

Мамбетов С.А.¹

¹докторант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: samat.mambetov@ayu.edu.kz

УАҚЫТ-КЕҢІСТІК БОЙЫНША СИНГУЛЯРЛЫ-БЕЙЛОКАЛ ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ТУРА
ЕСЕП

DIRECT PROBLEM FOR THE SPACE-TIME SINGULAR-NONLOCAL DIFFUSION EQUATION
ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО СИНГУЛЯРНО-
НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФфуЗИИ

Аңдатпа. Бұл жұмыста кеңістік-уақыттық бойынша сингулярлы-бейлокал диффузия теңдеуі үшін тура есеп қарастырылады. Зерттеу барысында Лежандр дифференциалдық теңдеуімен байланысқан спектрлік бөлшек-сызықты теңдеулердің шешімдері талданады. Алдымен шешімнің бар болу және жалғыздық шарттары дәлелденіп, осыған қажетті регулярлық шарттар енгізіледі. Есепті шешу әдісі ретінде айнымалыларды ажырату тәсілі қолданылады. Бұл тәсіл негізінде шешімдер қатар түрінде өрнектеліп, олардың Лежандрдың ортогоналды көпмүшелері арқылы берілуі қарастырылады. Сонымен қатар, қатарлардың жинақталуы жан-жақты зерттеліп, шешімдердің тегістігі мен функционалдық қасиеттері талданады.

Мақалада Капуто мағынасындағы бөлшекті туындылар, Риман–Лиувиль интегралдары және инволюция типіндегі операторлардың қолданысы түсіндіріледі. Теоремалар мен леммалар негізінде спектрлік есептердің меншікті мәндері мен функциялары анықталады. Шешімдердің бірқалыпты жинақталуы мен абсолютті жинақталуы дәлелденіп, олардың қойылған бастапқы-шеттік шарттарға сәйкестігі көрсетіледі.

Жалпы алғанда, бұл жұмыс бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер теориясын толықтыра отырып, тура есептерді шешудің жаңа тәсілдерін ұсынады және болашақта кері есептердің теориясына қолданылу мүмкіндігін ашады. Зерттеу нәтижелері математикалық физикадағы күрделі есептерді шешуге ықпал етіп, қолданбалы модельдерде пайдалануға негіз бола алады.

Негізгі сөздер: дербес туынды дифференциалдық теңдеу, Капуто бөлшекті туындысы, тура есеп, инволюция, спектрлік есеп, Лежандр көпмүшелері.

Abstract. This article investigates the direct problem for the space-time singular-nonlocal diffusion equation. The study focuses on solutions of spectral fractional-linear equations associated with the Legendre differential equation. First, the existence and uniqueness of the solution are established by introducing certain regularity conditions. The method of separation of variables is applied to construct the solutions, which are represented as series in terms of orthogonal Legendre polynomials. Furthermore, the convergence of these series is thoroughly analyzed, along with the smoothness and functional properties of the obtained solutions.

The paper discusses Caputo fractional derivatives, Riemann–Liouville integrals, and operators of the involution type. Based on several theorems and lemmas, eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problems are derived. The uniform and absolute convergence of the solutions is proven, and their consistency with the given initial-boundary conditions is demonstrated.

Overall, this work contributes to the theory of fractional-order differential equations by proposing new approaches to solving direct problems and laying the foundation for further applications in inverse problem theory. The results can be applied to complex problems in mathematical physics and serve as a basis for use in applied models. Moreover, the proposed methods provide opportunities for improving the numerical solutions of specific problems.

Keywords: Partial differential equation, Caputo fractional derivative, direct problem, involution, spectral problem, Legendre polynomials.

Аннотация. В данной статье рассматривается прямая задача для пространственно-временного сингулярно-нелокального уравнения диффузии. Исследуются решения спектральных дробно-линейных уравнений, связанных с дифференциальным уравнением Лежандра. В начале устанавливаются условия существования и единственности решения, вводятся необходимые регулярные ограничения. Для решения задачи применяется метод разделения переменных. На этой основе решения получаются в виде рядов, выражаемых через ортогональные многочлены Лежандра. Также подробно анализируется сходимость рядов, гладкость решений и их функциональные свойства.

