

Шалхар А.Ә.¹, Турметов Б.Х.², Қошанова М.Д.³

¹докторант, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

(Қазақстан, Астана қ.), e-mail: shalkhar_aa@enu.kz

²ф.-м.ғ.д., профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

³ф.-м.ғ.к., Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

**БӨЛШЕК РЕТТІ ШЕКАРАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛАРЫ БАР БЕЙЛОКАЛ ПОЛИГАРМОНИЯЛЫҚ
ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕЙБІР ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ
ON THE SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A NONLOCAL
POLYHARMONIC EQUATION WITH FRACTIONAL-ORDER BOUNDARY OPERATORS
О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО
ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

Аңдатпа. Бұл жұмыста локалдық емес полигармониялық теңдеу үшін кейбір шеттік есептердің шешімділік мәселелері зерттеледі. Бейлокал полигармониялық оператор инволюция типті бейнелеулердің көмегімен жаңа класстағы локалдық емес полигармониялық оператор арқылы енгізіледі. Дирихле шарттары және бөлшек ретті шекаралық операторлары бар шеттік есептер қарастырылады. Локалдық емес полигармоникалық теңдеуге сәйкес Дирихле шартындағы шекаралық есептің шешімділік мәселелері зерттелді. Алдымен D есебінің шешімінің бар және бірегей екендігі айқындалып, оған сәйкес келетін теорема дәлелденеді. Осы теорема негізінде есептің Грин функциясының айқын түрі мен D есебінің шешімінің интегралдық түрде өрнектелуі туралы нәтиже алынды. Екінші есепте қатысатын бөлшек ретті операторлар Адамардың түрлендірілген туындылары көмегімен анықталады. Адамардың J_μ^α және D_μ^α интегро-дифференциалдық операторларының өзара кері бейнелеу болуы туралы қасиеттері келтіріледі және $J_\mu^\alpha u(x)$ және $D_\mu^\alpha u(x)$ функцияларының Гельдер класстарындағы тегістігі айқындалады. Интегро-дифференциалдық операторлардың осы қасиеттері негізінде N_α есебінің алдымен $\mu > 0$ жағдайында шешімі бар және бірегей екендігі дәлелденді. Ал $\mu = 0$ жағдайда N_α есебінің шешімі бар болуы үшін қажетті және жеткілікті шарт анықталады. Сонымен зерттеліп отырған есептер үшін шешімнің бар және бірегей болатынын көрсететін теоремалар дәлелденеді.

Негізгі сөздер: инволюция, бейлокал оператор, полигармониялық теңдеу, Адамар туындылары, Дирихле есебі, Нейман есебі.

Abstract. This paper investigates the solvability of certain boundary value problems for a nonlocal polyharmonic equation. The nonlocal polyharmonic operator is introduced through a new class of nonlocal polyharmonic operators using involution-type mappings. Boundary value problems with Dirichlet conditions and boundary operators of fractional order are considered. The solvability of a boundary value problem with Dirichlet conditions for the corresponding nonlocal polyharmonic equation is studied. First, the existence and uniqueness of the solution to Problem D are established, and the corresponding theorem is formulated. Based on this theorem, an explicit form of the Green's function and an integral representation of the solution to Problem D are obtained. The second problem under consideration involves boundary operators of fractional order, which are defined using modified Hadamard derivatives. The properties of mutual invertibility of the Hadamard-type integro-differential operators J_μ^α and D_μ^α are presented, and the smoothness of the functions $J_\mu^\alpha u(x)$ and $D_\mu^\alpha u(x)$ in Hölder classes is established. Based on these properties of the integro-differential operators, the existence and uniqueness of the solution to the corresponding problem N_α are proved under the condition $\mu > 0$, and in the case $\mu = 0$, a necessary and sufficient condition for the existence of a solution is determined. As a result, theorems are proved that confirm the existence and uniqueness of solutions for the problems under consideration.

Keywords: involution, nonlocal operator, polyharmonic equation, Hadamard derivatives, Dirichlet 7 problem, Neumann problem.

Аннотация. В данной работе исследуются вопросы разрешимости некоторых краевых задач для нелокального полигармонического уравнения. Бейлокальный полигармонический оператор вводится с помощью отображений типа инволюции через новый класс нелокальных полигармонических операторов. Рассматриваются краевые задачи с условиями Дирихле и граничными операторами дробного порядка.

Исследуется разрешимость краевой задачи с условием Дирихле для соответствующего нелокального полигармонического уравнения. Сначала доказываются существование и единственность решения задачи D , формулируется соответствующая теорема. На основе этой теоремы получен явный вид функции Грина и интегральное представление решения задачи D . Вторая рассматриваемая задача включает граничные операторы дробного порядка, которые определяются с помощью модифицированных производных Адамара. Приводятся свойства взаимной обратимости интегро-дифференциальных операторов Адамара J_μ^α и D_μ^α , а также устанавливается гладкость функций $J_\mu^\alpha u(x)$ и $D_\mu^\alpha u(x)$ в классах Гельдера. На основе этих свойств интегро-дифференциальных операторов доказываются существование и единственность решения задачи N_α при условии $\mu > 0$, а в случае $\mu = 0$ определяется необходимое и достаточное условие существования решения задачи N_α . В итоге, для рассматриваемых задач доказываются теоремы, подтверждающие существование и единственность их решений.

Ключевые слова: инволюция, нелокальный оператор, полигармоническое уравнение, производные Адамара, задача Дирихле, задача Неймана.

Кіріспе

С түрлендіру $S^2 t = t$ қасиетке ие болсын. Ізделінді $u(t)$ функциясымен бірге $u(S(t))$ мәні де кездесетін дифференциалдық теңдеулер Карлеман ығысуы бар теңдеулер немесе инволюциясылы теңдеулер деп аталады [1]. Инволютивті түрлендірілген аргументтері бар теңдеулердің теориясы және олардың қолданылуы [2–5] монографияларында жан-жақты сипатталған. Бүгінгі таңда инволюцияның әртүрлі түрлері бар дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік және бастапқы-шеттік есептердің дұрыс қойылуы; шешімдердің сапалық қасиеттері және спектрлік мәселелері [6–12] әдебиеттерде кеңінен зерттелген. [13–17] еңбектерде инволюциясы бар дербес туындылы теңдеулер үшін кері есептердің шешімділігі қарастырылған.

