УДК 517.956
ГРНТИ 27.31.15

М.Д.КОШАНОВА[1] , Д.Н.АЛТЫНБЕК[2]
[1]кандидат технических наук, доцент, E-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
[2]магистрант,E-mail: dinara.altynbek1999@mail.ru
Международный казахско-турецкий университет им. Ходжа Ахмеда Ясави

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В настоящей работе для дифференциального уравнения высокого порядка с инволюцией исследованы вопросы разрешимости краевой задачи типа Дирихле. Задача решается сведением его к известной задаче Дирихле для классического уравнения. Решение задачи получено в виде ряда.

Ключевые слова: нелокальное уравнение, уравнение высокого порядка, инволюция, задача Дирихле, существования решения, единственность решения.

М.Д.КОШАНОВА[1] , Д.Н.АЛТЫНБЕК[2]

[1]техника ғылымдарының кандидаты, доцент, E-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
[2]магистрант, E-mail: dinara.altynbek1999@mail.ru
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті,

ИНВОЛЮЦИЯЛЫ ЖОҒАРЫ РЕТТІ ТЕҢДЕУ ҮШІН БІР ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста инволюциялы жоғары ретті дифференциалдық теңдеу үшін Дирихле типті шеттік есептің шешілу мәселесін зерттейміз. Есеп классикалық теңдеу үшін белгілі Дирихле есебіне келтіру арқылы шешіледі. Есептің шешімі қатар түрінде алынады.

Кілттік сөздер: бейлокал теңдеу, жоғары ретті теңдеу, инволюция, Дирихле мәселесі, шешімнің бар болуы, шешімнің жалғыз болуы.

M.D.KOSHANOVA[1] , D.N.ALTINBEK[2]

[1]candidate of technical sciences, associate professor, E-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
[2] master student, E-mail: dinara.altynbek1999@mail.ru
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
,

ON THE SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A HIGH-ORDER EQUATION WITH INVOLUTION

In this paper, we investigate the solvability of a Dirichlet-type boundary value problem for a higher-order differential equation with involution. The problem is solved by reducing it to the well-known Dirichlet problem for the classical equation. The solution to the problem is obtained in the form of a series.

Key words: nonlocal equation, higher order equation, involution, Dirichlet problem, existence of a solution, uniqueness of a solution.

Введение. В данной работе в прямоугольной области изучаются вопросы разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения высокого порядка с инволюцией

Пусть T,p - некоторые положительные числа, $\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ и m - натуральное число. Рассмотрим в области Ω следующую задачу.

Задача Дирихле. Найти в области Ω функцию $u(x,t)$ из класса $u\in C^{2m}(\Omega)\cap C^{2m-1}(\overline{\Omega})$ удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial t^{2m}}-\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}}-a\frac{\partial^{2m}u(p-x,t)}{\partial x^{2m}}=f(x,t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^{2k}u(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u(p,t)}{\partial x^{2k}}=0,\quad 0\le t\le T, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^{2k}u(x,0)}{\partial t^{2k}}=0,\frac{\partial^{2k}u(x,T)}{\partial t^{2k}}=0,\quad 0\le x\le p, \qquad (3)$$

где $a\in R,k=0,1,...,m-1$, $f(x,t)$ заданная функция.

Заметим, что задача (1)-(3) в случае $a=0$ изучена в работе [1]. Отметим также краевые задачи для уравнений высокого порядка исследовались в работах [2-6]. краевые и начально – краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка с инволюцией исследовались в работах [7-14], а для нелокальных аналогов уравнений эллиптического типа высокого порядка в работах [15-16].

2. Редукция основной задачи к известной задаче для классического уравнения.

Предположим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Если в этом уравнении меняем точку x на $p-x$, то в силу четности показателей производных, получаем

$$\frac{\partial^{2m}u(p-x,t)}{\partial t^{2m}}-\frac{\partial^{2m}u(p-x,t)}{\partial x^{2m}}-a\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}}=f(p-x,t). \qquad (4)$$

Суммируя левую и правую части равенств (1) и (4), имеем

$$\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial t^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u(p-x,t)}{\partial t^{2m}}-\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}}-a\frac{\partial^{2k}u(p-x,t)}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^{2k}u(p-x,t)}{\partial x^{2k}}-a\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial x^{2k}}=$$

$$=f(x,t)+f(p-x,t)$$

или то же самое

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left[u(x,t)+u(p-x,t)\right]-(1+a)\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\left[u(x,t)+u(p-x,t)\right]=f(x,t)+f(p-x,t).$$

