

Назарова К.Ж.¹, Усманов К.И.², Нұрсейтов А.³

¹физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz

²физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz

³магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: akhmad.nurseitov@ayu.edu.kz

**ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БЕЙЛОКАЛДЫ ШАРТТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ
ШЕШІЛІМДІЛІК ЖАҒДАЙЛАРЫ**

**CONDITIONS FOR SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ORDINARY
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLOCAL CONDITIONS**

**УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Аңдатпа. Бұл мақалада бейлокальды шекаралық шарттары бар жәй дифференциалдық теңдеулерді зерттеу үшін Д. Джумабаевтың параметрлеу әдісі қолданылады. Есепті шешу барысында арнайы $\mu = y(0)$

параметр енгізіліп, $y(x) = u(x) + \mu$ алмастыру жасалады. Қарастырылып отырған есеп екі бөлікке бөлінеді: біріншісі - жәй дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі, екіншісі - енгізілген параметрге қатысты сызықтық теңдеу.

Коши есебінің шешімін анықтау үшін орамдар теориясына негізделген Микусинскийдің операторлық әдісі пайдаланылады. Микусинскийдің операторлық әдісі - жәй дифференциалдық және интегралдық теңдеулерді шешуде қолданылатын тиімді аналитикалық құрал. Бұл әдіс орамдар (свертка) теориясына негізделген және операторлық есептеулер арқылы теңдеулердің шешімін табуға мүмкіндік береді. Микусинский әдісінің негізгі ерекшелігі - дифференциалдық теңдеуді арнайы анықталған операторлар көмегімен түрлендіру арқылы оны алгебралық түрде қарастыру болып табылады. Осы әдіс негізінде параметр λ мәндеріне байланысты Коши есебінің шешімі анықталып, ол шеттік шарттарға қойылады. Нәтижесінде, енгізілген α, β параметрлерге қатысты сызықтық теңдеулер жүйесі алынады.

Алынған теңдеудің параметрлеріне қатысты шешімділігіне байланысты бастапқы бейлокальды шеттік есептің шешімділігі туралы теоремалар тұжырымдалады. Зерттеу нәтижелері бейлокальды шарттары бар дифференциалдық теңдеулерді шешудің тиімді жолдарын көрсетіп, олардың теориялық негіздерін нақтылайды.

Негізгі сөздер: бейлокал шартты, шекаралық есеп, параметрлеу әдісі, Коши есебі, бірімді шешімділік, операторлық әдіс, орамдар теориясы.

Abstract. In this paper, Dzhumabaev's parameterization method is used to study ordinary differential equations with nonlocal boundary conditions. The parameter $\mu = y(0)$ was introduced and the replacement $y(x) = u(x) + \mu$ was performed. The problem under consideration is divided into two parts: the first is the Cauchy problem for an ordinary differential equation, the second is a linear equation with respect to the introduced parameter.

To determine the solution to the Cauchy problem, the Mikusinsky operator method is used, based on the convolution theory. The Mikusinsky operator method is an effective analytical tool used to solve ordinary differential and integral equations. This method is based on the theory of convolutions and allows finding solutions to equations using operator calculations. The main feature of Mikusinsky's method is that it is considered algebraically, by transforming the differential equation using specially defined operators. Based on this method, using the values of λ , we determine the solution to the Cauchy problem and, by placing it on the boundary conditions, we obtain a system of linear equations associated with the introduced parameters α, β .

Theorems on the solvability of the original nonlocal boundary value problem are formulated based on the solvability of the resulting equation with respect to its parameters. The results of the study demonstrate effective methods for solving differential equations with nonlocal conditions and clarify their theoretical foundations.

Key words: nonlocal conditions, boundary value problem, parameterization method, Cauchy problem, unique solvability, operator method, convolution theory.

Аннотация. В данной статье метод параметризации Джумабаева используется для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными граничными условиями. Был введен параметр $\mu = y(0)$ и выполнена замена $y(x) = u(x) + \mu$. Рассматриваемая задача разделена на две части: первая - задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, вторая - линейное уравнение относительно введенного параметра. Для определения решения задачи Коши используется метод оператора

Микусинского, основанный на теории свертки. Операторный метод Микусинского является эффективным аналитическим инструментом, используемым для решения обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений. Этот метод основан на теории свертки и позволяет находить решения уравнений посредством операторных вычислений. Главной особенностью метода Микусинского является то, что он рассматривается алгебраически, путем преобразования дифференциального уравнения с помощью специально определенных операторов. На основе этого метода по значениям λ определяем решение задачи Коши и, поставив его на граничные условия, получаем систему линейных уравнений, связанную с введенными параметрами α, β .