[18] жұмыста R^n кеңістігінде Лаплас операторының келесі бейлокал аналогы енгізілген.

$$L_l[u](x) \equiv a_0 \Delta u(x) + a_1 \Delta u(Sx) + \dots + a_{l-1} \Delta u(S^{l-1}x),$$

мұндағы, Δ - Лаплас операторы, $a_j, j = 0, 1, \dots, l-1$ - нақты сандар, S - $n \times n$ өлшемді ортогоналды матрица және ол үшін $S^l = E$ болатындай $l \in N$ табылады, E - бірлік матрица. Жоғарыда аталған [18] жұмыста бірлік шарда сәйкес $L_l[u] = f(x)$ бейлокал Пуассон теңдеуі үшін Дирихле, Нейман және Робен шарттарымен берілген негізгі шеттік есептердің шешімділік мәселелері зерттелген. Ары қарай, осы есептердің жалғасы ретінде [19] еңбекте бейлокал Гельмгольц теңдеуі үшін бейлокал шарттары бар шеттік есептер зерттелген. Сонымен қатар, [20] еңбекте R^2 кеңістігінде тік төртбұрыш аймақта Пуассон теңдеуінің бейлокал аналогы үшін Дирихле есебінің шешімділігі зерттелген.

Айталық, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, n \geq 2$ болсын. Барлық $1 \leq j \leq n$ мәндері үшін $S_j x = (x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ түріндегі бейнелеуді қарастайық. $S_j^2 = E$ екені анық. Егер осы бейнелеулердің барлық мүмкін болған көбейтінділерін қарастырсақ, олардың жалпы саны, $S_0 x = x$ теңдік бейнелеуді есепке алғанда, 2^n -ге тең болады.

Мысал 1. $n = 3$ кезінде келесіге ие боламыз

$$S_0 x = x; S_1 x = (-x_1, x_2, x_3); S_2 x = (x_1, -x_2, x_3); S_3 x = (x_1, x_2, -x_3);$$

$$S_4 x = S_1 S_2 x \equiv (-x_1, -x_2, x_3); S_5 x = S_1 S_3 x \equiv (-x_1, -x_2, x_3); S_6 x = S_2 S_3 x \equiv (x_1, -x_2, -x_3);$$

$$S_7 x = S_1 S_2 S_2 x \equiv (-x_1, -x_2, -x_3).$$

$\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ – бірлік шар $R^n, n \geq 2$ болсын, ал $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ – бірлік сфера. S_j түріндегі бейнелеуді жалпылап, бұдан әрі $S_1, \dots, S_n - S_i^2 = E$ болатындай нақты симметриялы $S_i S_j = S_j S_i$ коммутативті матрицалар жиыны берілген деп есептейміз. Айта кетейік, $|x|^2 = (S_i^2 x, x) = (S_i x, S_i x) = |S_i x|^2$ болса, онда $x \in \Omega \Rightarrow S_i x \in \Omega$ және $x \in \partial\Omega \Rightarrow S_i x \in \partial\Omega$.

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2^n-1}$ – нақты сандардың кейбір жиыны болсын. Егер i индексінің жазбасын екілік санау жүйесінде $(i_n \dots i_1)_2 \equiv i, k = 1, \dots, n$ түрінде енгізсек, мұнда кезде $i_k = 0, 1$, онда бұл коэффициенттерді $a_{(0 \dots 00)_2}, a_{(0 \dots 01)_2}, a_{(0 \dots 10)_2}, a_{(0 \dots 11)_2}, \dots, a_{(1 \dots 11)_2}$ түрінде жазамыз. Олай болса, $x \rightarrow S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x$ түріндегі бейнелеуді қарастыруға болады. Атап айтқанда, мысал 1-дегі бейнелеулерді қарастырсақ, онда

$$0 = (000)_2, 1 = (001)_2, 2 = (010)_2, 3 = (011)_2, 4 = (100)_2, 5 = (101)_2, 6 = (110)_2, 7 = (111)_2$$

және

$$\begin{aligned} S_0 x &\equiv S_3^0 S_2^0 S_1^0 x; S_1 x = S_3^0 S_2^0 S_1^1 x; S_2 x = S_3^0 S_2^1 S_1^0 x; S_3 x = S_3^0 S_2^1 S_1^1 x; S_4 x = S_3^1 S_2^0 S_1^0 x; \\ S_5 x &= S_3^1 S_2^0 S_1^1 x; S_6 x = S_3^1 S_2^1 S_1^0 x; S_7 x = S_3^1 S_2^1 S_1^1 x; \end{aligned}$$

Бұл жазбаны пайдалана отырып, келесі операторды енгіземіз

$$L_n u \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-\Delta)^m u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x).$$

Пуассон теңдеуінің L_n операторымен берілген бейлокал аналогы үшін Дирихле мен Нейманның шеттік есептері [21] жұмыста зерттелген, ал спектрлік мәселелер [22] жұмыста қарастырылған. Сонымен қатар, [23] еңбекте бейлокал Пуассон теңдеуі үшін бөлшек ретті шекаралық операторлар қатысқан шеттік есептер зерттелген.

Бұл жұмыс аталған зерттеулердің жалғасы болып табылады және біз Дирихле шартымен, сондай-ақ бөлшек ретті шекаралық операторлар қатысқан кейбір шеттік есептердің шешімділік мәселелерін зерттейміз.

Одан әрі шекаралық шарттарды қою үшін бөлшек ретті интеграл мен туындының анықтамалары қажет болады.

Кез-келген $\alpha > 0$ үшін келесі өрнек

$$J^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{u(s\theta)}{s} ds$$

Адамар мағынасындағы α -ретті интегралдау операторы деп аталады [24].

Бұдан әрі $J^0[u](x) = u(x)$ деп есептейміз.

Айнымалыларды $s = \xi r$ алмастырған соң интеграл $J^\alpha[u](x)$ мынадай түрде жазылады

$$J^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{\xi} \right)^{\alpha-1} \frac{u(\xi x)}{\xi} d\xi.$$

$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{\xi} \right)^{\alpha-1} \xi^{-1} d\xi$ интегралы жинақталмайтындықтан, J^α операторы $u(0) \neq 0$ кезінде үзіліссіз $u(x)$ функциясына қолдануға болмайды.

Сондықтан, кез-келген $\alpha \in (\ell-1, \ell], \ell=1, 2, \dots$ үшін бөлшек ретті дифференциалдау операторы ретінде біз келесі Адамар операторының келесі түрлендірілген нұсқасын қарастырамыз [25]

$$D^\alpha[u](x) = J^{\ell-\alpha} [\delta^\ell[u]](x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\ell-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{\ell-1-\alpha} \left(s \frac{d}{ds} \right)^\ell [u](s\theta) \frac{ds}{s}.$$

Сонымен қатар, кез-келген $\mu \geq 0$ үшін біз келесі операторларды қарастырамыз

$$J_\mu^\alpha[u](x) = r^{-\mu} J^\ell [r^\mu u](x) \equiv \frac{r^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{\alpha-1} s^{\mu-1} u(s\theta) ds,$$

$$D_\mu^\alpha[u](x) = r^{-\mu} D^\ell [r^\mu u](x) \equiv \frac{r^{-\mu}}{\Gamma(\ell-\alpha)} \int_0^r \left(\ln \frac{r}{s} \right)^{\alpha-1} \left(s \frac{d}{ds} \right)^\ell [s^\mu u(s\theta)] \frac{ds}{s}.$$

$J_0^\alpha = J^\alpha, D_0^\alpha = D^\alpha$ болатыны айқын.