Аналогичным образом рассматривая разность левой и правой части равенств (1) и (4), получаем

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left[u(x,t)-u(p-x,t)\right]-(1-a)\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\left[u(x,t)-u(p-x,t)\right]=f(x,t)-f(p-x,t).$$

Введем функции,

$$u^{+}(x,t)=u(x,t)+u(p-x,t);\ u^{-}(x,t)=u(x,t)-u(p-x,t), \tag{5}$$

$$f^{+}(x,t)=f(x,t)+f(p-x,t), f^{-}(x,t)=f(x,t)-f(p-x,t). \tag{6}$$

Если функция $u(x,t)$ удовлетворяет условия (2) и (3), то для функций $u^{+}(x,t)$ и $u^{-}(x,t)$ из (5) при всех $k=0,1,...,m-1$ имеем

$$\frac{\partial^{2k}u^{+}(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u(0,t)}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{2k}u(p,t)}{\partial x^{2k}}=0,\frac{\partial^{2k}u^{+}(p,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u(p,t)}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{2k}u(0,t)}{\partial x^{2k}}=0,$$

$$\frac{\partial^{2k}u^{-}(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u(0,t)}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^{2k}u(p,t)}{\partial x^{2k}}=0,\frac{\partial^{2k}u^{-}(p,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u(p,t)}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^{2k}u(0,t)}{\partial x^{2k}}=0,$$

$$\frac{\partial^{2k}u^{+}(x,0)}{\partial t^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u(x,0)}{\partial t^{2k}}+\frac{\partial^{2k}u(p-x,0)}{\partial t^{2k}}=0, 0\le x\le p,$$

$$\frac{\partial^{2k}u^{+}(x,T)}{\partial t^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u(x,T)}{\partial t^{2k}}+\frac{\partial^{2k}u(p-x,T)}{\partial t^{2k}}=0, 0\le x\le p,$$

$$\frac{\partial^{2k}u^{-}(x,0)}{\partial t^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u(x,0)}{\partial t^{2k}}-\frac{\partial^{2k}u(p-x,0)}{\partial t^{2k}}=0, 0\le x\le p,$$

$$\frac{\partial^{2k}u^{-}(x,T)}{\partial t^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u(x,T)}{\partial t^{2k}}-\frac{\partial^{2k}u(p-x,T)}{\partial t^{2k}}=0, 0\le x\le p$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Если $u(x,t)$ - решение задачи (1)-(3) и $a\neq\pm1$, то функции $u^{+}(x,t)$ и $u^{-}(x,t)$ являются решениями следующих задач

$$\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial t^{2m}}-(1+a)\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2m}}=f^{+}(x,t),(x,t)\in\Omega, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^{2k}u^{+}(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u^{+}(p,t)}{\partial x^{2k}}=0, 0\le t\le T, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^{2k}u^{+}(x,0)}{\partial t^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u^{+}(x,T)}{\partial t^{2k}}=0, 0\le x\le p. \quad (9)$$

$$\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial t^{2m}}-(1-a)\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2m}}=f^{-}(x,t),(x,t)\in\Omega, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^{2k}u^{-}(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u^{-}(p,t)}{\partial x^{2k}}=0, 0\le t\le T, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^{2k}u^{-}(x,0)}{\partial t^{2k}}=\frac{\partial^{2k}u^{-}(x,T)}{\partial t^{2k}}=0, 0\le x\le p, \quad (12)$$

где $k=0,1,...,m-1$.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. Если функции $u^{+}(x,t)$ и $u^{-}(x,t)$ являются решениями задач (6) - (8) соответственно, то при выполнении условии $a\neq\pm1$ функция

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u^{+}(x,t)+u^{-}(x,t)\right] \quad (13)$$

является решением задачи (1)-(3).

Доказательство. Пусть функции $u^{+}(x,t)$ и $u^{-}(x,t)$ удовлетворяют уравнениям (7) и (10) соответственно. Тогда для функции $u(x,t)$ из равенства (13) имеем

$$\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial t^{2m}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial t^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial t^{2m}}\right],$$

$$\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2m}}\right];\frac{\partial^{2m}u(p-x,t)}{\partial x^{2m}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^{2m}u^{+}(p-x,t)}{\partial x^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u^{-}(p-x,t)}{\partial x^{2m}}\right].$$