В статье рассматриваются дробные производные в смысле Капуто, интегралы Римана–Лиувилля и операторы инволюционного типа. На основе теорем и лемм определяются собственные значения и собственные функции спектральных задач. Доказана равномерная и абсолютная сходимость решений, а также их соответствие заданным начально-краевым условиям.

В целом, работа вносит вклад в теорию дифференциальных уравнений дробного порядка, предлагая новые подходы к решению прямых задач и создавая предпосылки для применения в теории обратных задач. Полученные результаты могут использоваться при решении сложных задач математической физики и в прикладных моделях. Кроме того, предложенные методы позволяют улучшить численные решения специальных задач.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, дробная производная Капуто, прямая задача, инволюция, спектральная задача, многочлены Лежандра.

Кіріспе

Бұл мақала Лежандр дифференциалдық операторын қамтитын бейлокал сызықты дифференциалдық тендеулерге байланысты тура есебін зерттеуге арналған. Атап айтқанда, Капуто бөлшекті туындыларын және инволюция типті кеңістіктік операторларды қамтитын тура есеп талданады. Осы типтегі есептер [2-8] жұмыстарда қарастырылған атап өткен жөн.

Негізгі мақсат - айнымалыларды ажырату әдісі арқылы қатар түріндегі шешімдерді құру және талдау. Біз меншікті функциялары Лежандр көпмүшелері арқылы өрнектелетін спектрлік есептерді шығарамыз және осы функцияларды шешімді бейнелеу үшін қолданамыз. Сонымен қатар, белгілі бір регулярлық шарттар енгізу арқылы шешімнің бар болуы мен жалғыздығы қатаң түрде дәлелденіп, бөлшекті кері есептердің теориясына үлес қосылады.

Зерттеу әдістері және материалдар

Анықтама1 [1] $g(t) \in L^q(0, T)$ ($1 \leq q \leq \infty$) функциясы және $\alpha \in (0, 1)$ саны үшін

$$I_{0|t}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \quad t \in (0, T]$$

және

$$I_{t|T}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (s-t)^{\alpha-1} g(s) ds, \quad t \in [0, T)$$

өрнектері Риман - Лиувилль мағынасындағы сол жақты және оң жақты бөлшек ретті интегралдары деп аталады. Мұндағы $\Gamma(\alpha)$ - Эйлер гамма функциясы.

Анықтама2 [1, 91 бет] $g(t) \in AC^1([0, T])$ функциясы және $\alpha \in (0, 1)$ саны үшін

$$D_{0|t}^{\alpha} g(t) = I_{0|t}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} g'(s) ds, \quad t \in (0, T]$$

және

$$D_{t|T}^{\alpha} g(t) = -I_{t|T}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} g(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T (s-t)^{-\alpha} g'(s) ds, \quad t \in [0, T)$$

өрнектер Капуто мағынасындағы α - ретті сол жақты және оң жақты бөлшек ретті туынды деп аталады.

Лемма1 [1, 233 бет] $0 < \alpha < 1$, $\beta > -\alpha$ және $\lambda \in R$ болатын

$$D_t^\alpha u(t) + \lambda t^\beta u(t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(0) = \varphi, \quad \varphi \in R,$$

Коши есебінің шешімі келесідей анықталады:

$$u(t) = \varphi E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}),$$

мұндағы $E_{\alpha, m, n}(z)$ -Килбас-Сайго функциясы төмендегідей беріледі [1]

$$E_{\alpha, m, n}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(jm+n)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+n+1)+1)} z^k,$$

α, m - нақты сандар, ал $n \in C$, және мына шарттар орындалады:

$$\alpha > 0, m > 0, \alpha(jm+n)+1 \neq -1, -2, -3, \dots (j \in N_0).$$

Лемма2 Кез келген $\alpha \in (0,1)$, $\beta > \alpha$ үшін келесі теңдіктер орындалады:

$$D_t^\alpha \left[E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}) \right] = -\lambda t^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}),$$

$$I_t^\alpha \left[t^\beta E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}) \right] = \frac{1}{\lambda} \left[1 - E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda t^{\alpha+\beta}) \right].$$