Осы жұмыста біз келесі шеттік есептерді зерттейміз.

D (Дирихле) есебі. Төмендегі

$$L_n u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial\Omega} = g_k(x), k=0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega})$ функциясын табу керек. Мұндағы ν - $\partial\Omega$ сфераға жүргізілген сыртқы нормаль векторы.

N_α **есебі.** $0 < \alpha \leq 1, \mu \geq 0$ болсын. $D_\mu^{\alpha+k} u(x)$ туындылары $C(\bar{\Omega})$ класына тиісті, (1) тендеуі мен төменде берілген

$$D_\mu^{\alpha+k} u(x) \Big|_{\partial\Omega} = g_k(x), k=0, 1, \dots, m-1. \quad (3)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ функциясын табу керек

$J^0[u](x) = u(x)$ болғандықтан, $\alpha = 1$ кезінде келесі теңдік орындалады

$$D_\mu^{k+1}[u](x) = \delta_\mu^{k+1}[u](x) \equiv \left(r \frac{d}{dr} + \mu \right)^{k+1} u(x), k \geq 0.$$

[26] жұмыста келесі теңдік дәлелденген.

$$\left(r \frac{d}{dr}\right)^k = \sum_{j=1}^k a_i^{(j)} r^j \frac{\partial^j}{\partial r^j} \equiv \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \frac{i^k}{i!(j-i)!} \right) r^j \frac{\partial^j}{\partial r^j}, k \in N. \quad (4)$$

Егер $x \in \partial\Omega$ болса, онда төмендегі теңдік орынды

$$\frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} = r^k \frac{\partial^k u(x)}{\partial r^k} = \Lambda^{[k]} u(x), k \geq 1, \quad (5)$$

мұндағы $\Lambda^{[k]} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) \dots \left(r \frac{\partial}{\partial r} - k + 1 \right).$

$\delta_\mu^k[u](x), k \geq 1$ операторы үшін (4) теңдіктен келесіні аламыз

$$\begin{aligned} \delta_\mu^k[u](x) &\equiv \left(r \frac{d}{dr} + \mu \right)^k u(x) = \left(r \frac{d}{dr} \right)^k u(x) + \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i \mu^{k-i-1} \left(r \frac{d}{dr} \right)^i u(x) + \mu^k u(x) = \\ &= r^k \frac{\partial^k u(x)}{\partial r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} a_i^{(k)} r^i \frac{\partial^i u(x)}{\partial r^i} + \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i \mu^{k-i-1} \left(\sum_{p=1}^i a_p^{(i)} r^p \frac{\partial^p u(x)}{\partial r^p} \right) u(x) + \mu^k u(x). \end{aligned}$$

Олай болса, (5) теңдіктен, N_α есебі $\alpha = 1, \mu > 0$ кезінде үшінші шеттік есептің аналогы, ал $\alpha = 1, \mu = 0$ кезінде Нейман есебінің аналогы болып табылады. Жалпы жағдайда, $\mu = 0$ және $0 \leq \alpha \leq 1$ мәндері кезінде біз α параметр бойынша Дирихле және Нейман типіндегі есептердің интерполяциясын аламыз.

Айта кетейік, $m = 2$ жағдайда N_α есебі [27] жұмыста зерттелген.

Нәтижелер мен талқылау

Келесіде, [28] жұмыста дәлелденген J_μ^α және D_μ^α операторларының қасиеттерін келтіреміз.

Лемма 1. $\alpha > 0, \mu \geq 0, 0 < \lambda < 1$ және $u(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega}), p = 0, 1, \dots$ болсын. Олай болса,

1) егер $\mu > 0$ болса, онда $J_\mu^\alpha[u](x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega});$

2) егер $\mu = 0$ болса, онда $u(0) = 0$ шарты орындалғанда, $J_0^\alpha[u](x)$ функциясы $C^{\lambda+p}(\bar{\Omega})$

класына жатады және $J_0^\alpha[u](0) = 0$ теңдігі орындалады.

Лемма 2. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1$ және $u(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega}), p \geq \ell$ болсын. Онда $D_\mu^\alpha[u](x) \in C^{\lambda+p-\ell}(\bar{\Omega})$ және $D_0^\alpha[u](0) = 0$ теңдігі орындалады.

Лемма 3. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1$ және $u(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega}), p \geq \ell$ болсын.

Онда кез-келген $x \in \bar{\Omega}$ үшін төмендегі теңдіктер орындалады

1) егер $\mu > 0$ болса, онда

$$J_\mu^\alpha [D_\mu^\alpha[u]](x) = u(x), \quad (6)$$

2) егер $\mu = 0$ болса, онда

$$J_0^\alpha [D_0^\alpha [u]](x) = u(x) - u(0). \quad (7)$$

Лемма 4. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1$ және $u(x) \in C^{\lambda+p}(\bar{\Omega}), p \geq \ell$ болсын.

Онда кез-келген $x \in \bar{\Omega}$ үшін келесі теңдіктер орынды болады

1) егер $\mu > 0$ болса, онда

$$D_\mu^\alpha [J_\mu^\alpha [u]](x) = u(x), \quad (8)$$

2) егер $\mu = 0$ болса, онда $u(0) = 0$ шарты орындалғанда, мынадай теңдік орындалады

$$D_0^\alpha [J_0^\alpha [u]](x) = u(x). \quad (9)$$

Лемма 5. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots$ болсын, $J_\mu^\alpha [u](x)$ және $D_\mu^\alpha [u](x)$ бар болсын.

Олай болса, келесі теңдіктер орындалады

$$(-\Delta)^m J_\mu^\alpha [u](x) = J_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m u](x), x \in \Omega, \quad (10)$$

$$(-\Delta)^m D_\mu^\alpha [u](x) = D_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m u](x), x \in \Omega. \quad (11)$$

Салдар 1. $\mu \geq 0, \ell - 1 < \alpha \leq \ell, \ell = 1, 2, \dots$ болсын, $f(x)$ функциясы $\bar{\Omega}$ облысында тегіс және $(-\Delta)^m u(x) = f(x)$. Олай болса, төмендегі теңдіктер дұрыс

$$(-\Delta)^m D_\mu^\alpha [u](x) = F(x), x \in \Omega,$$

мұндағы,

$$F(x) = D_{\mu+2m}^\alpha [f](x) \equiv |x|^{-(2m+\mu)} D^\alpha [|x|^{2m+\mu} f(x)]. \quad (12)$$

Лемма 6. $\mu \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$ болсын және кез-келген $k = 1, 2, \dots$ үшін $D_\mu^{\alpha+k} u(x)$ туындылары бар. Онда келесі теңдіктер орындалады

$$D_\mu^{\alpha+k} [u](x) = \delta_\mu^k [D_\mu^\alpha [u]](x). \quad (13)$$

Лемма 7. Егер $\mu = 0$ болсын, онда (12) теңдіктегі $F(x)$ функциясын келесі түрде өрнектеуге болады

$$F(x) = \left(r \frac{d}{dr} + 2m \right) f_{1-\alpha}(x), \quad (14)$$

мұндағы $f_{1-\alpha}(x) = |x|^{-2m} J^{1-\alpha} [|x|^{2m} f(x)]$.