Отсюда

$$\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial t^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}}+a\frac{\partial^{2m}u(p-x,t)}{\partial x^{2m}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial t^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial t^{2m}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2m}}\right]+\frac{a}{2}\left[\frac{\partial^{2m}u^{+}(p-x,t)}{\partial x^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u^{-}(p-x,t)}{\partial x^{2m}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial t^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2m}}+a\frac{\partial^{2m}u^{+}(p-x,t)}{\partial x^{2m}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial t^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2m}}+a\frac{\partial^{2m}u^{-}(p-x,t)}{\partial x^{2m}}\right].$$

Отметим, что функции $u^{+}(x,t)$ и $u^{-}(x,t)$ обладают следующими свойствами

$$u^{+}(p-x,t)=u(p-x,t)+u(x,t)=u^{+}(x,t)\Rightarrow\frac{\partial^{2}u^{+}(p-x,t)}{\partial x^{2}}=\frac{\partial^{2}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2}},$$

$$u^{-}(p-x,t)=u(p-x,t)-u(x,t)=-u^{-}(x,t)\Rightarrow\frac{\partial^{2}u^{-}(p-x,t)}{\partial x^{2}}=-\frac{\partial^{2}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial t^{2m}}-\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2m}}-a\frac{\partial^{2m}u^{+}(p-x,t)}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial t^{2m}}-\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2m}}-a\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2m}}=$$

$$=\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial t^{2m}}-(1+a)\frac{\partial^{2m}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2m}},$$

и аналогично

$$\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial t^{2m}}-\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2m}}-a\frac{\partial^{2m}u^{-}(p-x,t)}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial t^{2m}}-\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2m}}+a\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2m}}=$$

$$=\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial t^{2m}}-(1-a)\frac{\partial^{2m}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2m}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial t^{2m}}-\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}}-a\frac{\partial^{2m}u(p-x,t)}{\partial x^{2m}}=\frac{1}{2}\left[f^{+}(x,t)+f^{-}(x,t)\right]=f(x,t).$$

Таким образом, если функции $u^{+}(x,t)$ и $u^{-}(x,t)$ являются решениями задач (7) - (9) и (10) - (12) соответственно, то функция $u(x,t)$ из равенства (13) удовлетворяет уравнению (1).

Выполнения условий (2) и (3) для функции $u(x,t)$ проверяется непосредственно. Действительно, проверим, выполнения краевых условий (2). Из представления функции $u(x,t)$ и из равенств (8) и (11) получаем

$$\left.\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2k}u^{+}(x,t)}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2k}u^{-}(x,t)}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u(p-x,t)}{\partial x^{2k}}\right|_{x=p}=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2k}u^{+}(p-x,t)}{\partial x^{2k}}\right|_{x=p}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2k}u^{-}(p-x,t)}{\partial x^{2k}}\right|_{x=p}=0.$$

Переходим к условиям (3). Имеем

$$\left.\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2k}u^{+}(x,t)}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2k}u^{-}(x,t)}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial t^{2k}}\right|_{t=T}=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2k}u^{+}(x,t)}{\partial t^{2k}}\right|_{t=T}+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^{2k}u^{-}(x,t)}{\partial t^{2k}}\right|_{t=T}=0.$$

Следовательно условия (3) также выполняется. Теорема доказана.

3. Исследование основной задачи.

Из теоремы 2 следует, что для нахождения решения задачи (1) - (3) нам достаточно исследовать следующую вспомогательную задачу

$$\frac{\partial^{2m}z(x,t)}{\partial t^{2m}}-\varepsilon\frac{\partial^{2m}z(x,t)}{\partial x^{2m}}=g\left(x,t\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial^{2k}z(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}z(p,t)}{\partial x^{2k}}=0, 0\le t\le T, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^{2k} z(x,0)}{\partial t^{2k}} = \frac{\partial^{2k} z(x,T)}{\partial t^{2k}} = 0, 0 \le x \le p, \tag{16}$$

где $k = 0,1,...,m-1$ и ε - некоторое положительное число.

Исследуем задачу (14)-(16). Пусть $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x, \lambda_n = \frac{n\pi}{p}$, $n = 1,2,...$, $T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \mu_n t, \mu_n = \frac{n\pi}{T}$, $n = 1,2,...$.

