БӨЛШЕК РЕТТІ АНАЛОГТАРЫНЫҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа.Бұл мақалада біз бейлокал бигармониялық теңдеу үшін кейбір шеттік есептердің шешімділігі мәселелерін зерттейміз. Шекаралық операторлар есебінде Миллер-Росс мағнасындағы бөлшек ретті дифференциалдық операторлар қарастырылады. Қарастырылатын есептер белгілі Нейман есебінің жалпыламасы болып табылады.

Кілт сөздер. бейлокал теңдеу, Нейман есебі, бигармониялық теңдеу, шеттік есеп, бөлшек ретті туынды, Миллер-Росс операторы.

B.KH.TURMETOV[1] , I.G.SALIKHANOVA[2]
[1]doctor of physical and mathematical sciences, professor,E-mail:batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2] master student, E-mail: indi.salikhanova@mail.ru
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University

SOLVABILITY OF FRACTIONAL ANALOGUES OF THE NEUMANN PROBLEM FOR A NONLOCAL BIHARMONIC EQUATION

Abstract. In this article we study the solvability of some boundary value problems for nonlocal biharmonic equations. As a boundary operator we consider the differentiation operator of fractional order in the Miller-Ross sense. This problem is a generalization of the well-known Neumann problems.

Keywords. nonlocal equation, biharmonic equation, boundary value problems, fractional derivative, Miller-Ross operator.

Введение

Уравнения, в которые входят неизвестная функция и ее производные, вообще говоря, для разных значений аргументов называются нелокальными дифференциальными уравнениями. Примером нелокальных уравнений являются дифференциальные уравнения с инволюцией [1]. Отметим, что краевые и начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений с инволюцией исследовались в работах [2–8].

Если $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in R^n$, то простейшим примером инволюции является отображение вида $Ix=\left(-x_1,-x_2,...,-x_n\right)$. Пусть S – действительная ортогональная матрица, т.е. $S\cdot S^T=E$. Предположим также, что существует такое натуральное $l\in N$ что $S^l=E$. Используя отображения такого типа в работе [9] был введен нелокальный аналог оператора Лапласа и для соответствующего нелокального уравнения Пуассона исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач. Далее, в работах [10,11] для нелокального бигармонического уравнения с отображениями типа S были исследованы вопросы разрешимости краевых задач с граничными операторами дробного порядка с производными Адамара и Капуто.

Настоящая работа является продолжением этих исследований, где в качестве граничных операторов будут рассмотрены производные типа Росс-Миллера.

Переходим к постановке задач. Пусть $\Omega=\left\{x\in R^n:|x|<1\right\}$ – единичный шар, а $\partial\Omega$ – единичная сфера и $n\geq 2$. Предположим, что $u(x)$ - гладкая функция в области Ω, $r=|x|$, $\theta=x/|x|$. Для любого $\alpha>0$ выражение

$$J^{\alpha}[u](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left(r-\tau\right)^{\alpha-1}u(\tau\theta)d\tau$$

называется оператором интегрирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля [12]. В дальнейшем будем считать $J^0[u](x)=u(x)$.

Пусть $m-1<\alpha\leq m, m=1,2,...$, $\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^k u}{\partial r^k}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial r^{k-1}}\right), k=1,2,...$. Следующие выражения

$${}_{RL}D^{\alpha}[u](x)=\frac{\partial^m}{\partial r^m}J^{m-\alpha}[u](x),\quad {}_{C}D^{\alpha}[u](x)=J^{m-\alpha}\left[\frac{\partial^m u}{\partial r^m}\right](x)$$

называются производными порядка α в смысле Римана–Лиувилля и Капуто.

В дальнейщем мы будем рассматривать оператор следующего вида

$$D_p^{\alpha}[u](x)=\frac{\partial^{m-p}}{\partial r^{m-p}}J^{m-\alpha}\frac{\partial^p}{\partial r^p}u(x), p=0,1,...,m$$.