Енді D есебін зерттейміз.

$u(x)$ функциясы D есебінің шешімі деп есептеп, келесі функцияны қарастырайық:

$$v(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x). \quad (15)$$

$v(x)$ функциясына $(-\Delta)^m$ қолдана отырып, D есебінің шарттарын есепке алсақ, келесі Дирихле есебін аламыз

$$(-\Delta)^m v(x) = f(x), x \in \Omega; \left. \frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j} \right|_{\partial \Omega} = h_j(x), j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (16)$$

мұндағы
$$h_k(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i g_k(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x).$$

Егер $f(x)$ және $h_j(x)$ жеткілікті түрде тегіс функциялар болса, онда (16) есебінің шешімі бар және жалғыз болады. Атап айтқанда, егер $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, $h_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial \Omega)$, $0 < \lambda < 1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, болса, онда бұл шешім $C^{\lambda+2m}(\bar{\Omega})$ классына жатады (мысалы, [29] қараңыз).

(16) есебінің шешімін қолданып, D есебінің шешімін құруға болатынын көрсетеміз. (15) теңдігінен $v(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x)$ түріндегі функциялар $j = 0, \dots, 2^n-1$ болғанда $u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x)$ функциялар арқылы сызықтық түрде өрнектелетіндігі оңай байқалады. Егер төмендегі 2^n -ретті векторларды қарастырсақ,

$$\begin{aligned} V(x) &= (v(x), \dots, v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x), \dots, v(S_n^1 \dots S_1^1 x))^T, \\ U(x) &= (u(x), \dots, u(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x), \dots, u(S_n^1 \dots S_1^1 x))^T, \end{aligned}$$

онда бұл тәуелділік келесі

$$V(x) = A_n U(x), \quad (17)$$

матрицалық түрде өрнектелуі мүмкін, мұндағы $A_n = (a_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^n-1}$ — $2^n \times 2^n$ -ретті матрица.

[22] жұмыста келесі тұжырымдар дәлелденген.

Лемма 8. (16) теңдіктегі A_n матрицасы мынадай түрде беріледі

$$A_n = (a_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^n-1} = (a_{i \oplus j})_{i,j=0,\dots,2^n-1}, \quad (18)$$

мұндағы A_n матрицасының коэффициенттерінің төменгі индексында қосу келесі мағынада түсініледі, $i \oplus j \equiv (i)_2 \oplus (j)_2 = ((i_n + j_n \bmod 2) \dots (i_1 + j_1 \bmod 2))_2$, $(i)_2 = (i_n \dots i_1)_2$ — i индексінің екілік санау жүйесіндегі жазбасы.

Салдар 1. Бүкіл A_n матрицасы өзінің бірінші жолы $(a_0, a_1, \dots, a_{2^n-1})$ арқылы біркәнді анықталады.

Салдар 2. A_n матрицасы $(a_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^n-1} = (a_{j,i})_{i,j=0,\dots,2^n-1}$ түрдегі симметриялық қасиетіне ие.

Лемма 9. $A_n(a_0, \dots, a_{2^n-1})$ матрицасының анықтаушы келесі түрде болады

$$\det A_n(a_0, \dots, a_{2^n-1}) = \prod_{k=0}^{2^n-1} \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k_n i_n + \dots + k_1 i_1} a_{(i_n \dots i_1)_2} \right),$$

мұндағы $k \otimes i \equiv (k_n \dots k_1)_2 \otimes (i_n \dots i_1)_2 = k_n i_n + \dots + k_1 i_1 - (k)_2$ және $(i)_2$ сандарының «скаляр» көбейтіндісі.

Лемма 10. Егер $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1$ болса, онда $A_n^{-1} = B_n(b_0, \dots, b_{2^n-1})$ кері матрицасы бар және ол (18) түрінде болады.

[22] жұмыста $B_n(b_0, \dots, b_{2^n-1})$ матрица элементтерін құру алгоритмі келтірілген.

$\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1$ шарты орындалғанда, кері матрица $B_n(b_0, \dots, b_{2^n-1})$ бар болады және сол арқылы $u(x)$ функцияны

$$u(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x). \quad (19)$$

бірмәнді түрде құруға болады.

Егер $v(x)$ функциясы (16) есебінің шешімі болса, онда (19) формуласы бойынша анықталатын $u(x)$ функциясы D есебінің барлық шарттарын қанағаттандыратынын көрсетеміз.

Шынында да, егер $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$ болса, онда $\tilde{h}_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$ және $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ үшін $v(x) \in C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ ие боламыз. Бұдан $u(x) \in C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$. Сондықтан егер $v(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x) = I_{S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1}} v(x)$ деп белгілесек, онда Ω облысында келесі теңдік орындалады

$$(-\Delta)^m u(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j (-\Delta)^m v(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j I_{S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1}} (-\Delta)^m v(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j f(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x).$$

Бұдан келесі теңдік шығады

$$L_n u(x) \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-\Delta)^m u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j f(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x).$$

Егер $r(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j f(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x)$ деп белгілеп, $\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i r(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x)$ функциясын қарастырсақ, онда төмендегі векторлар үшін

$$R(x) = \left(r(x), \dots, r(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x), \dots, r(S_n^1 \dots S_1^1 x) \right)^T,$$

$$F(x) = \left(f(x), \dots, f(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x), \dots, f(S_n^1 \dots S_1^1 x) \right)^T,$$

келесі теңдіктер орындалады

$$R(x) = B_n F(x), \quad \tilde{U}(x) = A_n R(x).$$

Демек,

$$A_n U(x) = A_n B_n F(x) = F(x)$$

және сол себептен

$$L_n u(x) \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i r(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = (A_n R(x))_{j=0} = (A_n B_n F(x))_{j=0} = F(x)_{j=0} = f(x).$$

Осылайша, $u(x)$ функциясы (1) теңдеуін қанағаттандырады. Енді (2) шекаралық шарттардың орындалуын тексерейік. Төмендегі вектор үшін

$$H_k(x) = (h_k(x), \dots, h_k(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x), \dots, h_k(S_n^1 \dots S_1^1 x))^T,$$