Формулируются теоремы о разрешимости исходной нелокальной краевой задачи на основе разрешимости полученного уравнения относительно его параметров. Результаты исследования демонстрируют эффективные способы решения дифференциальных уравнений с нелокальными условиями и проясняют их теоретические основы.

Ключевые слова: нелокальные условия, краевая задача, метод параметризации, задача Коши, однозначная разрешимость, операторный метод, теория свертки.

Кіріспе

Дифференциалдық теңдеулер әртүрлі физикалық, биологиялық және инженерлік процестерді математикалық модельдеуде маңызды рөл атқарады. Классикалық тұрғыда шекаралық шарттар қарастырып отырған есептің белгілі бір нүктелеріндегі мәндерді беру арқылы анықталады. Алайда көптеген практикалық есептерді шешу барысында, шеттік шарттар шешімнің бүкіл аймақтағы нүктелерінде немесе оның бір бөлігінің интегралы арқылы немесе басқа да тәуелділіктер түрінде анықталады, яғни бейлокальды шеттік шарттар пайда болады.

Мұндай есептер жылуөткізгіштік теориясы, деформацияланған қатты дене механикасы, биофизика және экология сияқты салаларда кездеседі. Мысалы, жылу таралу есесінде жылу көздерінің жиынтығын есептеуді модельдеу барысында интегралдық шекаралық шарттар туындайды, ал популяциялардың таралуын сипаттайтын биология есептерінде шеттік шарттар индивидтердің таралуынан жаһандық тәуелділігін қамтуы мүмкін бейлокальдық шарттармен беріледі.

Бейлокальды шеттік шарттары бар дифференциалдық теңдеулерді зерттеу теориялық және қолданбалы маңызға ие. Бір жағынан, шешімдердің бар болуы мен бірегейлігін анықтау, сондай-ақ олардың аналитикалық және сандық әдістерін әзірлеу маңызды. Екінші жағынан, мұндай модельдерді практикалық қолдану тиімді есептеу алгоритмдерін дамытуды және оларды нақты есептерге бейімдеуді талап етеді.

Соңғы жылдарда дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокальдық шекаралық есептер зерттеушілердің назарын барған сайын көбірек аударуда. Себебі, бейлокальдық шарттар шешімнің мәндерін тек облыстың шекарасында ғана емес, оның ішкі нүктелерінде немесе интегралдық байланыстыр ретінде беріледі.

А.М. Нахушев дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокальды шекаралық есептер теориясының дамуына елеулі үлес қосты. Ол алғаш рет ығысуы бар шекаралық есеп, бейлокальды есептер және жүктелген теңдеулер ұғымдарын енгізді, бұл осы саладағы одан әрі

зерттеулердің негізіне айналды. [1] жұмысында ол шекаралық шарттары шешімнің облыстың басқа нүктелеріндегі мәндеріне немесе облыс бойынша интегралдарға тәуелді болатын есептерді зерттеді, бұл шешімнің жергілікті қасиеттеріне оның ғаламдық сипаттарының әсерін көрсетеді.

А.А. Самарский мен Н.И. Ионкин бұл есептерді шешудің сандық әдістерін дамытуға айтарлықтай үлес қосты, олар бейлокалды шекаралық шарттар үшін орнықты айырмалар схемаларын жасады [2].

Сонымен қатар, М.А. Садыбековтың парабола-гипербола типті теңдеулер үшін бейлокалды шекаралық есептердің спектрлік қасиеттеріне арналған зерттеулері маңызды [3]. Әртүрлі теңдеулер үшін локальді емес есептер көптеген авторлардың жұмыстарында қарастырылды [4-8].

Бұл мақалада бейлокалды шекаралық шарттары бар дифференциалдық теңдеулерді зерттеудің негізгі тәсілдері қарастырылады. Шеттік есептерді шешудің жаңа бір әдісі ретінде профессор Д.Джумабаевтың [9] параметрлеу әдісі қолданылады. Бастапқы кезде параметрлеу әдісі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешуде қолданылған болатын [10]. Кейін ол интегралдық - дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешуде [11-13], дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы - шеттік есептерді шешуде кеңінен қолданылатын болды [14,15].

Зерттеу әдістері және негізгі нәтижелер

$[0,1]$ кесіндісінде интегралдық шартты шеттік есепті қарастырамыз:

$$y''(x) + \lambda y(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \quad (1)$$

$$y'(0) = 0, \quad (2)$$

$$y(0) = \alpha y(1) + \beta \int_0^1 y(x) dx \quad (3)$$

мұндағы, $f(x)$ - $[0,1]$ кесіндісінде үзіліссіз функция. α, β - тұрақтылар. λ - параметр.