Нәтижелер және талқылау

$$D_t^\alpha u(x, t) + t^\beta S_{x, \varepsilon, \gamma} u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T) \equiv Q, \quad (1)$$

(1) түрдегі бөлшек ретті диффузия теңдеуі үшін

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1], \\ u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

бастапқы-шеттік есебі берілсін. Мұндағы $\varphi(x)$ функциясы үздіксіз және $\gamma > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$. D_t^α - Капуто мағынасындағы бөлшек ретті туынды. $S_{x, \varepsilon, \gamma} u(x, t)$ - операторының көрінісі келесідей анықталады

$$S_{x, \varepsilon, \gamma} u(x, t) = (x^2 - 1) \left[\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(-x, t) \right] + 2x \left[\gamma \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} u(-x, t) \right]. \quad (3)$$

Мұнда $S_{x,\varepsilon,\gamma}$ операторының спектралдық қасиеттері [10] еңбегінде зерттелген.

Лемма 3 [1, Ескертпе 6.1] Айталық α, m - нақты сандар, ал $n \in \mathbb{C}$, және

$$\alpha > 0, m > 0, \alpha(jm + n) + 1 \neq -1, -2, -3, \dots (j \in \mathbb{N}_0)$$

болса, Килбас-Сайго функциясы үшін келесі бағалау орынды

$$\frac{1}{1 + \Gamma(1 - \alpha)z} \leq E_{\alpha, m, m-1}(-z) \leq \frac{1}{1 + \frac{\Gamma(1 + (m-1)\alpha)}{\Gamma(1 + m\alpha)}z}, \quad z \geq 0, \quad (4)$$

мұнда $m > 1$ және $0 < \alpha < 1$.

1 – теорема Айталық, $\varphi(x) \in C^1[-1, 1]$, $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, $\varphi''(x) \in L^2(-1, 1)$, $u(x, t) \in C(\bar{Q})$, $D_t^\alpha u(x, t)$, $t^\beta S_{x,\varepsilon,\gamma} u(x, t) \in C(Q)$. Онда (1) – (2) есебінің шешімі бар, жалғыз және келесідей анықталады

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\alpha+\beta}) \varphi_k X_k(x). \quad (5)$$

Дәлелдеуі: $u(x, t)$ функциясын формал түрде келесідей іздейміз

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad (6)$$

мұндағы $u_k(t)$ белгісіз функция. $X_n(x)$ - Лежандр көпмүшесі келесідей анықталады:

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (7)$$

(6) өрнектерін (1) теңдеуіне қойсақ және айнымалыларды ажырату әдісін қолдану арқылы спектрлік есеп пен бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу аламыз. Спектрлік есеп келесідей анықталады

$$(x^2 - 1)[\gamma X''(x) + \varepsilon X''(-x)] + 2x[\gamma X'(x) - \varepsilon X'(-x)] = -\lambda_k X_k(x), \quad (8)$$

мұндағы $x \in (-1, 1)$, γ және ε - берілген тұрақтылар, ал λ_k - спектрлік параметр. (8) теңдеудің оң меншікті мәндері мына түрде анықталады [9]:

$$\lambda_k = (\gamma + (-1)^k \varepsilon) k(k+1). \quad (9)$$

Олай болса, $u_k(t)$ функциясы үшін келесі теңдеуді аламыз

$$D_t^\alpha u(t) + \lambda_k t^\beta u(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

Лемма 1 нәтижесінен (7) теңдеуінің шешімі келесідей анықталады

$$u_k(t) = \varphi_k E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\alpha+\beta}). \quad (11)$$

Біз осылай $u(x, t)$ функциялары үшін $u_k(t)$ мәнін тауып алдық. Құрылымы бойынша бұл функция (1)-(2) есебінің барлық шарттарын формалды түрде қанағаттандырады. Енді осы функциялардың тегістігін зерттеу қажет болады. Олай болса (5) қатарын тұйық $\bar{Q}$ облысында біркелкі жинақтылығын, D_t^β және $S_{x, \varepsilon, \gamma} u$ операторларын қолдану арқылы $\bar{Q}_0 \subset Q$ кез келген қатаң тұйық ішкі облысында жинақтылығын көрсету жеткілікті.