келесі теңдік орындалады

$$(H_k(x))_{j=0} = h_k(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i g_k(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = (A_n G_k(x))_{j=0},$$

мұндағы $G_k(x) = (g_k(x), \dots, g_k(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x), \dots, g_k(S_n^1 \dots S_1^1 x))^T$. Сондықтан (16) есебінің шекаралық шарттарына сүйене отырып, барлық $0 \leq k \leq m-1$ үшін келесі теңдікті аламыз.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} \right|_{\partial \Omega} &= \Lambda^{[k]} u(x) \Big|_{\partial \Omega} = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \Lambda^{[k]} v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) \Big|_{\partial \Omega} = (B_n \Lambda^{[k]} V(x))_{j=0} = \\ &= (B_n H_k(x))_{j=0} = (B_n A_n G_k(x))_{j=0} = g_k(x), \end{aligned}$$

Осылайша, (2) шекаралық шарттар да орындалады.

Демек, біз келесі тұжырымның дұрыстығын дәлелдедік.

Теорема 1. $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1, \quad 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega}),$

$g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial \Omega), j = 0, 1, \dots, m-1$ болсын. Онда D есебінің шешімі бар, бірімәнді және $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады.

Келесіде $G_{D,m}(x, y)$ деп (16) есебінің Грин функциясын белгілейміз. [30] жұмыста $G_{D,m}(x, y)$ функциясының айқын түрі келесі түрде берілетіні көрсетілген.

$$G_{D,m}(x, y) = K_{m,n} |x - y|^{2m-n} \int_0^{g(x,y)} (t^2 - 1)^{m-1} t^{1-n} dt, n \neq 2, n \neq 4,$$

$$g(x, y) = \frac{1}{|x - y|} \left| x|y| - \frac{y}{|y|} \right|, K_{m,n} = \frac{1}{4^{m-1} ((m-1)!)^2 \omega_n}, \omega_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2).$$

Келесі тұжырымда біз D есебінің Грин функциясының айқын түрін табамыз.

Теорема 2. $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1, \quad 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega}), \quad g_j(x) = 0$
 $j = 0, 1, \dots, m-1$ болсын. Онда D есебінің шешімі келесі түрде көрсетіледі

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{L_n}(x, y) f(y) dy, \quad (20)$$

мұндағы $G_{L_n}(x, y)$ функциясы төмендегі теңдікпен анықталады

$$G_{L_n}(x, y) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G_{D,m}(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y). \quad (21)$$

Дәлелдеуі. Бұл жағдайда $v(x)$ функциясы үшін (15) теңдігінен келесі Дирихле есебі алынады

$$(-\Delta)^m v(x) = f(x), x \in \Omega; \left. \frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j} \right|_{\partial \Omega} = 0, j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (22)$$

[30]-жұмыста (22) есебінің шешімі келесі түрде өрнектелетіндігі дәлелденген

$$v(x) = \int_{\Omega} G_{D,m}(x, y) f(y) dy.$$

Онда

$$v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = \int_{\Omega} G_{D,m}(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y) f(y) dy.$$

Осыдан, (19) теңдігін пайдалана отырып, D есебінің шешімі үшін (21) түріндегі өрнекті аламыз:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \int_{\Omega} G_{D,m}(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y) f(y) dy = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G_{D,m}(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y) \right) f(y) dy = \\ &= \int_{\Omega} G_{L_n}(x, y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. (21) өрнектен келесіні аламыз

$$G_{L_n}(0, y) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G_{D,m}(0, y) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) G_{D,m}(0, y). \quad (23)$$

$\mu > 0$ жағдайында N_α есебін зерттейік. Келесі тұжырым орындалады.

Теорема 3. $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0, \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1, 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega}),$
 $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega), j = 0, 1, \dots, m-1$ болсын. Онда N_α есебінің шешімі бар, бірегей,
 $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады және келесі түрде өрнектеледі

$$u(x) = J_\mu^\alpha v(x), \quad (24)$$

мұндағы $v(x)$ функциясы келесі есептің шешімі болып табылады

$$L_n v(x) = F(x), x \in \Omega, \delta_\mu^k [v](x)|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (25)$$

оң жақтағы функция $F(x) = D_{\mu+2m}^\alpha [f](x)$.

Дәлелдеуі. $u(x)$ функциясы N_α есебінің шешімі болады деп болжайық. Бұл функцияға D_μ^α операторын қолданайық және $v(x) = D_\mu^\alpha u(x)$ деп белгілейік. $v(x)$ функциясын қанағаттандыратын шарттарды табамыз. Егер $v(x) = D_\mu^\alpha u(x)$ функциясына $(-\Delta)^m$ операторын қолдансақ, онда лемма 5-тің (10) теңдігіне сәйкес, келесі нәтижені аламыз: $(-\Delta)^m v(x) = D_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m u](x)$. δ және $I_{S_i} u(x) = u(S_i x)$ операторлары коммутативті болғандықтан [18], кез келген $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ үшін келесі теңдіктер орындалады

$$(-\Delta)^m v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = D_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m u](S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x).$$

Осы жерден

$$L_n v(x) = D_{\mu+2m}^\alpha \left[\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-\Delta)^m u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) \right] = D_{\mu+2m}^\alpha [f](x), x \in \Omega.$$

Одан әрі, (12) теңдіктен келесіні аламыз $D_{\mu}^{\alpha+k} [u](x) = \delta_\mu^k [D_\mu^\alpha [u]](x), k \geq 1$. Онда

$$v(x)|_{\partial\Omega} = D_\mu^\alpha u(x)|_{\partial\Omega} = g_0(x), \delta_\mu^k [v](x)|_{\partial\Omega} = \delta_\mu^k [D_\mu^\alpha u](x)|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Осылайша, егер $u(x)$ функциясы N_α есебінің шешімі болса, онда $v(x) = D_\mu^\alpha u(x)$ функциясы (25) есебінің шешімі болады. (25) есептің D есебіне эквивалент екенін көрсетейік. Шынында да, $k = 0$ кезінде $v(x)|_{\partial\Omega} = D_\mu^\alpha u(x)|_{\partial\Omega} = g_0(x)$ болады. Егер $k = 1$ болса, онда келесі теңдік алынады

$$g_1(x) = \delta_\mu^1 [v](x)|_{\partial\Omega} = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) v(x) \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} + \mu v(x) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Бұдан

$$\left. \frac{\partial v(x)}{\partial v} \right|_{\partial\Omega} = g_1(x) + \mu g_0(x) \equiv h_1(x).$$

Жалпы жағдайда (5) теңдігіне сүйене отырып, $\delta_\mu^k[v](x)$ үшін мынаны аламыз

$$g_k(x) = \delta_\mu^k[v](x) \Big|_{\partial\Omega} = r^k \frac{\partial^k v(x)}{\partial r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} d_{i,k} r^i \frac{\partial^i v(x)}{\partial r^i} + \mu^k v(x) \Big|_{\partial\Omega},$$

мұндағы $d_{i,k}$ – кейбір тұрақтылар. Осыдан келесіні аламыз

$$\left. \frac{\partial^k v(x)}{\partial v^k} \right|_{\partial\Omega} = g_k(x) - \sum_{i=0}^{k-1} b_{i,k} g_i(x) \equiv h_k(x), k = 2, 3, \dots, m-1,$$

мұндағы $b_{i,k}$ коэффициенттері $\mu, a_i^{(k)}$ және $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ -ға тәуелді.