Анықтама. (1) - (3) есебінің шешімі деп (1) дифференциалдық теңдеуді және (2), (3) шеттік шарттарды қанағаттандыратын $[0,1]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын $y(x)$ функциясын айтамыз.

Кесіндінің бастапқы нүктесінде $\mu = y(0)$ параметрін енгіземіз және $y(x) = u(x) + \mu$ алмастыруын жасаймыз. Сонда (1)-(3) есебі келесі эквивалентті есепке келтіріледі:

$$u''(x) + \lambda u(x) = f^*(x), \quad x \in [0,1] \quad (4)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \quad (5)$$

$$\mu = \alpha u(1) + \alpha \mu + \beta \int_0^1 u(x) dx + \beta \mu \quad (6)$$

мұндағы, $f^*(x) = f(x) - \lambda \mu$.

Лемма. (1) - (3) есебі (4) - (5) есебіне эквивалентті. Егер $(u(x), \mu)$ жұбы (4) - (5) есебінің шешімі болса, онда $y(x) = u(x) + \mu$, $\mu = y(0)$ бастапқы берілген (1) - (3) есебінің шешімі болады. Керісінше, егер $y(x)$ функциясы (1) - (3) есебінің шешімі болса, онда $u(x) = y(x) - \mu$, $\mu = y(0)$ функциясы (4) - (6) есебінің шешімі болады.

Коши есебінің шешімін Микусинский ұсынған операциялық есептеулер [16] арқылы анықтаймыз

$$u''(x) \rightarrow s^2 u(x) - su(0) - u'(0) = s^2 u(x) \quad (7)$$

болса, онда (4) теңдеу мына түрге келтіріледі:

$$s^2 u(x) + \lambda u(x) = f^*(x). \quad (8)$$

Бұдан

$$u(x) = \frac{1}{s^2 + \lambda} f^*(x). \quad (9)$$

Енді λ - параметрінің әр түрлі жағдайларында $u(x)$ функциясын қарастырамыз:

$\lambda = 0$ болған жағдайда.

Егер $\lambda = 0$ болса, онда $u(x) = \frac{1}{s^2} f^*(x)$ болады. Сонда $u(x)$ функциясын келесі түрде жазып аламыз:

$$u(x) = \frac{1}{s^2} f^*(x) = \int_0^x (x-\tau) f^*(\tau) d\tau = \int_0^x (x-\tau) f(\tau) d\tau - \lambda \mu \frac{x^2}{2} = \int_0^x (x-\tau) f(\tau) d\tau \quad (10)$$

Шыққан өрнекті шеттік шарттарға қою арқылы μ параметрінің мәнін анықтаймыз:

$$\mu = \alpha u(1) + \alpha \mu + \beta \int_0^1 u(x) dx + \beta \mu \Rightarrow$$

$$\mu = \alpha \int_0^1 (1-\tau) f(\tau) d\tau + \alpha \mu + \beta \mu + \beta \int_0^1 \int_0^x (x-\tau) f(\tau) d\tau dx$$

$$\mu - \alpha \mu - \beta \mu = \alpha \int_0^1 (1-\tau) f(\tau) d\tau + \beta \int_0^1 f(\tau) d\tau \int_{\tau}^1 (x-\tau) dx$$

$$\mu = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 (1-\tau) f(\tau) d\tau + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} f(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Теорема 1. $\lambda = 0$, $\alpha + \beta \neq 1$ болсын. Онда (1) - (3) теңдеуінің $y(x)$ шешімі бар болады

$$y(x) = \int_0^x (x-\tau) f(\tau) d\tau + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 (1-\tau) f(\tau) d\tau + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} f(\tau) d\tau.$$

Дәлелдеуі. (10) және (11) теңдіктерінен анықталған $(u(x), \mu)$ жұбы (4)-(6) есебінің шешімі болсын. Онда $u(x)$ пен μ мәндері арқылы анықталатын $y(x) = u(x) + \mu$ шешімі (1) - (3) есебінің шешімі болатындығын көрсетеміз. Ол үшін $y(x) = u(x) + \mu$ алмастыруына $u(x)$ пен μ мәндерін қойып $y(x)$ - ты анықтаймыз:

$$y(x) = \int_0^x (x-\tau) f(\tau) d\tau + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 (1-\tau) f(\tau) d\tau + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} f(\tau) d\tau \quad (12)$$

Шыққан (12) шешім (1) $y''(x) + \lambda y(x) = f(x)$ дифференциалдық теңдеуді, (2) $y'(0) = 0$ және (3) $y(0) = \alpha y(1) + \beta \int_0^1 y(x) dx$ шеттік шарттарын қанағаттандыратынын тексереміз:

$$1. \quad y'(x) = \int_0^x f(\tau) d\tau, \quad y''(x) = f(x), \quad y''(x) + \lambda y(x) = f(x) \Rightarrow f(x) + 0 = f(x).$$