Известно (см. например, [1]), что каждый из этих систем являются ортонормированной, полной и образуют базис пространств $L_2(0,p)$ и $L_2(0,T)$. Тогда их произведение $X_n(x) \cdot T_n(t)$ является полной, ортонормирована и образует базис пространства $L_2(\Omega)$. Так как по предположению решение задачи (14)-(16) классическое, т.е. $v(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, то данная функция будет элементом пространства $L_2(\Omega)$. Поэтому решение задачи (14)-(16) можно разложит в ряд по системе $\{X_n(x) \cdot T_k(t)\}_{n,k=1}^{\infty}$ и искать его в виде двойного ряда

$$z(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} z_{kn} T_k(t) X_n(x). \tag{17}$$

Если решение задачи (14)-(16) существует, то неизвестные коэффициенты z_{nk} можно однозначно найти по формуле

$$z_{kn} = \int_0^p \int_0^T z(x,t) X_n(x) T_k(t) dxdt.$$

Представим функцию $g(x,t)$ в виде ряда

$$g(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{kn} T_k(t) X_n(x). \tag{18}$$

где

$$g_{kn} = \int_0^p \int_0^T g(x,t) X_n(x) T_k(t) dtdx. \tag{19}$$

Подставляем функцию (17) в правую часть уравнения (14) и с учетом равенств

$$X_n^{(2m)}(x) = (-1)^m \lambda_n^{2m} X_n(x), T_k^{(2m)}(t) = (-1)^m \mu_k^{2m} T_k(t)$$

получаем

$$\frac{\partial^{2m} z(x,t)}{\partial t^{2m}} - \varepsilon \frac{\partial^{2m} z(x,t)}{\partial x^{2m}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^m z_{kn}\left(\mu_k^{2m} - \varepsilon\lambda_n^{2m}\right)T_k(t)\,X_n(x).$$

Далее, приравнивая последнее выражение с правой частью (18) находим неизвестные коэффициенты z_{kn} по формуле

$$z_{kn} = \frac{(-1)^m g_{kn}}{\mu_k^{2m} - \varepsilon\lambda_n^{2m}}.$$

При этом для всех $k,n \in N$ будем требовать выполнение условий

$$\Delta_{kn} = \mu_k^{2m} - \varepsilon\lambda_n^{2m} \neq 0. \tag{20}$$

Перепишем Δ_{kn} в виде

$$\Delta_{kn} = \left(\frac{k\pi}{T}\right)^{2m} - \varepsilon\left(\frac{n\pi}{p}\right)^{2m} = \left(\frac{\pi}{T}\right)^{2m}\left[k^{2m} - \left(\frac{\sqrt[2m]{\varepsilon}T}{p}n\right)^{2m}\right] = \left(\frac{\pi}{T}\right)^{2m}\left[k^{2m} - (\alpha n)^{2m}\right], \alpha = \frac{T}{p}\sqrt[2m]{\varepsilon}$$

и разложим на множители

$$\Delta_{kn} = \left(\frac{\pi}{T}\right)^{2m}(k-\alpha n)\left[k^m + (\alpha n)^m\right]\left[k^{m-1} + k^{m-2}(\alpha n) + \ldots + k(\alpha n)^{m-2} + (\alpha n)^{m-1}\right]. \tag{21}$$

Из равенство (21) видно, что $\Delta_{kn} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha n$, т.е. когда $\alpha = \frac{k}{n}$. Таким образом, когда $\alpha \equiv \frac{T}{p}\sqrt[2m]{\varepsilon}$ - рациональное число, то найдутся натуральные числа k и n такие, что $\Delta_{kn} = 0$.

Пусть выполняется условие (20), $g(x,t) \equiv 0$ и функция $z(x,t)$ является решением однородной задачи (14)-(16). Тогда из равенства (19) следует $g_{kn} = 0, k,n \in N$. Отсюда $z_{kn} = 0$ и поэтому

$$\int_0^p\int_0^T z(x,t)X_n(x)T_k(t)\,dxdt = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы $\{X_n(x)\cdot T_k(t)\}_{n,k=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega)$ следует, что $u(x,t)=0$ в $\bar{\Omega}$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\varepsilon>0$ и решение задачи (14)-(16) сушестует, то оно единственно тогда и только тогда, когда число $\alpha\equiv\frac{T}{p}\sqrt[2m]{\varepsilon}$ является иррациональным.