Келесі кезекте φ_k коэффициентін бағалайық. Алдымен берілген өрнекті бөліктеп интегралдаймыз,

$$\varphi_k = \int_{-1}^1 \varphi_k(x) X_k(x) dx = -\frac{\gamma + (-1)^k \varepsilon}{\lambda_k} \int_{-1}^1 X_k(x) \left[(x^2 - 1) \varphi'_k(x) \right]' dx,$$

$$\varphi_k^1 = \int_{-1}^1 X_k(x) \left[(x^2 - 1) \varphi'_k(x) \right]' dx,$$

$$\varphi_k = -\frac{1}{k(k+1)} \varphi_k^1. \quad (12)$$

мұндағы $h_k^1(x) = \left[(x^2 - 1) \varphi'_k(x) \right]'$ белгілеу енгізетін болсақ, онда

$$\varphi_k^1 = \int_{-1}^1 h_k^1(x) X_k(x) dx < \infty.$$

Демек,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} |\varphi_k^1| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \leq C,$$

Олай болса (12) қатары тұйық облыста бірқалыпты жинақты.

Енді $u(x, t)$ қатарының жинақтылығын зертеп көрейік. (4) теңсіздігін пайдаланып келесідей нәтижелерді аламыз

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} E_{\alpha, 1 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\alpha+\beta}) \varphi_k \right| \leq C |\varphi_k|$$

Олай болса, $X_k(x)$ функциясы шенелген болғандықтан және (4) теңсіздігінен пайдаланып мынаны аламыз

$$|u(x, t)| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x) \right| \leq C |\varphi_k| < C.$$

φ_k^1 функциялары шенелген болғандықтан (5) қатары $\bar{Q}$ тұйық облысында абсолютті және бірқалыпты жинақты болады. Демек, $u(x, t)$ функция $C(\bar{Q})$ класында жатады.

Әрі қарай, формалды түрде D_t^α операторын (5) қатарына 2 лемманы қолдансақ, онда

$$D_t^\alpha u(x, t) = -t^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_k t^{\alpha+\beta}) \lambda_k \varphi_k X_k(x). \quad (13)$$

Мұнда Лемма 2 теңдіктерін Лемма 3 теңсіздігін пайдаланып, келесі бағалауды аламыз

$$|D_t^\alpha u(x, t)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{1}{\lambda_k} |\varphi_k| \leq C.$$

Демек (13) қатары кез келген тұйық ішкі облыста $\bar{Q}_\delta \subset Q$ біркелкі жинақталады, сондықтан $D_t^\beta u(x, t) \in C(Q)$ болады.

Келесі кезекте $S_{x, \varepsilon, \gamma} u(x, t)$ операторына (5) теңдігін қолданып, қатарды жинақтылыққа зертейміз

$$S_{x, \varepsilon, \gamma} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \lambda_k X_k(x). \quad (14)$$

Олай болса,

$$|S_{x, \varepsilon, \gamma} u(x, t)| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \lambda_k X_k(x) \right| \leq C \lambda_k |\varphi_k| \leq C.$$

Олай болса, (14) қатары бірқалыпты жинақталады, олай болса $S_{x, \varepsilon, \gamma} u(x, t) \in C(Q)$.

Шешімнің жалғыздығы

Шешімнің жалғыз екенін көрсету үшін кері жорып көрейік, яғни (1)-(2) есебінің $u_1(x, t)$ және $u_2(x, t)$ екі шешімі бар деп алайық. $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \equiv 0$ болатынын дәлелдейік. Себебі есеп сызықты, $u(x, t)$ үшін біз (1)-(2) есебінің біртекті шешімін аламыз. Шешімнің анықтамасы бойынша, $u(x, t)$ функциясы келесі қасиеттерге ие $u(x, t) \in C(\bar{Q})$, $D_t^\beta u(x, t) \in C(Q)$ және $S_{x, \varepsilon, \gamma} u(x, t) \in C(Q)$. Олай болса, үздіксіздікке байланысты $u_k(t) = (u(x, t), X_k(x))$ функциясы біртекті. Егер δ өте кіші кез келген сан болса, онда $D_t^\beta u(x, t), S_{x, \varepsilon, \gamma} u(x, t) \in C(\bar{Q}_\delta)$, $\bar{Q}_\delta \subset Q$ барлық $t \geq \delta > 0$ үшін, келесі теңдік орындалады:

$$D_t^\alpha u_k(t) + \lambda_k t^\beta u_k(t) = 0. \quad (15)$$

δ кез келген сан болғандықтан, (15) теңдеуі $0 < t < T$ облысында орындалады. Сондықтан $u_k(t) = (u(x, t), X_k(x))$ біртекті есептің шешімі болып табылады. Бұл есептің шешімінің жалғыздығына байланысты $\langle u(x, t), X_k(x) \rangle = 0$, яғни $u(x, t)$ функциясы $\{X_k(x)\}$ жүйесінің барлық элементтеріне ортогональ. Сондықтан $u(x, t) = 0$ барлық $t \in [0, T]$ үшін.

$u(x, t) \in C(\overline{Q})$ болғандықтан, $u(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \overline{Q}$ болады. Осылайша біз теңдеудің шешімі $u(x, t)$ жалғыз болатынын дәлелдедік.

Қорытынды

Бұл жұмыста кеңістік-уақыттық сингулярлы-бейлокал диффузия теңдеуі үшін тура есеп жан-жақты зерттелді. Алдымен шешімнің бар болуы мен жалғыздығы қатаң түрде дәлелденіп, қажетті регулярлық шарттар енгізілді. Айнымалыларды ажырату әдісі арқылы есептің қатар түріндегі шешімдері құрылып, олардың Лежандр көпмүшелерімен өрнектелуі көрсетілді. Қатарлардың жинақталу қасиеттері талданып, шешімдердің тегістігі мен қойылған бастапқы-шеттік шарттарға сәйкестігі негізделді.

Зерттеу нәтижесінде алынған теориялық тұжырымдар бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер теориясын толықтыра түсіп, спектрлік есептердің шешімдерін сипаттау үшін жаңа әдістемелік негіз ұсынады. Бұл әдістердің қолданылуы кері есептердің шешілуіне, сондай-ақ математикалық физикадағы күрделі модельдерді талдауға мүмкіндік береді.

Жалпы алғанда, мақалада ұсынылған тәсілдер бөлшек туындыға негізделген бейжергілікті есептердің теориялық және қолданбалы аспектілерін дамытуға бағытталған және келешекте сандық әдістерді жетілдіруге жол ашады.

Әдебиеттер тізімі

1. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and application of fractional differential equations* (1st ed.). Elsevier Science B.V.
2. Tenreiro, J. A. (2019). Recent history of the fractional calculus: Data and statistics. *Basic Theory*, 1.
3. Luchko, Y. (2011). Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 374, 538–548.
4. Abdullaev, O. K., & Sadarangani, K. B. (2016). Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed type equations involving the Caputo fractional derivative. *Electronic Journal of Differential Equations*.
5. Karimov, E., Mamchuev, M., & Ruzhansky, M. (2020). Non-local initial problem for second order time-fractional and space-singular equation. *Hokkaido Mathematical Journal*, 49(2), 349–361.
6. Turmetov, B. K., & Kadirkulov, B. J. (2021). An inverse problem for a parabolic equation with involution. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(12), 3006–3015.
7. Turmetov, B., & Karachik, V. (2024). On solvability of some inverse problems for a nonlocal fourth-order parabolic equation with multiple involution. *AIMS Mathematics*, 9(3), 6832–6849.
8. Ruzhansky, M., Serikbaev, D., Torebek, B. T., & Tokmagambetov, N. (2022). Direct and inverse problems for time-fractional pseudo-parabolic equations. *Quaestiones Mathematicae*, 45(7), 1071–1089.
9. Naimark, M. A. (1968). *Linear differential operators: Part II*. Ungar.
10. Beroudj, M. E., Kirane, M., & Mennouni, A. (2025). An inverse problem for an evolution equation with a time fractional derivative of order involving Legendre polynomials. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Мамбетов С.А. – докторант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: samat.mambetov@ayu.edu.kz
	Mambetov S.A. – Doctoral student, Ahmet Yassawi University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: samat.mambetov@ayu.edu.kz
	Мамбетов С.А. – докторант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: samat.mambetov@ayu.edu.kz