Демек (1) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады.

$$2. \quad y'(0) = 0 \text{ шеттік шарты орындалады.}$$

$$3. \quad y(0) = \alpha y(1) + \beta \int_0^1 y(x) dx \Rightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 (1-\tau) f(\tau) d\tau + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} f(\tau) d\tau -$$

$$-\alpha \int_0^1 (1-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\alpha^2}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 (1-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} f(\tau) d\tau -$$

$$-\beta \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} f(\tau) d\tau - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 (1-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\beta^2}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2} f(\tau) d\tau = 0$$

Тепе-теңдік орындалды. Демек (3) шеттік шартты да қанағаттандырады. Теорема дәлелденді.

$\lambda > 0$ болған жағдай.

$\lambda > 0$ болған жағдайда $u(x) = \frac{1}{s^2 + \lambda} f^*(x)$, $f^*(x) = f(x) - \lambda \mu$ болады. Сонда $u(x)$

функциясын келесі түрде жазып аламыз:

$$u(x) = \frac{1}{s^2 + (\sqrt{\lambda})^2} f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) f^*(\tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\lambda \mu}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau - \mu (1 - \cos \sqrt{\lambda} x)
 \end{aligned} \quad (13)$$

Шыққан өрнекті шеттік шарттарға қоямыз:

$$\mu = \alpha u(1) + \alpha \mu + \beta \int_0^1 u(x) dx + \beta \mu \Rightarrow \mu(1 - \alpha - \beta) = \alpha u(1) + \beta \int_0^1 u(x) dx$$

Бұдан

$$\mu = \frac{1}{(1 - \alpha - \beta)} \alpha u(1) + \frac{\beta}{(1 - \alpha - \beta)} \int_0^1 u(x) dx \quad (14)$$

болады. $u(1)$ және $\int_0^1 u(x) dx$ мәндерін анықтап (14) теңдігіне қоямыз. Сонда

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) f(\tau) d\tau - \mu (1 - \cos \sqrt{\lambda}) \right] + \\
 &+ \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 (1 - \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau)) f(\tau) d\tau - \mu \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} \right) \right],
 \end{aligned}$$

Осыдан μ параметрінің мәнін анықтаймыз:

$$\mu = \frac{1}{\lambda - \alpha \lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \int_0^1 \left[\alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) \right] f(\tau) d\tau \quad (15)$$

Теорема 2. $\lambda > 0$ болғанда $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $\lambda \neq 4\tau^2 k^2$ болсын.

Онда (1) - (3) теңдеуінің $y(x)$ шешімі бар болады:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau + \\
 &+ \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda - \alpha \lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \int_0^1 \left[\alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) \right] f(\tau) d\tau
 \end{aligned} \quad (16)$$

Дәлелдеуі. (13) және (15) теңдіктерінен анықталған $(u(x), \mu)$ жұбы (4) - (6) есебінің шешімі болсын. Онда $u(x)$ пен μ мәндері арқылы анықталатын $y(x) = u(x) + \mu$ шешімі (1)

- (3) есебінің шешімі болатындығын көрсетеміз. Ол үшін $y(x) = u(x) + \mu$ алмастыруына (13) және (15) теңдіктерінің оң жағын қойып $y(x)$ - ты анықтаймыз:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau + \\ + \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda - \alpha \lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \int_0^1 [\alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau)] f(\tau) d\tau$$

Шыққан (16) шешім (1) $y''(x) + \lambda y(x) = f(x)$ дифференциалдық теңдеуді, (2) $y'(0) = 0$ және (3) $y(0) = \alpha y(1) + \beta \int_0^1 y(x) dx$ шеттік шарттарын қанағаттандыратынын тексереміз. Ол үшін $y'(x)$, $y''(x)$ -ті анықтап аламыз.

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x}{\lambda - \alpha \lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \times \\ \times \int_0^1 [\alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau)] f(\tau) d\tau \\ y''(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} f(x) - \int_0^x \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\lambda \cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda - \alpha \lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \times \\ \times \int_0^1 [\alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau)] f(\tau) d\tau.$$

Бастапқы теңдеуге қоямыз:

$$1. \quad f(x) - \int_0^x \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\lambda \cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda - \alpha \lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \times \\ \times \int_0^1 [\alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau)] f(\tau) d\tau + \frac{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau + \\ + \frac{\lambda \cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda - \alpha \lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \cdot \int_0^1 [\alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau)] f(\tau) d\tau = f(x) \\ f(x) = f(x).$$

Тепе-теңдік орнады, демек шешім $y(x)$ - бастапқы (1) теңдеуін қанағаттандырады. Енді $y(x)$ шеттік шарттарды да қанағаттандыратындығын тексереміз:

2. $y'(0) = 0$

3. $y(0), y(1), \int_0^1 y(x) dx$ -ті анықтап алып (3) шеттік шартқа қоямыз.

$$y(0) = \frac{1}{\lambda - \alpha\lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \int_0^1 \left[\alpha\sqrt{\lambda} \cdot \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) \right] f(\tau) d\tau,$$

$$y(1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) f(\tau) d\tau + \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\lambda - \alpha\lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[\alpha\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) \right] f(\tau) d\tau,$$

$$\int_0^1 y(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau + \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda - \alpha\lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 \left[\alpha\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) \right] f(\tau) d\tau \right] dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 f(\tau) d\tau \int_{\tau}^1 \sin \sqrt{\lambda} (x-\tau) dx + \int_0^1 \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda - \alpha\lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[\alpha\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) \right] f(\tau) d\tau dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \int_0^1 \left(\cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) - 1 \right) f(\tau) d\tau + \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} (\lambda - \alpha\lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda})} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[\alpha\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) \right] f(\tau) d\tau.$$

Сонда келесі теңдік алынады:

$$y(0) = \alpha y(1) + \beta \int_0^1 y(x) dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda - \alpha\lambda \cos \sqrt{\lambda} - \beta\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \times \int_0^1 \left[\alpha\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) \right] f(\tau) d\tau \times$$

$$\times \left(1 - \alpha \cos \sqrt{\lambda} - \frac{\beta \sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\beta}{\lambda} \left(\int_0^1 \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) - 1 \right) f(\tau) d\tau$$

немесе

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \alpha \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) f(\tau) d\tau = \\ & = \frac{1}{\lambda} \left(\int_0^1 \sqrt{\lambda} \alpha \sin \sqrt{\lambda} (1-\tau) - \beta \cos \sqrt{\lambda} (1-\tau) + \beta \right) f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Сонымен $u(x)$ үшінші шартты да қанағаттандырады. Теорема дәлелденді.

$$\lambda < 0 \text{ болған жағдайда } u(x) = \frac{1}{s^2 + \lambda} f^*(x) = \frac{1}{s^2 - (\sqrt{-\lambda})^2} f^*(x), \quad f^*(x) = f(x) - \lambda \mu$$

болады. Сонда $u(x)$ функциясын келесі түрде жазып аламыз:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{s^2 - (\sqrt{-\lambda})^2} f^*(x) = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \frac{1}{s - \sqrt{-\lambda}} f^*(x) - \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \frac{1}{s + \sqrt{-\lambda}} f^*(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \left[\int_0^x \frac{e^{\sqrt{-\lambda}(x-\tau)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(x-\tau)}}{2} \right] f^*(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^x sh \sqrt{-\lambda} (x-\tau) f^*(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^x sh \sqrt{-\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau - \frac{\lambda \mu}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^x sh \sqrt{-\lambda} (x-\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^x sh \sqrt{-\lambda} (x-\tau) f(\tau) d\tau - \mu (1 - ch x \sqrt{-\lambda}) \end{aligned} \quad (17)$$

Шыққан өрнектің $u(1) \int_0^x u(x) dx$ мәндерін есептеп шеттік шарттарға қоямыз:

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 sh \sqrt{-\lambda} (1-\tau) f^*(\tau) d\tau \\ \int_0^1 u(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^x sh \sqrt{-\lambda} (x-\tau) f^*(\tau) d\tau dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} f^*(\tau) d\tau \int_\tau^1 sh \sqrt{-\lambda} (x-\tau) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\lambda} \sqrt{-\lambda}} (ch \sqrt{-\lambda} (1-\tau) - 1) f^*(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Енді μ мәнін анықтаймыз:

$$\mu = \alpha (u(1) + \mu) + \beta \int_0^x u(x) dx + \beta \mu = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 sh \sqrt{-\lambda} (1-\tau) f^*(\tau) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}\sqrt{-\lambda}} (ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau)-1) f^*(\tau) d\tau = \\
 & = \left[\int_0^1 \frac{\alpha sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau)}{\sqrt{-\lambda}(1-\alpha-\beta)} + \frac{\beta(ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau)-1)}{\sqrt{-\lambda}\sqrt{-\lambda}(1-\alpha-\beta)} \right] f(\tau) d\tau - \\
 & - \lambda \mu \int_0^1 \frac{\alpha sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau)}{\sqrt{-\lambda}(1-\alpha-\beta)} + \frac{\beta(ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau)-1)}{\sqrt{-\lambda}\sqrt{-\lambda}(1-\alpha-\beta)} d\tau = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\sqrt{-\lambda}-\alpha\sqrt{-\lambda}ch\sqrt{-\lambda}-\beta sh\sqrt{-\lambda})} \int_0^1 (\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta) f(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