Далее, в работе [] доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. Если $0<\alpha$ является иррациональным алгебраическим числом степени $n\geq 2$, то существует постоянная $L>0$ такая, что при всех $k,n\in N$ справедлива оценка

$$|\Delta_{kn}|\geq Ln^{-1-\delta}\left(kn\right)^{m-1/2}.$$

Лемма 2. Если $g(x,t)\in C^{2m+5}\left(\bar{\Omega}\right)$,

$$g_x^{(i)}(0,t)=g_x^{(i)}(p,t)=\begin{cases}0, i=0,2,...,p+1, \text{ когда } p+3-\text{четное}\\ 0, i=0,2,...,p+2, \text{ когда } p+3-\text{нечетное}\end{cases}$$

$$g_t^{(j)}\left(x,0\right)=g_t^{(j)}\left(x,T\right)=\begin{cases}0, j=0,2,...,p+1, \text{ когда } p+2-\text{нечетное}\\ 0, i=0,2,...,p+2, \text{ когда } p+2-\text{четное}\end{cases},$$

то справедлива оценка

$$|g_{kn}|\leq\frac{L_1}{k^{p+2}n^{p+3}}.$$

Теорема 3. Пусть число α и функция $g(x,t)$ удовлетворяют условиям лемм 1 и 2. Тогда решение задачи (14) - (16) существует, единствено и представлется в виде ряда

$$z\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m g_{kn}}{\Delta_{kn}}T_k\left(t\right)X_n\left(x\right). \tag{22}$$

Доказательства. Функция $z\left(x,t\right)$ представимая в виде ряда (22) формально удовлетворяет всем условиям задачи (14) - (16). Исследуем регулярность $z\left(x,t\right)$. Из (22) для любых $s,r=0,1,...$ и $s+r\leq 2m$ имеем

$$\frac{\partial^{s+r} z(x,t)}{\partial t^s \partial x^r} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m g_{kn}}{\Delta_{kn}} T_k^{(s)}(t) X_n^{(r)}(x).$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^{s+r} z(x,t)}{\partial t^s \partial x^r}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_{kn}|}{|\Delta_{kn}|}\left|T_k^{(s)}(t) X_n^{(r)}(x)\right| \le L \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_{kn}|}{|\Delta_{kn}|} k^s n^r \le L \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m-s+3/2-\delta}} \frac{1}{n^{2m-r+3/2}} < \infty.$$

Следовательно, сумма ряда из равенства (22) обладает необходимой гладкостью, т.е. является классическим решением задачи (14) - (16). Теорема доказана.

Теперь приведем основное утверждение относительно задачи (1)-(3).

Теорема 4. Если $\varepsilon_{\pm} = 1 \pm a > 0$, числа $\alpha_{\pm} = \frac{T}{p}\sqrt[2m]{\varepsilon_{\pm}}$ и функция $f(x,t)$ удовлетворяют условиям лемм 1 и 2, то решение задачи (1) - (3) существует, единствено и представлется в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m f_{k,2n}}{\Delta_{k,2n}^{+}} T_k(t) X_{2n}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m f_{k,2n-1}}{\Delta_{k,2n-1}^{-}} T_k(t) X_{2n-1}(x), \quad (23)$$

где $\Delta_{k,n}^{+} = \mu_k^{2m} - \varepsilon_{+}\lambda_n^{2m}$, $\Delta_{k,n}^{-} = \mu_k^{2m} - \varepsilon_{-}\lambda_n^{2m}$, $f_{k,j}$ - коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$ по системе $\{X_n(x)\cdot T_k(t)\}_{n,k=1}^{\infty}$.

Доказательства. Рассмотрим для функций $u^{+}(x,t)$ и $u^{-}(x,t)$ задачи (7) - (9) и (10) - (12) соответственно. Формальными решениями задач (7) - (9) и (10) - (12) будут функции

$$u^{+}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m f_{kn}^{+}}{\Delta_{kn}^{+}} T_k(t) X_n(x), \quad u^{-}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m f_{kn}^{-}}{\Delta_{kn}^{-}} T_k(t) X_n(x), \quad (25)$$

где

$$f_{kn}^{+} = \int_0^p \int_0^T f^{+}(x,t) X_n(x) T_k(t)\,dtdx, \quad f_{kn}^{-} = \int_0^p \int_0^T f^{-}(x,t) X_n(x) T_k(t)\,dtdx.$$

Если функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы, то функции $f^{+}(x,t)$ и $f^{-}(x,t)$ так же удовлетворяют этим условиям. Кроме этого, при выполнении условий относительно чисел $\alpha_{\pm} = \frac{T}{p}\sqrt[2m]{\varepsilon_{\pm}}$ верны неравенства $\Delta_{kn}^{\pm} \ne 0$ и оценки снизу из леммы 1. Тогда по утверждению теоремы 3 ряды из (25) являются единственными классическими решениями этих задач.

Заметим, что из равенства

$$X_n(p-x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{n\pi}{p}(p-x)=-(-1)^n\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{n\pi}{p}x=-(-1)^n X_n\left(x\right)$$

следует

$$f_{kn}^{+}=\int_0^p\int_0^T f(x,t)X_n(x)T_k(t)dtdx+\int_0^p\int_0^T f(p-x,t)X_n(x)T_k(t)dtdx=\left(1-(-1)^n\right)f_{kn}=\begin{cases}0, n-\text{четно}\\ 2f_{kn}, n-\text{нечетно}\end{cases}$$

,

$$f_{kn}^{-}=\int_0^p\int_0^T f(x,t)X_n(x)T_k(t)dtdx-\int_0^p\int_0^T f(p-x,t)X_n(x)T_k(t)dtdx=\left(1+(-1)^n\right)f_{kn}=\begin{cases}0, n-\text{нечетно}\\ 2f_{kn}, n-\text{четно}\end{cases}$$

.

Тогда по утверждению теоремы 2 функция $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u^{+}(x,t)+u^{-}(x,t)\right]$ будет решением задачи (1)-(3) и для него справедливо представление (23), т.е.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u^{+}(x,t)+u^{-}(x,t)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m f_{k,2n}}{\Delta_{k,2n}^{+}}T_k\left(t\right)X_{2n}\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m f_{k,2n-1}}{\Delta_{k,2n-1}^{-}}T_k\left(t\right)X_{2n-1}\left(x\right)$$

.

Теорема доказана.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта МОН РК (грант № AP09259074).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР

1 Sabitov K.B. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Математические заметки. – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 262 –276.

2 Amanov D. Boundary-value problem for degenerate parabolic equation of high order with varying direction of time // Russian Mathematics. – 2014. – V. 58, No.12. – P.1–6. https://doi.org/10.3103/S1066369X14120019.

3 Amanov D. Solvability and spectral properties of the boundary value problem for degenerating higher order parabolic equation// Applied Mathematics and Computation. – 2015. – V. 268, No.1. – P. 1282 – 1291. https://doi.org /10.1016/j.amc.2015.06.131.

4 Кошанов Б.Д., Солдатов А.П. О разрешимости обобщенной задачи Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка в бесконечной области // СМФН. – 2021. – Т.67,№ 3. –,С. 564 – 575. DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2021-67-3-564-575.

5 Солдатов А.П. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка в многосвязной области на плоскости // Владикавказский математический журнал. – 2017. – Т. 19, № 3. – С.51 – 58. DOI: 10. 23671 / VNC. 2017.3.7130.

6 Юсубов Ш.Ш. Нелокальная задача с интегральными условиями для трехмерного гиперболического уравнения высокого порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 33, № 4. –С. 51 – 62. DOI: https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-33-4-51-62.

7 Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M. Initial - boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation. Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2019. – V. 14, No.3, - P.1 – 15. https://doi.org/10.1051/mmnp/2019014.

8 Andreev, A.A. Analogs of Classical Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Deviating Argument // Differential Equations. – 2004. – V. 40. – P. 1192 – 1194. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f.

9 Ashyralyev A, Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – V.38. – P.1295-1304. https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

10 Ashyralyev A, Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – V.2015, No. 284. – P.1 – 8. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/284/ashyralyev.pdf.

11 Burlutskaya M.Sh, Khromov A.P. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2011. – V.51. – P. 2102 – 2114. https://doi.org /10.1134 /S0965542511120086

12 Cabada, A.; Tojo, F.A.F. Differential Equations with Involutions. New York: Atlantis Press, 2015. DOI:https://doi.org/10.2991/978-94-6239-121-5_1.

13 Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation // Turkish journal of mathematics. – 2019. – V.43, № 3. – P. 1604 – 1625. doi:10.3906/mat-1901-71.

14 Yarka U., Fedushko S.,Vesely P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation. Mathematics. – 2020. – V.8, № 2108. – P. 1 – 13.doi:10.3390/math8122108

15 Турметов Б.Х., Карачик В.В. О задаче Дирихле для нелокального полигармонического уравнения // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. – 2021. Т. 13, № 2. – С.37 – 45. DOI: https://doi.org/10.14529/mmph210206.

16 Turmetov B.Kh., Karachik V.V., Muratbekova M.A. On a Boundary Value Problem for the Biharmonic Equation with Multiple Involutions // Mathematics. – 2021. – V.9. – P. 1 – 23. https://doi.org/10.3390/math9172020