Осылайша, (25) есебі D есебіне эквивалентті. Егер $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ болса, онда лемма 2 тұжырымына сәйкес, $F(x) = D_{\mu+2m}^\alpha[f](x)$ функциясы $C^\lambda(\bar{\Omega})$ класына жатады. Сонымен қатар, егер $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$, болса, онда $h_j(x)$ функциялары да $C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$ функциялар класына жататыны айқын. Онда Теорема 1 тұжырымына сәйкес, (25) есебінің шешімі бар, бірімәнді және $C^{\lambda+2m}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Егер $v(x) = D_\mu^\alpha u(x)$ теңдігіне екі жағынан J_μ^α операторын қолдансақ, онда (6) теңдігіне сәйкес, $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ өрнекті аламыз. Демек, егер N_α есебінің шешімі бар болса, ол (24) түрінде өрнектеледі.

Енді $v(x)$ функциясы $F(x) = D_{\mu+2m}^\alpha[f](x)$ функциясымен бірге (25) есебінің шешімі болсын. Онда $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ функциясы $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ есебінің шешімі болатынын көрсетейік. Шынында да, егер $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ теңдігіне $(-\Delta)^m$ операторын қолдансақ, онда (10) теңдігіне сәйкес келесі нәтижені аламыз

$$(-\Delta)^m u(x) = J_{\mu+2m}^\alpha [(-\Delta)^m v](x).$$

Онда $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ функциясына L_n операторын (6) теңдігін ескере отырып қолдансақ, келесі нәтижені аламыз

$$L_n u(x) = J_{\mu+2m}^\alpha [L_n v](x) = J_{\mu+2m}^\alpha [D_{\mu+2m}^\alpha[f]](x) = f(x),$$

яғни, $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ функциясы үшін (1) теңдік орындалады. Келесіде (25) есебінің шекаралық шарттарын және (8), (13) теңдіктерін пайдалана отырып, келесі өрнекті аламыз

$$D_\mu^{\alpha+k} u(x) \Big|_{\partial\Omega} = D_\mu^{\alpha+k} [J_\mu^\alpha v](x) \Big|_{\partial\Omega} = \delta_\mu^k [D_\mu^\alpha [J_\mu^\alpha v]](x) \Big|_{\partial\Omega} = \delta_\mu^k [v](x) \Big|_{\partial\Omega} = g_k(x).$$

Олай болса, (3) шекаралық шарттар да орындалады. Енді шешімнің тегістігін зерттеу ғана қалады. Егер $v(x)$ функциясы (25) есебінің шешімі болса, онда теореманың шарттары

орындалғанда бұл функция $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Онда лемма 1-дің тұжырымына сәйкес, $u(x) = J_\mu^\alpha v(x)$ функциясы да $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Сонымен қатар, барлық $0 \leq k \leq m-1$ үшін келесі теңдік $D_\mu^{\alpha+k} u(x) = \delta_\mu^k [v](x), x \in \bar{\Omega}$ орындалады. $\delta_\mu^k [v](x) \in C^{2m+\lambda-k}(\bar{\Omega})$ болғандықтан, $D_\mu^{\alpha+k} u(x) \in C^{2m+\lambda-k}(\bar{\Omega})$. Теорема дәлелденді.

$\mu = 0$ жағдайындағы N_α есебін зерттеуге көшеміз. Бұл жағдайда, егер $u(x)$ — N_α есебінің шешімі болса, онда $v(x) = D_0^\alpha u(x)$ функциясы үшін қосымша $v(0) = 0$ шарты бар (25) есебі алынады. Егер $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ болса, онда есептің шешімі бар, бірімәнді және $C^{\lambda+2m}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Енді $v(0) = 0$ шартының қандай жағдайда орындалатынын тексерейік. Ол үшін (25) есебінің шешімін келесі түрде ұсынайық: $v(x) = V(x) + w(x)$, мұндағы $V(x)$ және $w(x)$ функциялары келесі есептердің шешімдері болып табылады

$$L_n V(x) = F(x), x \in \Omega, \delta_0^k [V](x)|_{\partial\Omega} = 0, k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (26)$$

және

$$L_n w(x) = 0, x \in \Omega, \delta_0^k [w](x)|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (27)$$

Жоғарыда көрсетілгендей, (26) есебі Дирихле типті (22) есебіне эквивалентті, сондықтан бұл есептің шешімі келесі түрде өрнектеледі

$$V(x) = \int_{\Omega} G_{L_n}(x, y) F(y) dy.$$

Онда (23) теңдігін пайдалана отырып, келесі өрнекті аламыз

$$V(0) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) \int_{\Omega} G_{D,m}(0, y) F(y) dy.$$

[28] жұмыста егер $F(y)$ функциясы $F(y) = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2m \right) g(y), \rho = |y|$ түрінде берілсе, онда $\int_{\Omega} G_{D,m}(0, y) F(y) dy$ интегралы үшін келесі теңдік орындалатыны дәлелденген

$$\int_{\Omega} G_{D,m}(0, y) F(y) dy = \int_{\Omega} G_{D,m}(0, y) \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2m \right) g(y) dy = \frac{1}{4^{m-1} ((m-1)!)^2 \omega_n} \int_{\Omega} (1 - |x|^2)^{m-1} g(y) dy.$$

Біздің жағдайда $F(y)$ функциясы мынадай түрге ие: $F(y) = D_{2m}^\alpha [f](y) \equiv |y|^{-(2m)} D^\alpha [|y|^{2m} f(y)]$. (14) теңдікке сәйкес, $F(y)$ функциясын келесі түрде жазуға болады:

$F(y) = \left(\rho \frac{d}{d\rho} + 2m \right) f_{1-\alpha}(y)$, мұндағы $f_{1-\alpha}(y)$ функциясы келесі түрге ие: $f_{1-\alpha}(y) = |y|^{-2m} J^{1-\alpha} [|y|^{2m} f(y)]$. Сонда $V(0)$ үшін келесі өрнекті аламыз

$$V(0) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) K_{m,n} \int_{\Omega} (1-|x|^2)^{m-1} f_{1-\alpha}(y) dy. \quad (28)$$

Одан әрі (27) есебін қарастырамыз. [22] жұмыста келесі тұжырым дәлелденген.