Сонымен

$$\mu = \frac{1}{-\lambda - \alpha\lambda ch\sqrt{-\lambda} - \beta\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 (\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta) f(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Теорема 3. $\lambda < 0$ болғанда $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $\lambda \neq -4\pi^2 k^2$, $\lambda \neq 0$ болсын. Онда (1)-(3) теңдеуінің $y(x)$ шешімі бар болады:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^x sh\sqrt{-\lambda}(x-\tau) f(\tau) d\tau + chx\sqrt{-\lambda} \times \\
 &\times \frac{1}{-\lambda + \alpha\lambda ch\sqrt{-\lambda} - \beta\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 (\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta) f(\tau) d\tau \quad (19)
 \end{aligned}$$

Дәлелдеуі. (17) және (18) теңдіктерінен анықталған $(u(x), \mu)$ жұбы (4) - (6) есебінің шешімі болсын. Онда $u(x)$ пен μ мәндері арқылы анықталатын $y(x) = u(x) + \mu$ (19) шешімі (1) - (3) есебінің шешімі болатындығын көрсетеміз. Ол үшін $y(x) = u(x) + \mu$ алмастыруына (17) және (18) теңдіктерінің оң жағын қоямыз.

Шыққан (19) шешім (1) $y''(x) + \lambda y(x) = f(x)$ дифференциалдық теңдеуді, (2) $y'(0) = 0$ және (3) $y(0) = \alpha y(1) + \beta \int_0^1 y(x) dx$ шеттік шарттарын қанағаттандырады. Ол үшін $y'(x)$, $y''(x)$ -ті анықтап аламыз.

$$y'(x) = - \int_0^x ch\sqrt{-\lambda}(x-\tau) f(\tau) d\tau + \sqrt{-\lambda} shx\sqrt{-\lambda} \int_0^1 \frac{\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta}{\sqrt{-\lambda}(\sqrt{-\lambda}-\alpha\sqrt{-\lambda}ch\sqrt{-\lambda}-\beta sh\sqrt{-\lambda})} f(\tau) d\tau,$$

$$y''(x) = f(x) + \int_0^x \sqrt{-\lambda} sh\sqrt{-\lambda}(x-\tau) f(\tau) d\tau +$$

$$+ (\sqrt{-\lambda})^2 chx\sqrt{-\lambda} \int_0^1 \frac{\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta}{\sqrt{-\lambda}(\sqrt{-\lambda} - \alpha\sqrt{-\lambda}ch\sqrt{-\lambda} - \beta sh\sqrt{-\lambda})} f(\tau) d\tau$$

Табылған мәндерді бастапқы дифференциалдық теңдеуге қоямыз:

$$\begin{aligned} y''(x) + \lambda y(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) + \int_0^x \sqrt{-\lambda} sh\sqrt{-\lambda}(x-\tau) f(\tau) d\tau + \\ + (\sqrt{-\lambda})^2 chx\sqrt{-\lambda} \int_0^1 \frac{\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta}{\sqrt{-\lambda}(\sqrt{-\lambda} - \alpha\sqrt{-\lambda}ch\sqrt{-\lambda} - \beta sh\sqrt{-\lambda})} f(\tau) d\tau + \\ + \frac{\lambda}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^x sh\sqrt{-\lambda}(x-\tau) f(\tau) d\tau + \lambda chx\sqrt{-\lambda} \times \\ \times \int_0^1 \frac{\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta}{\sqrt{-\lambda}(\sqrt{-\lambda} - \alpha\sqrt{-\lambda}ch\sqrt{-\lambda} - \beta sh\sqrt{-\lambda})} f(\tau) d\tau = f(x) \quad \Rightarrow f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Енді шеттік шарттарды тексереміз. $y(1)$, $\int_0^1 y(x) dx$ мәндерін есептейміз.

$$\begin{aligned} y(1) &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) f(\tau) d\tau + ch\sqrt{-\lambda} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\sqrt{-\lambda} - \alpha\sqrt{-\lambda}ch\sqrt{-\lambda} - \beta sh\sqrt{-\lambda})} \int_0^1 (\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta) f(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta ch\sqrt{-\lambda} + \beta ch\tau\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{-\lambda}(\sqrt{-\lambda} - \alpha\sqrt{-\lambda}ch\sqrt{-\lambda} - \beta sh\sqrt{-\lambda})} f(\tau) d\tau, \\ \int_0^1 y(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^x sh\sqrt{-\lambda}(x-\tau) f(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^1 chx\sqrt{-\lambda} \left[\int_0^1 \frac{\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - \beta}{\sqrt{-\lambda}(\sqrt{-\lambda} - \alpha\sqrt{-\lambda}ch\sqrt{-\lambda} - \beta sh\sqrt{-\lambda})} f(\tau) d\tau \right] dx = \int_0^1 \frac{(ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) - 1) f(\tau) d\tau}{(\sqrt{-\lambda})^2} + \\ &+ \int_0^1 \frac{\alpha\sqrt{-\lambda}sh\sqrt{-\lambda}(1-\tau) sh\sqrt{-\lambda} + \beta ch\sqrt{-\lambda}(1-\tau) sh\sqrt{-\lambda} - \beta sh\sqrt{-\lambda}}{(\sqrt{-\lambda})^2 (\sqrt{-\lambda} - \alpha\sqrt{-\lambda}ch\sqrt{-\lambda} - \beta sh\sqrt{-\lambda})} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) = \alpha y(1) + \beta \int_0^1 y(x) dx &\Rightarrow \int_0^1 (\alpha \sqrt{-\lambda} sh \sqrt{-\lambda} (1-\tau) + \beta ch \sqrt{-\lambda} (1-\tau) - \beta) f(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^1 (\alpha \sqrt{-\lambda} sh \sqrt{-\lambda} (1-\tau) + \beta ch \sqrt{-\lambda} (1-\tau) - \beta) f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Шешім $y(x)$ (3) шеттік шартын қанағаттандырады. Теорема дәлелденді.

Қорытынды

Бұл жұмыста жәй дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шартты шеттік есеп қарастырылды. Қарастырылып отырған есептердің шешілімділігін алу жолдары көрсетіледі. Шешімнің бірегейлігі мен бар болуын дәлелдеу үшін Микусинский теориясы пайдаланылады.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің грантымен (грант № AP23488086) қолдау тапты.

Әдебиеттер тізімі.

1. Нахушев, А. М. (1995). *Уравнения математической биологии*. – Москва: Издательство "Высшая Школа",
2. Ionkin, N. I. (1977). *Solution of nonlocal problems for one-dimensional oscillations of a medium*. Differential Equations, 12(4), 294–304.
3. Садыбеков, М. А., Турметов, Б. Х. (2014). *Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге*. Дифференциальные уравнения, 50(2), 264–264.
4. Кожанов, А. И., Тарасова, Г. И. (2023). *Пространственно-нелокальные краевые задачи для некоторых классов уравнений соболевского типа высокого порядка*.
5. Покровский, И. Л., Мартынов, Д. А., Зубарев, К. М. (2024). *Исследование собственных функций краевой задачи с нелокальными граничными условиями*. Международный журнал гуманитарных и естественных наук, 4 (98), 177–185.
6. Зикиров, Б. З., Маманазаров, Д. С. (2022). *Локальные и нелокальные краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений с незнакомоопределенным направлением эволюции*.
7. Езаова, А. Г. и др. (2021). *Нелокальная внутренняя краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка*. Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2 (210), 4–10.
8. Марданов, М. Д., Шарифов, Я. А. (2025). *Существование и единственность решений системы Гурса–Дарбу с интегральными граничными условиями*. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки», 29(2), 241–255.
9. Джумабаев, Д. С. (1989). *Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения*. Журнал вычислительной математики и математической физики, 29(1), 50–66.
10. Джумабаев, Д. С., Назарова, К. Ж. (2006). *Об одном варианте метода параметризации для нелинейной двухточечной краевой задачи*. Математический журнал, 6(2), 60–67.
11. Bakirova, E., Iskakova, N., Kadirbayeva, Z. (2023) *Numerical implementation for solving the boundary value problem for impulsive integro-differential equations with parameter*. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 119(3), 19–29.
12. Кадирбаева, Ж. М., Бакирова, Е. А. (2020) *Numerical Solution of the Boundary Value Problems for the Loaded Differential and Fredholm Integro-differential Equations*. International Journal of Information and Communication Technologies, 1(2), 406941.
13. Усманов, К. И. (2022). *Условие однозначной разрешимости нелокальных краевых задач для систем функционально-дифференциальных уравнений*. QA Iasaýı atyndaǵy Halyqaralyq qazaq-túrik yníversitetiniń habarlary, 3(22), 48–58.

14. Assanova, A., Molybaikyzy, A. (2025). Solution to the periodic problem for the impulsive hyperbolic equation with discrete memory. *Kazakh Mathematical Journal*, 25(1), 16-27.
15. Каженова, Н. Ж., Орумбаева, Н. Т. (2022). Об одной нелинейной краевой задаче для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*, 206(0), 63-67.
16. Микусинский, Я. (2013). *Операторное исчисление*. – Рипол Классик.

References

1. Nakhushhev, A. M. (1995). *Uravneniya matematicheskoy biologii*. – Moskva: Izdatel'stvo "Vysshaya Shkola".
2. Ionkin, N. I. (1977). Solution of nonlocal problems for one-dimensional oscillations of a medium. *Differential Equations*, 12(4), 294–304.
3. Sadybekov, M. A., Turmetov, B. Kh. (2014). Ob odnom analoge periodicheskikh kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona v krug. *Differentsial'nye uravneniya*, 50(2), 264–264.
4. Kozhanov, A. I., Tarasova, G. I. (2023). Prostranstvenno-nelokal'nye kraevye zadachi dlya nekotorykh klassov uravneniy sobolevskogo tipa vysokogo poriyadka.
5. Pokrovskiy, I. L., Martynov, D. A., Zubarev, K. M. (2024). Issledovanie sobstvennykh funktsiy kraevoy zadachi s nelokal'nymi granichnymi usloviyami. *Mezhdunarodnyy zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 4 (98), 177–185.
6. Zikirov, B. Z., Mamanazarov, D. S. (2022). Lokal'nye i nelokal'nye kraevye zadachi dlya nekotorykh klassov differentsial'nykh uravneniy s neznakoopredelennym napravleniem evolyutsii.
7. Ezaova, A. G. i dr. (2021). Nelokal'naya vnutrennyaya kraevaya zadacha dlya smeshannogo uravneniya tret'ego poriyadka. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severokavkazskiy region. Estestvennye nauki*, 2 (210), 4–10.
8. Mardanov, M. D., Sharifov, Ya. A. (2025). Sushchestvovanie i edinstvennost' resheniy sistemy Gursa–Darbu s integral'nymi granichnymi usloviyami. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki"*, 29(2), 241–255.
9. Dzhumabajev, D. S. (1989). Priznaki odnoznachnoy razreshimosti lineynoy kraevoy zadachi dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 29(1), 50–66.
10. Dzhumabajev, D. S., Nazarova, K. Zh. (2006). Ob odnom variante metoda parametrizatsii dlya nelineynoy dvukhtochkevoy kraevoy zadachi. *Matematicheskij zhurnal*, 6(2), 60–67.
11. Bakirova, E., Iskakova, N., Kadirbayeva, Z. (2023). Numerical implementation for solving the boundary value problem for impulsive integro-differential equations with parameter. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, 119(3), 19–29.
12. Kadirbaeva, Zh. M., Bakirova, E. A. (2020). Numerical Solution of the Boundary Value Problems for the Loaded Differential and Fredholm Integro-differential Equations. *International Journal of Information and Communication Technologies*, 1(2), 406941.
13. Usmanov, K. I. (2022). Uslovie odnoznachnoy razreshimosti nelokal'nykh kraevykh zadach dlya sistem funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. *QA Iasayı atyndaǵy Halyqaralyq qazaq-turik ıniversitetiniń habarlary*, 3(22), 48–58.
14. Assanova, A., Molybaikyzy, A. (2025). Solution to the periodic problem for the impulsive hyperbolic equation with discrete memory. *Kazakh Mathematical Journal*, 25(1), 16–27.
15. Kazhenova, N. Zh., Orumbaeva, N. T. (2022). Ob odnoy nelineynoy kraevoy zadache dlya differentsial'nogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh tret'ego poriyadka. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory*, 206(0), 63–67.
16. Mikusinskiy, Ya. (2013). *Operatornoe ischislenie*. – Ripol Klassik.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Назарова К. Ж. – физика-математика ғылым кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz , ORCID:0000-0002-2093-1879, +7 7479901964
	Nazarova K. Zh. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ahmet Yassawi University , Turkestan, Kazakhstan, e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz , ORCID:0000-0002-2093-1879, +7 7479901964

	Назарова К. Ж. – кандидат физико-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: kulzina.nazarova@ayu.edu.kz , ORCID:0000-0002-2093-1879, +7 7479901964
2	Усманов К. И. - физика-математика ғылым кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID:0000-0002-4311-5807, +7 7786467765
	Usmanov K. I. - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ahmet Yassawi University , Turkestan, Kazakhstan, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID:0000-0002-4311-5807, +7 7786467765
	Усманов К. И. – кандидат физико-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID:0000-0002-4311-5807, +7 7786467765
3	Нұрсейтов А. - магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: akhmad.nurseitov@ayu.edu.kz
	Nurseitov A. - master's student, Ahmet Yassawi University , Turkestan, Kazakhstan, e-mail: akhmad.nurseitov@ayu.edu.kz
	Нұрсейтов А – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: akhmad.nurseitov@ayu.edu.kz