Данный оператор называется производной порядка α в смысле Росс-Миллера [12]. При значении $p=0$ мы получаем $D_0^\alpha[u](x) ={}_{RL} D^\alpha[u](x)$ и соответственно при $p=m$ получаем $D_m^\alpha[u](x) ={}_C D^\alpha[u](x)$.

Пусть $a_j, j=1,2,...,l$ - действительные числа. Введем оператор

$$Lu(x) \equiv \sum_{j=1}^{l} a_j \Delta^2 u\left(S^{j-1}x\right).$$

Рассмотрим в области Ω следующие задачи.

Задача 1. Пусть $0<\alpha<2$. Найти функцию $u(x)$ из класса $C^4(\Omega)\cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, для которой $r^{\alpha+k}D_1^{\alpha+k}\left[u\right](x)\in C\left(\bar{\Omega}\right), k=0,1$, удовлетворяющее условиям

$$Lu(x) = f(x), x\in\Omega, \tag{1}$$

$$D_1^\alpha\left[u\right](x)=\varphi_1(x),\ x\in\partial\Omega, \tag{2}$$

$$D_1^{\alpha+1}\left[u\right](x)=\varphi_2(x),\ x\in\partial\Omega. \tag{3}$$

Задача 2. Пусть $0<\alpha\le 2$. Найти функцию $u(x)$ из класса $C^4(\Omega)\cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, для которой $r^{\alpha+k}D_2^{\alpha+k}\left[u\right](x)\in C\left(\bar{\Omega}\right), k=0,1$, удовлетворяющее уравнению (1) и условиям

$$D_2^\alpha\left[u\right](x)=\varphi_1(x),\ x\in\partial\Omega, \tag{4}$$

$$D_2^{\alpha+1}\left[u\right](x)=\varphi_2(x),\ x\in\partial\Omega. \tag{5}$$

Если $x\in\partial\Omega$, то для оператора $r\dfrac{\partial}{\partial r}$ имеет место следующее равенство

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial \nu},$$

где ν вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Кроме того, для всех $x\in\partial\Omega$ имеет место равенство

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)...\left(r\frac{\partial}{\partial r}-k+1\right)=\frac{\partial^k}{\partial \nu^k}, k=1,2,...$$

Поэтому в случае $\alpha = 1$ для всех $x \in \partial\Omega$ получаем

$$D_j^1 u(x) = \frac{\partial^{1-j}}{\partial r^{1-j}} J^0 \frac{\partial^j}{\partial r^j} u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \nu}, j = 0,1,$$

$$r^2 D_j^2 u(x) = r^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial r^2} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \nu^2}, j = 0,1.$$

Следовательно, при значениях $\alpha = 1$ или $\alpha = 2$ задача (1) - (3) представляет собой аналог задачи Неймана для уравнения (1).

Отметим, что задача 1 в случае $\alpha = 0$ (задача Дирихле) и в случае $\alpha = 1$ (задача Неймана) изучена в работе [10].

Далее, введем обозначения

$$B_j^\alpha[u](x) = r^\alpha D_j^\alpha[u](x), 0 < \alpha \le 1,$$

$$B^{-\alpha}[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} u(sx)ds, 0 < \alpha \le 1.$$

Отметим, что некоторые свойства и применение операторов B^α и $B^{-\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$ изучены в работе [13]. Доказано, что в классе гармонических функций эти операторы являются взаимно обратными. Очевидно, что эти свойства остаются верными и в классе бигармонических функций.

2.Свойства инволютивных преобразований

Сначала приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Рассмотрим следующую матрицу A, зависящую от чисел $a_1, a_2, ..., a_l$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_l \\ a_l & a_1 & \dots & a_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

В работе [9] доказаны следующие утверждения

Лемма 1. Пусть $\lambda_1 = e^{i\frac{2\pi}{l}}$ - примитивный корень степени l из единицы. Тогда $\det A = \prod_{k=1}^{l} \mu_k$, где $\mu_k = a_1\lambda_0^k + ... + a_l\lambda_{l-1}^k$, $\lambda_k = e^{i\frac{2\pi k}{l}}$, $k = 1, \dots, l$.