Лемма 11. Егер $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1$ шарты орындалып, $u(x)$ функциясы мына біртекті теңдеуді қанағаттандырса

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \Delta u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = 0, x \in \Omega,$$

онда $u(x)$ – гармоникалық функция болып табылады.

Ұқсас түрде келесі тұжырым дәлелденеді.

Лемма 12. Егер $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0, k = 0, \dots, 2^n - 1$ шарты орындалып, $u(x)$ функциясы мына біртекті теңдеуді қанағаттандырса

$$L_n u(x) = 0, x \in \Omega,$$

онда $u(x)$ – полигармоникалық функция болып табылады.

Осы леммадан $w(x)$ функциясы (27) есебінің шешімі болса, онда ол төменде көрсетілген есептің де шешімі болатындығы шығады

$$\Delta^m w(x) = 0, x \in \Omega, \delta_0^k [w](x) \Big|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (29)$$

Келесі матрица берілсін

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2(m-1) \\ 0 & 2^2 & 4^2 & \dots & [2(m-1)]^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^{m-1} & 4^{m-1} & \dots & [2(m-1)]^{m-1} \end{pmatrix}.$$

$\Delta_j, j = 0, 1, \dots, m-1$ деп D матрицасынан бірінші баған мен $(j+1)$ -ші жолды алып тастағанда алынатын қосалқы матрицаның анықтауышын белгілейміз. Атап айтқанда, $\Delta_0 = |D| \equiv \text{Det } |D|$. Оны пайдаланып, $|D| \neq 0$ екенін көрсету оңай.

[28] жұмыста келесі тұжырым дәлелденген.

Лемма 13. Егер (29) есебінің шешімі бар болса, онда келесі теңдік орындалады

$$w(0) = -\frac{1}{\omega_n |D|} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \Delta_j g_j(y) dS_y. \quad (30)$$

Одан әрі, $v(x) = V(x) + w(x)$ шарты орындалатындықтан, (29) және (30) теңдіктеріне сүйене отырып, мынадай қорытынды аламыз.

$$v(0) = V(0) + w(0) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) K_{m,n} \int_{\Omega} (1 - |x|^2)^{m-1} g(y) dy - \frac{1}{\omega_n |D|} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \Delta_j g_j(y) dS_y.$$

Осыдан, $v(0) = 0$ шартының орындалуы үшін төмендегі теңдіктің орындалуы қажет екені белгілі болады

$$\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) \frac{1}{4^{m-1} ((m-1)!)^2} \int_{\Omega} (1 - |x|^2)^{m-1} g(y) dy = \frac{1}{|D|} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \Delta_j g_j(x) dS_x. \quad (31)$$

Осылайша, егер N_α есебінің шешімі бар болса, онда (31) шартының орындалуы қажет. Одан әрі, A_n және A_n^{-1} матрицаларының коэффициенттері үшін [21] жұмысында көрсетілген теңдік $\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right) \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) = 1$ орындалады. $\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right)$ нәтижесіне сүйене отырып, (31) шартын келесі түрде қайта жазуға болады:

$$\int_{\Omega} (1 - |x|^2)^{m-1} f_{1-\alpha}(y) dy = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) \frac{4^{m-1} ((m-1)!)^2}{|D|} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \Delta_j g_j(y) dS_y. \quad (32)$$

(32) шарты N_α есебінің шешімі болуы үшін жеткілікті шарт екенін көрсетейік. Шынында да, егер $\mu > 0$, $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ және $g_k(x) \in C^{m-1-k+\lambda}(\partial\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $0 < \lambda < 1$ болса, онда (25) есептің шешімі бар, бірегей және $C^{\lambda+2m}(\bar{\Omega})$ класына жатады. Келесіде, егер (32) шарты орындалса, онда (31) шарты да орындалады. Онда (25) есебінің шешімі $v(0) = 0$ шартына сай келеді. Бұл жағдайда $u(x) = C + J_0^\alpha v(x)$, $C = \text{const}$ функциясын қарастыруға болады, ол $\mu = 0$ болғанда N_α есебінің барлық шарттарын қанағаттандырады. N_α есебінің шарттарының орындалуы мен шешімнің тегістігі теорема 3 жағдайындағыдай зерттеледі.

$\mu = 0$ жағдайындағы N_α есебіне қатысты негізгі нәтижені тұжырымдайық.

Теорема 4. Айталық, $0 < \alpha \leq 1$, $\mu = 0$, $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k \otimes i} a_i \neq 0$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$, $0 < \lambda < 1$,

$f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$, $g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ болсын. Онда N_α есебінің шешімділігі үшін (32) шарты қажетті және жеткілікті болып табылады. Егер есептің шешімі бар болса, онда ол тұрақты қосылғышқа дейін бірімәнді, $C^{2m+\lambda}(\bar{\Omega})$ класына жатады және келесі түрде өрнектеледі:

$$u(x) = C + J_0^\alpha v(x), C = \text{const},$$

мұндағы $v(x)$ функциясы төмендегі есептің шешімі болып табылады

$$L_n v(x) = F(x), x \in \Omega, \delta_0^k[v](x) \Big|_{\partial\Omega} = g_k(x), k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$F(x) = D_{2m}^\alpha[f](x)$ функциясымен және $v(0) = 0$ қосымша шартымен.

Мысал 2. $m=1$ болсын. Онда $|D|=\Delta_1=1$ және N_α есебінің шешімділік шарты келесі түрде болады N_α

$$\int_{\Omega} f_{1-\alpha}(y)dy + \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) \int_{\partial\Omega} g_0(y)dS_y = 0. \quad (33)$$

$\alpha=1$ кезінде $f_0(y)=|y|^{-2m} J^0[|y|^{2m} f(y)] = f(y)$ ие боламыз. Онда (33)- шарт келесі түрде болады:

$$\int_{\Omega} f(y)dy + \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) \int_{\partial\Omega} g_0(y)dS_y = 0.$$

Аталған шарт [21] жұмыста алынған.

Мысал 3. $m=2$ болсын. Онда $|D|=2, \Delta_1=2, \Delta_2=1$ және N_α есебінің шешімділік шарты келесі түрде өрнектеледі

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (1-|x|^2) f_{1-\alpha}(y)dy = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \right) \int_{\partial\Omega} [g_1(y) - 2g_0(y)]dS_y.$$

Бұл шарт [27] жұмыста алынған.