Лемма 2. Пусть $\mu_k = a_1\lambda_0^k + \ldots + a_l\lambda_{l-1}^k \neq 0$, $k = 1, \ldots, l$, где $\{\lambda_k\}$ - корни степени l из единицы, тогда решение системы алгебраических уравнений $Ab = g$ можно записать в виде

$$b = (b)_{i=1,\ldots,l} = \frac{1}{l}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\mu_k}\sum_{j=1}^{l}\lambda_k^{i-j}g_j\right)_{i=1,\ldots,l}.$$

Лемма 3. Матрица A^{-1} имеет структуру матрицы A

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_l \\ a_l & a_1 & \ldots & a_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_l \\ b_l & b_1 & \ldots & b_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_1 \end{pmatrix},$$

где коэффициенты $b_j, j = 1, 2, \ldots, l$ определяются из равенства

$$b_j = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{\lambda_k^{j-1}\mu_k}.$$

Лемма 4. Оператор $I_S u(x) = u(Sx)$ и оператор Лапласа Δ коммутируют.

Следствие 1. Если функция $u(x)$ - бигармоническая в Ω, то функция $u(Sx) = I_S u(x)$ также является бигармонической в Ω.

Следствие 2. Если функция $u(x)$ - бигармоническая в Ω, то она удовлетворяет однородному уравнению (1) в Ω.

Лемма 5. Если функция $u \in C^4(\Omega)$ удовлетворяет однородному уравнению (1), то при выполнении условий $\mu_k = a_1\lambda_0^k + \ldots + a_l\lambda_{l-1}^k \neq 0$, $k = 1, \ldots, l$ она является бигармонической в области Ω.

Доказательство. Предположим, что функция $u(x)$ принадлежит классу $C^4(\Omega)$ и удовлетворяет однородному уравнению (1). Рассмотрим функцию

$$v(x) = \sum_{k=1}^{l} a_k u(S^{k-1}x). \tag{6}$$

Так как $u \in C^4(\Omega)$, то функция $v(x)$ также принадлежит классу $C^4(\Omega)$ и для всех $x \in \Omega$ выполняется равенство $\Delta^2 v(x) = 0$. Следовательно, функция $v(x)$ является бигармонической в области Ω. Тогда по утверждению следствия 1 функции $v(S^k x), k = 0, 1, \ldots, l-1$ также являются бигармоническими в области Ω.

Далее, если в равенстве (6) меняем точку x на $S^k x, k = 1, 2, ..., l$, то в силу условия $S^l = E$, для функций $u(x), u(Sx), ..., u(S^{l-1}x)$ получаем систему алгебраических уравнений вида

$$\begin{pmatrix} v(x) \\ v(Sx) \\ \vdots \\ v(S^{l-1}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_l \\ a_l & a_1 & ... & a_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ u(Sx) \\ \vdots \\ u(S^{l-1}x) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

По условию леммы выполняются неравенства $\mu_k = a_1\lambda_0^k + ... + a_l\lambda_{l-1}^k \neq 0$, $k = 1, \ldots, l$. Тогда $\det(A) \neq 0$ и система (7) имеет единственное решение. Далее, воспользуемся утверждениями лемм 2 и 3 при $b = \left(u(x), u(Sx), ..., u(S^{l-1}x)\right)^T$ и $g = \left(v(x), v(Sx), ..., v(S^{l-1}x)\right)^T$. Из этих лемм следует, что

$$u(x) = \sum_{j=1}^{l} b_j v(S^{j-1}x) = b_1 v(x) + b_2 v(Sx) + ... + b_l v(S^{l-1}x). \quad (8)$$

Так как функции $v(S^k x)$ при $k = 0, 1, ..., l-1$ являются бигармоническими в Ω, то функция $u(x)$ из (8) также является бигармонической в области Ω. Лемма доказана.

3.Исследование единственности решения основных задач.

Сначала мы исследуем единственность решение задачи (1)-(3).

На основании леммы 5 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha \leq 2$, $\mu_k = a_1\lambda_0^k + ... + a_l\lambda_{l-1}^k \neq 0$, при $k = 1, \ldots, l$ и решение задач 1 и 2 существуют. Тогда

1) если $0 < \alpha < 2$ и $j = 1$, то решение задачи 1 единственно с точностью постоянного слагаемого;

2) если $1 < \alpha \leq 2$ и $j = 2$, то решение задачи 2 единственно с точностью до полиномов первого порядка.

Доказательство. Пусть $u(x)$ - решение однородной задачи (1)-(3). Если $\mu_k = a_1\lambda_0^k + ... + a_l\lambda_{l-1}^k \neq 0$, при $k = 1, \ldots, l$, то по лемме 2 $D = \det A \neq 0$. Тогда по лемме 5 функция $u(x)$ является бигармонической в области Ω и удовлетворяет однородным условиям (2) и (3). Следовательно, функция $u(x)$ - решение следующей задачи

$$\Delta^2 u(x) = 0, x \in \Omega; \ D_j^\alpha \left[u\right]\left(x\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0, D_j^{\alpha+1}\left[u\right]\left(x\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

В работе [14] для однородной задачи (9) доказано следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть $0 < \alpha \leq 2, j = 1, 2$ и функция $u(x)$ является решением задачи (9).

Тогда

1) если $0<\alpha<2$ и $j=1$, то решение задачи (9) единственно с точностью постоянного слагаемого;

2) если $1<\alpha\le 2$ и $j=2$, то решение задачи (9) единственно с точностью до полиномов первого порядка.

Из утверждения этой леммы следует доказательство настоящей теоремы. Теорема доказана.

4.Существование решение задачи 1.

В этом пункте мы приведем основное утверждение относительно существования решения задачи 1. В дальнейшем всюду будем считать $n\neq 2$ и $n\neq 4$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $0<\alpha<2$, $\mu_k=a_1\lambda_0^k+...+a_l\lambda_{l-1}^k\neq 0, k=1,...,l$, $0<\lambda<1$, $f(x)\in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ и $\varphi_1(x)\in C^{\lambda+4}(\partial\Omega)$, $\varphi_1(x)\in C^{\lambda+3}(\partial\Omega)$. Тогда

1) если $0<\alpha\le 1$, то задача 1 имеет решение тогдо и только тогда когда выполняется условие

$$\left(\sum_{k=1}^{l}a_k\right)\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(x)+(\alpha-2)\varphi_1(x)\right]dS_x=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)f_{1,\alpha}(x)dx+$$

$$+\frac{1-\alpha}{(n-2)(n-4)}\int_{\Omega}\left(|x|^{4-n}-1+\frac{4-n}{2}(1-|x|^2)\right)f_{1,\alpha}(x)dx \quad ; \qquad (10)$$

2) если $1<\alpha<2$, то задача 1 имеет решение тогдо и только тогда когда выполняется условие

$$\left(\sum_{k=1}^{l}a_k\right)\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(x)+(\alpha-2)\varphi_1(x)\right]dS_x=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+3\right)f_{2,\alpha}(x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)f_{2,\alpha}(x)dx+\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(n-2)(n-4)}\int_{\Omega}\left(|x|^{4-n}-1+\frac{4-n}{2}(1-|x|^2)\right)f_{2,\alpha}(x)dx, \qquad (11)$$

где

$$f_{1,\alpha}(x)=\frac{r^{\alpha-5}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r(r-\tau)^{1-\alpha}\tau^4g(\tau\theta)d\tau, 0<\alpha<1, f_{1,1}(x)=f(x),$$

$$f_{2,\alpha}(x)=\frac{r^{\alpha-6}}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^r(r-\tau)^{1-\alpha}\tau^4f(\tau\theta)d\tau, 1<\alpha<2, f_{2,2}(x)=f(x).$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и принадлежит классу $C^{\lambda+4}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Пусть решение задачи 1 существует. Предполагая, что функция $u(x)$ является решением задачи 1 построим по формуле (6) функцию $v(x)$. Находим условия которым удовлетворяет данная функция. Если применим к равенству (6) оператор Δ^2, то в силу выполнения уравнения (1), получаем

$$\Delta^2 v(x) = \sum_{k=1}^{l} a_k \Delta^2 u(S^{k-1}x) = f(x), x \in \Omega.$$

Кроме того, в силу условий (2) и (3) имеем

$$r^{\alpha} D_1^{\alpha}\left[v\right](x)\Big|_{\partial\Omega} = \sum_{k=1}^{l} a_k\, r^{\alpha} D_1^{\alpha}\left[u\right](S^{k-1}x)\Big|_{\partial\Omega} = \sum_{k=1}^{l} a_k\, \varphi_1(S^{k-1}x)\Big|_{\partial\Omega} \equiv g_1(x),$$

$$r^{\alpha+1} D_1^{\alpha+1}\left[v\right](x)\Big|_{\partial\Omega} = \sum_{k=1}^{l} a_k\, r^{\alpha+1} D_1^{\alpha+1}\left[u\right](S^{k-1}x)\Big|_{\partial\Omega} = \sum_{k=1}^{l} a_k\, \varphi_2(S^{k-1}x)\Big|_{\partial\Omega} \equiv g_2(x).$$

Таким образом, если функция $u(x)$ является решением задачи 1, то функция $v(x)$ построенная через $u(x)$ по формуле (6) является решением следующей задачи

$$\Delta^2 v(x) = f(x), x \in \Omega; D_1^{\alpha}\left[v\right](x)\Big|_{\partial\Omega} = g_1(x), D_1^{\alpha+1}\left[v\right](x)\Big|_{\partial\Omega} = g_2(x), \tag{12}$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ определяются из равенств

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_1(S^{k-1}x),\ g_2(x) = \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_2(S^{k-1}x). \tag{13}$$

В работе [14] найдены условия разрешимости задачи (12).

Лемма 7. Пусть $0<\alpha<2$, функции $f(x), g_1(x)$ и $g_2(x)$ достаточно гладкие. Тогда

1) если $0<\alpha\le 1$, то для разрешимости задачи (12) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right) f_{1,\alpha}(y)dy + \frac{1-\alpha}{(n-2)(n-4)}\int_{\Omega}\left(|y|^{4-n} - 1 + \frac{4-n}{2}(1-|y|^2)\right) f_{1,\alpha}(y)dy =$$

$$\int_{\partial\Omega}\left[g_2(y) + (\alpha-2)g_1(y)\right]dS_y, \tag{14}$$

где

$$f_{1,\alpha}(y) = \frac{r^{\alpha-5}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r (r-\tau)^{1-\alpha}\tau^4 f(\tau\theta)d\tau, 0<\alpha<1, f_{1,1}(y) = f(y).$$

2) если $1<\alpha<2$, то для разрешимости задачи (10) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(1-|x|^{2}\right)f_{1,\alpha}(y)dy+\frac{1-\alpha}{(n-2)(n-4)}\int_{\Omega}\left(|y|^{4-n}-1+\frac{4-n}{2}(1-|y|^{2})\right)f_{1,\alpha}(y)dy=$$

$$\int_{\partial\Omega}\left[g_2(y)+(\alpha-2)g_1(y)\right]dS_y\quad, \tag{15}$$

Если решение задачи (12) существует, то оно представима в виде

$$v(x)=C+B^{-\alpha}\left[w\right](x),$$

где функция $w(x)$ является решением следующей задачи Дирихле

$$\Delta^2 w(x)=|x|^{-4}\;B_1^{\alpha}\left[|x|^4\;f\right](x),x\in\Omega;w(x)\big|_{\partial\Omega}=g_1(x),\frac{\partial w(x)}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega}=g_2(x)+\alpha g_1(x).$$

Далее, для функции $\varphi(Sx)$ справедливо равенство (см., например [15])

$$\int_{\partial\Omega}\varphi(Sx)dS_x=\int_{\partial\Omega}\varphi(x)dS_x.$$

Отсюда используя представление функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ имеем

$$\int_{\partial\Omega}\left[g_2(y)+(\alpha-2)g_1(y)\right]dS_y=\int_{\partial\Omega}\left[\sum_{k=1}^{l}a_k\varphi_1(S^{k-1}y)+(\alpha-2)\sum_{k=1}^{l}a_k\varphi_2(S^{k-1}y)\right]dS_y=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}a_k\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(S^{k-1}y)+(\alpha-2)\varphi_1(S^{k-1}y)\right]dS_y=\sum_{k=1}^{l}a_k\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(y)+(\alpha-2)\varphi_1(y)\right]dS_y=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{l}a_k\right)\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(y)+(\alpha-2)\varphi_1(y)\right]dS_y.$$

Из этого равенства следует, что условия (14) и (15) можно переписать в виде (10) и (11) соответственно. Таким образом, мы доказали, что если решение задачи 1 существует, то необходимо выполнения условий (10) и (11). Далее, мы покажем, что эти условия являются и достаточным для существования решение задачи 1. Действительно, предположим, что выполняются условия (10) и (11). Если функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ определяются по формуле (13), то для них выполняются условия (14) и (15). Тогда решение задачи (12) с граничными функциями $g_1(x)$ и $g_2(x)$ существует. Покажем, что функция

$$u(x)=\sum_{j=1}^{l}b_j v(S^{j-1}x). \tag{16}$$

удовлетворяет всем условиям задачи 1. Действительно, применяя к функции (17) оператор Δ^2 получаем

$$\Delta^2 u(x)=\sum_{j=1}^{l} b_j \Delta^2 v(S^{j-1}x)=\sum_{j=1}^{l} b_j f(S^{j-1}x)$$

Отсюда

$$Lu(x)=\sum_{k=1}^{l} a_k \Delta^2 u(S^{k-1}x)=\sum_{k=1}^{l} a_k \sum_{j=1}^{l} b_j f(S^{k+j-2}x)=\sum_{k=1}^{l} a_k \sum_{j=1}^{l} b_{j-k+1} f(S^{j-1}x)=$$

$$=\sum_{j=1}^{l} f(S^{j-1}x)\sum_{k=1}^{l} a_k b_{j-k+1}=f(x).$$

Таким образом мы показали, что функция $u(x)$ из равенства (16) удовлетворяет условию (1). Проверим выполнение граничных условий задачи 1. Сначала заметим, что для функции $v(x)$ справедливо равенство

$$D_1^{\alpha}[v](x)\Big|_{\partial\Omega}=g_1(x), D_1^{\alpha+1}[v](x)\Big|_{\partial\Omega}=g_2(x)$$

$$=r^{\alpha}D_1^{\alpha}\left[C\right]\Big|_{\partial\Omega}+r^{\alpha}D_1^{\alpha}\left[B^{-\alpha}[w]\right](x)\Big|_{\partial\Omega}=w(x)\Big|_{\partial\Omega}=g_1(x).$$

Тогда

$$D_1^{\alpha}[u](x)\Big|_{\partial\Omega}=\sum_{j=1}^{l} b_j D_1^{\alpha} v(S^{j-1}x)\Bigg|_{\partial\Omega}=\sum_{j=1}^{l} b_j g_1(S^{j-1}x)=\sum_{j=1}^{l} b_j \sum_{k=1}^{l} a_k \varphi_1(S^{k+j-2}x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{l} a_k \sum_{j=1}^{l} b_{j-k+1}\varphi_1(S^{j-1}x)=\sum_{j=1}^{l}\varphi_1(S^{j-1}x)\sum_{k=1}^{l} a_k b_{j-k+1}=\varphi_1(x).$$

Аналогично можно показать выполнение равенства

$$D_1^{\alpha+1}[u](x)\Big|_{\partial\Omega}=\varphi_2(x).$$

Теорема доказана.

Следствие 3. Если $\alpha=1$, то условие разрешимости задачи 1 имеет вид

$$\left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right]dS_x=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)f(x)dx.$$

5. Существование решение задачи 2.

Далее, исследуем существования решения задачи 2. Пусть функция $u(x)$ является решением задачи 2. Как и в случае задачи 1 построим по формуле (6) функцию $v(x)$. В этом случае функция $v(x)$ будет удовлетворят условием следующей задачи

$$\Delta^2 v(x) = f(x), x \in \Omega; D_2^{\alpha}\left[v\right](x)\Big|_{\partial\Omega} = g_1(x), D_2^{\alpha+1}\left[v\right](x)\Big|_{\partial\Omega} = g_2(x), \tag{18}$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ определяются из равенств (13)

В работе [14] доказана следующее утверждение.

Лемма 8. Пусть $1 < \alpha \le 2$, функции $f(x), g_1(x)$ и $g_2(x)$ достаточно гладкие. Тогда для разрешимости задачи (18) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{\partial\Omega}\left[g_2(x) + (\alpha-2)g_1(x)\right]dS_x = (2-\alpha)\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)f_{2,\alpha}(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+3\right)f_{2,\alpha}(x)dx +$$

$$+\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(n-2)(n-4)}\int_{\Omega}\left(|x|^{4-n} - 1 + \frac{2-n}{2}(1-|x|^2)\right)f_{2,\alpha}(x)dx \tag{19}$$

и для всех $k = 1, 2, ..., n$

$$\int_{\partial\Omega} x_k\left[g_2(x) + (\alpha-3)g_1(x)\right]dS_x = \frac{1}{2}\int_{\Omega} x_k\left(1-|x|^2\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+4\right)f_{2,\alpha}(x)dx +$$

$$+\frac{2(2-\alpha)}{n(n-2)}\int_{\Omega} x_k\left(|x|^{2-n} - 1 + \frac{2-n}{2}(1-|x|^2)\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+4\right)f_{2,\alpha}(x)dx +$$

$$+\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{n(n-2)}\int_{\Omega} x_k\left(|x|^{2-n} - 1 + \frac{2-n}{2}(1-|x|^2)\right)f_{2,\alpha}(x)dx. \tag{20}$$

Используя представление функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ условия (19) и (20) перепишем относительно функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Как и в случае задачи 1 получаем

$$\int_{\partial\Omega}\left[g_2(x) + (\alpha-2)g_1(x)\right]dS_x = \left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right]dS_x,$$

$$\int_{\partial\Omega}\left[g_2(x) + (\alpha-3)g_1(x)\right]dS_x = \left(\sum_{k=1}^{l} a_k\right)\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(x) + (\alpha-3)\varphi_1(x)\right]dS_x.$$

Приведем основное утверждение относительно задачи 2.

Теорема 3. Пусть $1<\alpha\le 2$, $\mu_k=a_1\lambda_0^k+...+a_l\lambda_{l-1}^k\ne 0, k=1,...,l$, $0<\lambda<1$, $f(x)\in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ и $\varphi_1(x)\in C^{\lambda+4}(\partial\Omega), \varphi_1(x)\in C^{\lambda+3}(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условий

$$\left(\sum_{k=1}^{l}a_k\right)\int_{\partial\Omega}\left[\varphi_2(x)+(\alpha-2)\varphi_1(x)\right]dS_x=(2-\alpha)\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)f_{2,\alpha}(x)dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+3\right)f_{2,\alpha}(x)dx+$$

$$+\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(n-2)(n-4)}\int_{\Omega}\left(|x|^{4-n}-1+\frac{2-n}{2}(1-|x|^2)\right)f_{2,\alpha}(x)dx,$$

и для всех $k=1,2,...,n$

$$\left(\sum_{k=1}^{l}a_k\right)\int_{\partial\Omega}x_k\left[\varphi_2(x)+(\alpha-2)\varphi_1(x)\right]dS_x=\frac{1}{2}\int_{\Omega}x_k\left(1-|x|^2\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+4\right)f_{2,\alpha}(x)dx+$$

$$+\frac{2(2-\alpha)}{n(n-2)}\int_{\Omega}x_k\left(|x|^{2-n}-1+\frac{2-n}{2}(1-|x|^2)\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+4\right)f_{2,\alpha}(x)dx+$$

$$+\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{n(n-2)}\int_{\Omega}x_k\left(|x|^{2-n}-1+\frac{2-n}{2}(1-|x|^2)\right)f_{2,\alpha}(x)dx.$$

Следствие 4. Если $\alpha=2$, то условия разрешимости задачи 2 имеют вид

$$\left(\sum_{k=1}^{l}a_k\right)\int_{\partial\Omega}\varphi_2(x)\,dS_x=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+3\right)f(x)dx$$

и для всех $k=1,2,...,n$

$$\left(\sum_{k=1}^{l}a_k\right)\int_{\partial\Omega}x_k\varphi_2(x)\,dS_x=\frac{1}{2}\int_{\Omega}x_k\left(1-|x|^2\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+4\right)f(x)dx.$$

Работа выполнено при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант №AP08855810.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cabada, A.; Tojo, F.A.F. Differential Equations with Involutions. New York: Atlantis Press, 2015. DOI:https://doi.org/10.2991/978-94-6239-121-5_1.

2. Andreev, A.A. Analogs of Classical Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Deviating Argument // Differential Equations. – 2004. – V. 40. – P. 1192 – 1194. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f.

3. Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M. Initial - boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2019. – V. 14, No.3, - P.1 – 15. https://doi.org/10.1051/mmnp/2019014.

4. Ashyralyev A, Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – V.38. – P.1295-1304. https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

5. Ashyralyev A, Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – V.2015, No. 284. – P.1 – 8. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/284/ashyralyev.pdf.

6. Burlutskaya M.Sh, Khromov A.P. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2011. – V.51. – P. 2102 – 2114. https://doi.org /10.1134 /S0965542511120086.

7. Линьков А.В. Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением// Вестник СамГУ. 1999. № 2(12). С. 60 – 66. http://vestniksamgu.ssau.ru/est/1999web2/math/199920004.pdf.

8. Turmetov B. Kh., Kadirkulov B.J. An Inverse Problem for a Parabolic Equation with Involution // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, No.12. – P. 3006 –3015. DOI: 10.1134/S1995080221120350.

9. Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation // Turkish journal of mathematics. – 2019. – V.43, № 3. – P. 1604 – 1625. doi:10.3906/mat-1901-71.

10. Турметов Б.Х. О разрешимости некоторых краевых задач для нелокального бигармонического уравнения // Известия Международного казахско-турецкого университета имени Х.А.Ясави. Серия Математика,Физика, Информатика. – 2019. – № 2(9). – С. 81 - 102.

11.. Turmetov B. Kh., Karachik V.V., Muratbekova M. On a boundary value problem for the biharmonic equation with multiple involution // Mathematics. – 2021. – V. 9, No.17. –P. 1-23. https://doi.org/10.3390/math9172020

12. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam. – 2006. 523 p.

13. Karachik V. V., Turmetov B.Kh., Torebek B. T. On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications // Siberian Advances in Mathematics. – 2012. – V. 22, No. 2 . – P.115 – 134. DOI: 10.3103/s1055134412020046.

14. Turmetov B.Kh. Solvability of fractional analogues of the Neumann problem for a nonhomogeneous biharmonic equation // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. –V. 2015, No. 82. – P. 1–21. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/82/turmetov.pdf

15. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation // Mathematica Slovaca. – 2020. – V. 70, No. 2. – P.329 – 341. DOI: 10.1515/ms-2017-0355.