Қорытынды

Жүргізілген зерттеуді қорытындылай келе, инволюция типті бейнелеулердің көмегімен жаңа бір класстағы локалдық емес полигармоникалық операторлар енгізілгенін атап өтеміз. Осы локалдық емес полигармоникалық теңдеуге сәйкес Дирихле шартындағы шекаралық есептің шешімділігі мәселелері зерттелді. Теорема 1 аясында D есебінің шешімінің бар және бірегей екендігі дәлелденсе, теорема 2 Грин функциясының айқын түрі мен D есебінің шешімінің өрнектелуі алынды.

Адамардың интегро-дифференциалдық J_μ^α және D_μ^α операторларының кері бейнелеу қасиеттерінің, сондай-ақ $J_\mu^\alpha u(x)$ және $D_\mu^\alpha u(x)$ функцияларының Гельдер класстарындағы тегістігінің арқасында, теорема 3-те $\mu > 0$ жағдайында N_α есептің шешімінің бар және бірегей екендігі дәлелденді. Ал 4-теоремада $\mu = 0$ болған жағдайда N_α есептің шешімді болуы үшін қажетті және жеткілікті шарт табылды. Ұсынылған әдістің болашақтағы қолдану мүмкіндіктерін қарастыратын болсақ, ұқсас тәсілді Риман–Лиувилль және Капуто туындылары арқылы берілген шекаралық операторлары бар шекаралық есептерді зерттеуге де пайдалануға болады. Бұл мәселелер алдағы зерттеулердің тақырыбы болып табылады және оларды келесі мақалаларымызда қарастыруды жоспарлап отырмыз.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғарғы білім министрлігінің Ғылым комитеті № AP19677926 гранты аясында орындалды.

Әдебиеттер тізімі

1. Carleman, T. (1930). La théorie des équations intégrales singulières et ses applications. In *Annales de l'institut Henri Poincaré* (Vol. 1, No. 4, pp. 401-430).
2. Cabada, A., & Tojo, F. A. F. (2015). Differential equations with involutions.

3. Karapetians, N., & Samko, S. (2012). *Equations with involutive operators*. Springer Science & Business Media.
4. Przeworska-Rolewicz, D. (1973). Equations with transformed argument: an algebraic approach. (*No Title*).
5. Wiener, J. (1993). *Generalized solutions of functional differential equations*. World Scientific.
6. Al-Salti, N., Kerbal, S., & Kirane, M. (2019). Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 14(3), 312.
7. Ashyralyev, A., & Sarsenbi, A. M. (2015). Well-posedness of an elliptic equation with involution. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015(284), 1-8.
8. Ashyralyev, A., & Sarsenbi, A. (2017). Well-posedness of a parabolic equation with involution. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 1295-1304.
9. Baskakov, A. G., Krishtal, I. A., & Uskova, N. B. (2020). On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions. *Eurasian Mathematical Journal*, 11(2), 30-39.
10. Kritskov, L., SADYBEKOV, M., & SARSENBI, A. (2019). Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(1), 393-401.
11. Mussirepova, E., Sarsenbi, A. A., & Sarsenbi, A. M. (2022). Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(17), 11262-11271.
12. Sarsenbi, A., & Sarsenbi, A. (2021). On eigenfunctions of the boundary value problems for second order differential equations with involution. *Symmetry*, 13(10), 1972.
13. Ahmad, A., Ali, M., & Malik, S. A. (2021). Inverse problems for diffusion equation with fractional Dzherbashian-Nersesian operator. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 24(6), 1899-1918.
14. Ahmad, B., Alsaedi, A., Kirane, M., & Tapdigoglu, R. G. (2017). An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation. *Quaestiones Mathematicae*, 40(2), 151-160.
15. Al-Salti, N., Kirane, M., & Torebek, B. T. (2019). On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation. *Hacetatepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(3), 669-681.
16. Kirane, M., & Al-Salti, N. (2016). Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation. *J. Nonlinear Sci. Appl*, 9, 1243-1251.
17. Torebek, B. T., & Tapdigoglu, R. (2017). Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(18), 6468-6479.
18. KARACHIK, V., SARSENBI, A., & TURMETOV, B. (2019). On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation. *Turkish journal of mathematics*, 43(3), 1604-1625.
19. Turmetov, B. K., & Karachik, V. V. (2023). Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 68(7), 1204-1218.
20. Yarka, U., Fedushko, S., & Veselý, P. (2020). The Dirichlet problem for the perturbed elliptic equation. *Mathematics*, 8(12), 2108.
21. Turmetov, B. K., & Karachik, V. V. (2021). On solvability of the Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 31(4), 651-667.
22. Turmetov, B., & Karachik, V. (2021). On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple involution. *Symmetry*, 13(10), 1781.
23. Usmanov, K., Turmetov, B., & Nazarova, K. (2022). On the solvability of some boundary value problems for the nonlocal Poisson equation with boundary operators of fractional order. *Fractal and Fractional*, 6(6), 308.
24. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). elsevier.
25. Jarad, F., Ugurlu, E., Abdeljawad, T., & Baleanu, D. (2017). On a new class of fractional operators. *Advances in Difference Equations*, 2017, 1-16.
26. Bekaeva, A. E., Karachik, V. V., & Turmetov, B. K. (2014). Solvability of some boundary-value problems for polyharmonic equation with Hadamard-Marchaud boundary operator. *Russian Mathematics*, 58, 11-24.
27. Turmetov, B., Karachik, V., & Muratbekova, M. (2021). On a boundary value problem for the biharmonic equation with multiple involutions. *Mathematics*, 9(17), 2020.
28. Turmetov, B. K. (2017). On the solvability of some boundary value problems for the inhomogeneous polyharmonic equation with boundary operators of the Hadamard type. *Differential Equations*, 53(3), 333-344.

29. Agmon, S., Douglis, A., & Nirenberg, L. (1959). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Communications on pure and applied mathematics*, 12(4), 623-727.
30. Gazzola, F., Grunau, H. C., & Sweers, G. (2010). *Polyharmonic boundary value problems: positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains*. Springer.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Шалхар А.Ә. - докторант, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан, e-mail: shalkhar_aa@enu.kz
	Shalkhar A.A - doctoral student, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan, e-mail: shalkhar_aa@enu.kz
	Шалхар А.А. - докторант, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, г. Астана, Казахстан, e-mail : shalkhar_aa@enu.kz
2	Турметов Б.Х. - ф.-м.ғ.д., профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , +7 777 448 76 44
	Turmetov B.Kh. - doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University , Turkistan, Kazakhstan, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , +7 777 448 76 44
	Турметов Б.Х. - доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz , +7 777 448 76 44
3	Қошанова М.Д. - ф.-м.ғ.к., Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
	Koshanova M.D. - candidate of Physical and Mathematical Sciences, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University , Turkistan, Kazakhstan, e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
	Қошанова М.Д. - кандидат физико-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz