

Усманов К.И.¹, Зикиш З.А.²

¹доцент, физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz

²магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: zarifa.zikish@ayu.edu.kz

ПАНТОГРАФ ТИПТЕГІ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕТТІК
ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ
SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF PANTOGRAPH TYPE
РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО -ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ТИПА ПАНТОГРАФА

Аңдатпа. Пантограф типіндегі алғашқы теңдеулер 1940 жылы М. Mahler-дің еңбектерінде қарастырылып, сандар теориясында аргументті сығатын функционалдық-дифференциалдық теңдеулерді қолданудың негізі қаланды. 1971 жылы J. Ockendon мұндай теңдеулерді электровоз тоққабылдағышының қозғалысын модельдеу үшін пайдаланған. Соңғы онжылдықтарда пантограф тектес теңдеулер техника мен құрылыста кеңінен қолданыс табуда: бапталатын (пантограф) телефон ұстағыштар, ұзартылатын (пантограф) микрофон жүйелері және т. с. с.

Осы мақалада пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне арналған екі нүктелі шеттік есеп зерттеледі. Шешуді табу үшін профессор Д. Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісі қолданылады. Аралық тең ұзындықты m бөлікке бөлінеді; ізделінетін функцияның мәндері әр бөлікке тән бастапқы нүктеде $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ параметрлері арқылы белгіленеді, ал ішкі интервалдарда $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ түріндегі алмастыру енгізіледі.

Нәтижесінде бастапқы шеттік есеп формальді түрде екі өзара байланысты қосалқы есепке ажырайды:

1. пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық жүйе үшін арнайы Коши есебі;
2. енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

Осылайша алынған пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық жүйесі үшін арнайы Коши есебі мен енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі-тұйықталған жүйе құрайды және ол тұйық жүйе бастапқы шеттік есептің шешімін толық анықтайды. Мақалада аталған құрылымға негізделген есептеу алгоритмі ұсынылып, оның пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық модельдерді сандық талдаудағы тиімділігі талқыланады.

Негізгі сөздер: пантограф, шеттік есеп, Коши есебі, сызықтық теңдеулер жүйесі, алгоритм, интегралдық-дифференциалдық теңдеу, параметр, жуықтау.

Abstract. The first equations of the pantograph type were considered in the works of M. Mahler in 1940, which laid the foundation for the use of functional-differential equations with argument compression in number theory. In 1971, J. Ockendon used such equations to model the movement of the current collector of an electric locomotive. In recent decades, pantograph-type equations have been widely used in engineering and construction: adjustable (pantograph) telephone holders, retractable (pantograph) microphone systems, etc.

This article studies a two-point boundary value problem for a system of functional-differential equations of the pantograph type. The parameterization method proposed by Professor D. Jumabayev is used to find a solution. The interval is divided into parts of equal length; the values of the desired function are determined by parameters at the initial point characteristic of each part, and substitutions of a specific form are introduced in the inner intervals. As a result, the original boundary value problem is formally decomposed into two interrelated subproblems:

1. a special Cauchy problem for the functional-differential system of the pantograph type;
2. a system of linear algebraic equations with respect to the input parameters.

The special Cauchy problem for the functional-differential system of the pantograph type and the system of linear algebraic equations with respect to the input parameters obtained in this way form a closed system, and this closed system completely determines the solution of the original boundary value problem. The article presents a

computational algorithm based on the above structure and discusses its effectiveness in the numerical analysis of pantograph-type functional-differential models.

Keywords: pantograph, boundary value problem, Cauchy problem, system of linear equations, algorithm, integro-differential equation, parameter, approximation.

Аннотация. Первые уравнения типа пантографа были рассмотрены в работах М. Mahler в 1940 году, что заложило основу использования функционально-дифференциальных уравнений со сжатием аргумента в теории чисел. В 1971 году J. Ockendon использовал такие уравнения для моделирования движения токоприемника электровоза. В последние десятилетия уравнения типа пантографа широко используются в технике и строительстве: регулируемые (пантографные) телефонные держатели, выдвижные (пантографные) микрофонные системы и т. д.

В данной статье изучается двухточечная краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений типа пантографа. Для поиска решения используется метод параметризации, предложенный профессором Д. Джумабаевым. Интервал разбивается на части одинаковой длины; значения искомой функции определяются параметрами в начальной точке, характерными для каждой части, а во внутренних интервалах вводятся подстановки вида.

В результате исходная краевая задача формально раскладывается на две взаимосвязанные подзадачи:

1. специальная задача Коши для функционально-дифференциальной системы типа пантограф;
2. система линейных алгебраических уравнений относительно входных параметров.

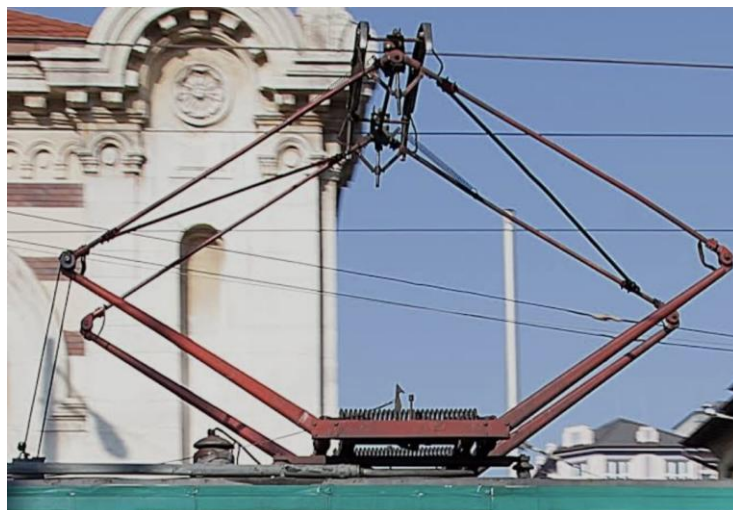
Полученная таким образом специальная задача Коши для функционально-дифференциальной системы типа пантограф и система линейных алгебраических уравнений относительно входных параметров образуют замкнутую систему, и эта замкнутая система полностью определяет решение исходной краевой задачи. В статье

представлен вычислительный алгоритм, основанный на приведенной выше структуре, и обсуждается его эффективность при численном анализе функционально-дифференциальных моделей типа пантограф.

Ключевые слова: пантограф, краевая задача, задача Коши, система линейных уравнений, алгоритм, интегро-дифференциальное уравнение, параметр, приближение.

Кіріспе

Функционалдық-дифференциалдық тендеулер қазіргі заманғы қолданбалы математикада кеңінен зерттелетін маңызды бағыттардың бірі болып табылады. Осындай тендеулердің бір ерекше класы пантограф типтегі тендеулер болып табылады, ол сығушы немесе түрлендірілген аргументтері бар функцияларды камтиды және әртүрлі табиғи және техникалық процестерді модельдеуде жиі кездеседі.



Сурет 1. Пантограф

Пантограф типтегі тендеулер алғаш рет 1940 жылы Mahler-дің [1] еңбегінде пайда болды. Ол бұл тендеулерді сандар теориясында қолданып, сығушы аргументтері бар

функционалдық-дифференциалдық теңдеулердің маңыздылығын көрсетті. Кейінірек 1971 жылы J. Ockendon [2]

$$y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$$

пантограф типіндегі теңдеулерді электровоздың ток қабылдағышының (пантографтың) қозғалысын сипаттау үшін қолданды. Бұл жұмыста түрлендірілген аргументі бар функционалдық-дифференциалдық теңдеулердің нақты модельдерде қолданылатындығын көрсетеді.

1972 жылы G. R. Morris, A. Feldstein және E. W. Bowen [3] өз еңбектерінде пантограф типтегі теңдеудің кейбір түрлерінің

$$y'(x) = -ay(\varepsilon x), \quad y(0) = 1$$

шексіз көп нөлдері болатынын және бұл нүктелерде бастапқы есептің шешімі жалғыз болмауы немесе мүлде болмауы мүмкін екенін көрсетті. Бұл нәтиже мұндай теңдеулердің шешімдерінің тұрақтылығын зерттеудің маңызын арттырды.

Пантограф теңдеулерін тереңірек зерттеу мақсатында Быков [4] екінші ретті пантограф типтес теңдеулерді қарастырып, жалпыланған экспоненциалдық, косинус және синус функцияларын енгізді.

$$e_{\varepsilon}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t^k}{k!}, \quad \cos_{\varepsilon}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k-1)} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin_{\varepsilon}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k+1)} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Бұл функциялар осы типтегі теңдеулердің шешімдерін сипаттау үшін қолданылады және олардың аналитикалық қасиеттері анықталды.

Сонымен қатар, A. Iserles және Y. Liu [5] жалпыланған гипергеометриялық функцияларды

$$y'(t) = ay(t) + \int_0^1 y(\varepsilon s) ds + \int_0^1 y'(\varepsilon s) ds, \quad t > 0,$$

$$y(t) + \int_0^1 y(\varepsilon s) ds + \int_0^1 y'(\varepsilon s) ds = 0, \quad t > 0,$$

интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін табу үшін пайдаланса, Родионов [6] өз жұмысында

$$f(x) * g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} f_i g_j \varepsilon^{ij} \frac{x^k}{k!},$$

арнайы алгебралық құрылымдар мен көбейту амалдарын қолданып, пантограф типті теңдеулердің шешімін табудың жаңа тәсілдерін ұсынды. Ол енгізген амалдарға байланысты жалпыланған тригонометриялық функциялардың да қасиеттері сипатталған.

$$\sin_{\varepsilon}(x) * \sin_{\varepsilon}(x) + \cos_{\varepsilon}(x) * \cos_{\varepsilon}(x) = 1.$$

Бүгінде пантограф типіндегі теңдеулер тек теориялық қызығушылық тудырып қана қоймай, нақты қолданбалы есептерде де жиі қолданылады. Мысалы, пантографтық телескопиялық құрылғылар, микрофон тұтқалары, реттелетін механикалық жүйелер—барлығы осындай теңдеулердің көмегімен сипатталуы мүмкін. Осыған байланысты бұл типтегі теңдеулерді зерттеу өзектілігін жоғалтпай, әрі қарай дамытуды қажет етеді.



Сурет 2. Пантографты тіреуіш

Нәтижелер мен талқылау

$[0,1]$ кесіндісінде пантограф типтегі функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есеп қарастырамыз

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 K_1(t,s)x(s)ds + \int_0^1 K_2(t,s)\dot{x}(s)ds + f(t), \quad \varepsilon = \frac{1}{m} < 1, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d, \quad (2)$$

(1) теңдеуде $A(t)$ матрицасы мен $f(t)$ вектор-функциясы $[0,1]$ аралығында үзіліссіз, ал $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$ өзегтері сәйкесінше $[0,1] \times [0,1]$ аралығында үзіліссіз болсын. B, C - n өлшемді квадратты матрица, ал d - n өлшемді вектор. $\max_{t \in [0,1]} \|A(t)\| \leq \alpha$, $\max_{t,s \in [0,1]} \|K_1(t,s)\| \leq \beta_1$.

Зерттеліп отырған есептің шешімін табу үшін профессор Д. Джумабаев әзірлеген параметрлеу әдісі пайдаланылады [7]. Аталмыш әдіс бастапқыда екі нүктелі шеттік есептері бар қарапайым дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін конструктивті түрде құру үшін ұсынылған. Кейінірек оның қолданылу аясы кеңейіп, әдіс дифференциалдық және интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне тиесілі алуан түрлі шеттік қойылымдарды талдауда табысты апробациядан өтті [8–11].

[12] жұмыста пантограф тектес қарапайым дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі шеттік есеп қарастырылған болатын.

$$y'(x) = \lambda y(\varepsilon x) + f(x), \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$ay(0) + by(1) = d.$$

Параметризация әдісін қолдану арқылы, есептің бірімәнді шешімділігі орнатылған болатын. Ал, [13] жұмыста пантограф тектес интегралдық дифференциалдық теңдеу үшін екі нүктелі есеп қарастырылып, оның шешімін анықтау алгоритмі келтірілген болатын.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 K(t, s)x(s)ds + f(t), \quad \varepsilon = \frac{1}{m} < 1,$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d,$$

Шарт А.

$$z(t) = \int_0^1 K_2(t, s)z(s)ds + F(t) \quad (3)$$

Фредгольм тектес интегралдық теңдеу кез-келген $F(t) \in C([0, 1], R^n)$ функциясы үшін бірімәнді шешімділі болсын.

Егер А шарты орындалса, онда (3) Фредгольм тектес теңдеудің $K_2(t, s)$ өзегі үшін $\Gamma_2(t, s; 1)$ -резольвентасы табылып, (3) интегралдық теңдеудің шешімін [14]

$$z^*(t) = F(t) + \int_0^1 \Gamma_2(t, s; 1)F(s)ds,$$

түрінде жазуға болады және ол үшін

$$\|z^*(t)\|_1 \leq (1 + \omega) \|F(t)\|_1$$

$$\text{мұндағы } \omega = \max_{t, s \in [0, 1] \times [0, 1]} \|\Gamma_2(t, s; 1)\|.$$

(1), (2) есебін шешу үшін, алдымен А шартын қолданайық. Сонда (1), (2) шеттік есебін келесі түрде жазуға болады.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 K_1(t, s)x(s)ds + f(t) + \int_0^T \Gamma_2(t, \tau; 1) \left[A(\tau)x(\varepsilon \tau) + \int_0^1 K_1(\tau, s)x(s)ds + f(\tau) \right] d\tau, \quad (4)$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d. \quad (5)$$

Екі еселі интегралдың қасиетін қолдансақ

$$\int_0^T \Gamma_2(t, s; 1) \int_0^T K_1(\tau, s)x(s)ds d\tau = \int_0^T \int_0^T \Gamma_2(t, \tau; 1) K_1(\tau, s)x(s)ds d\tau = \int_0^T K_{12}(t, s)x(s)ds$$

$$\text{мұндағы, } K_{12}(t, s) = \int_0^T \Gamma_2(t, \tau; 1) K_1(\tau, s) d\tau \text{ және}$$

$$\tilde{K}_1(t, s) = \Gamma_2(t, \tau; 1)A(\tau) + K_{12}(t, s) + K_1(t, s),$$

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \int_0^t \Gamma_2(t, \tau; 1) f(\tau) d\tau$$

белгілеулерін енгізсек, онда (4), (5) шеттік есебін келесі түрде жазуға болады

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 \tilde{K}_1(t, s)x(s)ds + \tilde{f}(t), \quad \varepsilon = \frac{1}{m} < 1, \quad (6)$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d, \quad (7)$$

Берілген есепке шешу үшін параметрлеу әдісін қолданайық [13], ол үшін қарастырылып отырған $[0, 1]$ кесіндісін m аралықтарға бөлейік: $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^m [t_{i-1}, t_i]$, $t_0 = 0, t_{i+1} = t_i + \frac{1}{m}, i = \overline{1, m}$. Аралықты осылай бөлу $0 \leq \varepsilon t < \varepsilon$ аралығында жатуын қамтамасыз етеді және $h = \frac{1}{m}$.

$x_i(t) - x(t)$ функциясының әрбір $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, m}$ аралығындағы мәндері болсын. Онда (1), (2) есебін келесі эквивалент есеппен ауыстыруымызға болады.

$$\frac{dx_i}{dt} = A(t)x_1(\varepsilon t) + \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(t, s)x_j(s)ds + \tilde{f}(t), \quad [t_{i-1}, t_i], i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \rightarrow 1} x_m(t) = d, \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_p - 0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p), \quad p = \overline{1, m-1}. \quad (10)$$

$x_i(t)$ функциясының $t = t_{i-1}, i = \overline{1, m}$ нүктелеріндегі мәндерін λ_i арқылы белгілеп алайық, яғни $\lambda_i = x_i(t_{i-1}), i = \overline{1, m}$ және $[t_{i-1}, t_i]$ аралығында $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ алмастыруын жасайық. Сонда,

$$\frac{du_i}{dt} = A(t)[u_1(\varepsilon t) + \lambda_1] + \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(t, s)[u_j(t) + \lambda_j] + \tilde{f}(t), \quad i = \overline{1, m}, \quad (11)$$

$$u_i[t_{i-1}] = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_m + C \lim_{t \rightarrow 1} u_m(t) = d, \quad (13)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow t_p - 0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, m-1}. \quad (14)$$

Осылайша, (11)–(14) жүйесін формальды түрде өзара байланысқан екі есепке ажыратуға болады.

1. **Негізгі (Коши) есеп.** (11) және (12) пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне бастапқы шарттар қойып, ізделінетін $u_i(t)$ функцияларын анықтаймыз.
2. **Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.** (13) және (14) λ_i енгізілген параметрлеріне қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

Егер λ_i параметрлері алдын ала белгілі деп есептелсе, онда (11)–(12) пантограф типіндегі жүйе үшін Коши есебінің шешімі келесі интегралдық теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$u_i(t) = \int_{t_{i-1}}^t A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau + \int_{t_{i-1}}^t A(\tau)d\tau \cdot \lambda_1 + \int_{t_{i-1}}^t \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s)u_j(s)dsd\tau + \\ + \int_{t_{i-1}}^t \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s)dsd\tau \cdot \lambda_j + \int_{t_{i-1}}^t \tilde{f}(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{i-1}, t_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Лемма (Гронуолла-Беллман). $a(t)$ және $h(t)$ функциялары $[t_0, t]$ аралығында анықталған және $h(t) \geq 0$, $a(t) \geq 0$ болсын, мұнда t_0 - бастапқы уақыт, t ағымдағы уақыт. Егер,

$$a(t) \leq c + \int_{t_0}^t h(s)a(s)ds$$

онда

$$a(t) \leq c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t h(s)ds\right)$$

(10) интегралдық теңдеулер жүйесіне біртеңдеп жуықтау әдісін қолданайық, мұнда $\varepsilon = \frac{1}{m} < 1$ болғандықтан, $[0, 1]$ аралығында $\|A(\varepsilon t)\| \leq \|A(t)\| \leq \alpha$. Әрбір қадамда Гронуолла-Беллман теңсіздігін қолдансақ және [9] мақаладағы дәлелдеуге сүйенсек, онда келесі тұжырымды дәлелдеуге болады:

Теорема 1. Егер

$$\delta_\varepsilon = e^{\alpha\varepsilon} \beta\varepsilon < 1$$

шарты орындалса, онда (6), (7) функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешімі жалғыз. Мұнда $\|\tilde{K}_1(t, s)\| \leq \omega(\alpha + T^2\beta_1) + \beta_1 \leq \beta$.

(15) интегралдық теңдеулер жүйесінен $\lim_{t \rightarrow t_i - 0} u_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ шектерді анықтайық және λ_i енгізілген параметрлерін анықтау үшін (13), (14) шеттік шарттарына қояйық, сонда енгізілген параметрлерге қатысты келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

$$B\lambda_1 + C\lambda_m + C \left(\int_{t_{m-1}}^1 A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau + \int_{t_{m-1}}^1 A(\tau)d\tau \cdot \lambda_1 + \int_{t_{m-1}}^1 \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s)u_j(s)dsd\tau + \right.$$

$$+ \int_{t_{m-1}}^1 \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) ds d\tau \cdot \lambda_j + \int_{t_{m-1}}^1 \tilde{f}(\tau) d\tau \Big) = d, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_p + \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau) u_1(\varepsilon \tau) d\tau + \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau) d\tau \cdot \lambda_1 + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau + \\ & + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) ds d\tau \cdot \lambda_j + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \tilde{f}(\tau) d\tau = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

немесе

$$\begin{aligned} & \left(B + C \int_{t_{m-1}}^1 A(\tau) d\tau \right) \lambda_1 + C \int_{t_{m-1}}^1 \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) ds d\tau \cdot \lambda_j + C \lambda_m = \\ & = d - C \int_{t_{m-1}}^1 \tilde{f}(\tau) d\tau - C \int_{t_{m-1}}^1 A(\tau) u_1(\varepsilon \tau) d\tau - C \int_{t_{m-1}}^1 \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left(I + \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau) d\tau \right) \cdot \lambda_p + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) ds d\tau \cdot \lambda_j - \lambda_{p+1} = - \int_{t_{p-1}}^{t_p} \tilde{f}(\tau) d\tau - \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau) u_p(\tau) d\tau - \\ & - \int_{t_{p-1}}^{t_p} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}(\tau, s) u_j(s) ds d\tau, \quad p = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

$Q_\varepsilon(h)$ арқылы (18), (19) теңдеулер жүйесінде λ_i параметрлеріне қатысты матрицаны, $F_\varepsilon(h)$ арқылы оң жағындағы $\tilde{f}(t)$ өрнегіне сәйкес келетін интегралдарды, $G_\varepsilon(u, h)$ арқылы $u_i(t)$ мүшелері бар интегралдарды белгілеп алайық, яғни

$$F_\varepsilon^T(h) = \left(d - \int_{t_{m-1}}^1 \tilde{f}(\tau) d\tau, \int_{t_0}^{t_1} \tilde{f}(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} \tilde{f}(\tau) d\tau \right)$$

$$G_\varepsilon^T(u, h) = (G_{\varepsilon, m}(u, h), G_{\varepsilon, 1}(u, h), \dots, G_{\varepsilon, m-1}(u, h)),$$

$$\text{мұндағы, } G_{\varepsilon, i}(u, h) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\tau) u_1(\tau) d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \tilde{K}_1(\tau, s) u_j(s) ds d\tau, \quad i = \overline{1, m}.$$

Сонда,

$$Q_\varepsilon(h) \lambda = -F_\varepsilon(h) - G_\varepsilon(u, h). \quad (20)$$

Сонымен, $(\lambda, u[t])$ мәндері (15), (20) тұйық жүйесінен келесі алгоритм арқылы анықталады:

1-қадам. $Q_\varepsilon(h)$ матрицасының анықтаушы нөлден өзгеше болсын, яғни кері матрицасы бар болсын. Онда $Q_\varepsilon(h)\lambda = -F_\varepsilon(h)$ теңдеулер жүйесінен $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) \in R^{nm}$ параметрлерінің бастапқы жуықталған мәнін анықтаймыз, яғни $\lambda^{(0)} = -[Q_\varepsilon(h)]^{-1} F_\varepsilon(h)$.

б) табылған параметрлерді (11) пантограф тектес функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне қойып, (12) шартты пайдаланып, функционалдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің жуықталған шешімін анықтаймыз:

$$u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_m^{(0)}(t)).$$

Процесті жалғастыра отырып, k -шы қадамда $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, \dots$ жұптарының жүйесін анықтаймыз.

Анықталған $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m) \in R^{nm}$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_m(t))$ параметрлер мен функциялардың элементтерінен құрылған $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ жұбы (11) - (14) есебінің шешімі болады, ал өз кезегінде $\tilde{x}(t) = \tilde{u}_r(t) + \tilde{\lambda}_r$, $\tilde{x}(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_m(t) + \tilde{\lambda}_m$, $r = \overline{1, m}$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$ арқылы (1), (2) есебінің жуықталған шешімін анықтауға болады.

Қорытынды

Осы зерттеуде пантограф типіндегі функционалдық-дифференциалдық теңдеудің шеттік есебін талдауға профессор Д. Джумабаевтың параметрлеу әдісі қолданылды. Жүйеге қосымша айнымалылар енгізу арқылы бастапқы пантографтық теңдеулер жүйесі Коши есебіне түрлендіру мүмкіндігі көрсетілді. Сығушы операторлардың қасиетін пайдаланып, кіші аралықта Коши есебінің жалғыз шешімі бар болатындығы көрсетілді. Бұдан бөлек, есептің жуық шешімін есептеу үшін тиімді итерациялық алгоритм ұсынылды. Алынған әдістемелік және теориялық нәтижелер пантограф типтес дербес туындылы интегро-дифференциалдық теңдеулердің кең ауқымына қолданылып, олардың шеттік есептерін сандық тұрғыдан шешуге негіз бола алады.

Алғыс

This research has been/was/is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26197913)

Әдебиеттер тізімі

1. Mahler, K. (1940). On a special functional equation. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(2), 115-123.
2. Fox, L., Mayers, D. F., Ockendon, J. R., & Tayler, A. B. (1971). On a functional differential equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 8(3), 271-307.
3. Morris, G. R., Feldstein, A., & Bowen, E. W. (1972). The Phragmén-Lindelöf principle and a class of functional differential equations. In *Ordinary differential equations* (pp. 513-540). Academic Press.
4. Bykov, Y. V., Bykova, L. Y., & Shevtsov, E. I. (1973). Sufficient conditions for the oscillatory nature of solutions of nonlinear differential equations with deviating argument. *Differential Equations*, 9(9), 1555-1560.
5. Iserles, A., & Liu, Y. (1997). Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 208(2), 404-424.
6. Родионов, В. И. (2021). *Применение алгебраических систем в теории дифференциальных уравнений*. Изд. центр «Удмуртский университет».

7. Воробьев, А. А., Ватулин, Я. С., & Каримов, Д. Д. (2021). Повышение эффективности пантографа электроподвижного состава. *Системы автоматизированного проектирования на транспорте*, 66–67.
8. Воробьев, А. А., Ватулин, Я. С., & Каримов, Д. Д. (2021). Воздействие воздушного потока на аэродинамическое устройство для пантографа. *Известия Петербургского университета путей сообщения*, 18(4), 453–459.
9. Воробьев, А. А., Ватулин, Я. С., & Каримов, Д. Д. (2021). Воздействие воздушного потока на аэродинамическое устройство для пантографа. *Известия Петербургского университета путей сообщения*, 18(4), 453–459.
10. Рукавишников, П. В., Скуріхін, Д. І., & Рибін, А. В. (2024). Застосування армованого вуглецевим волокном пластику для підвищення енергоефективності рейкових транспортних засобів. In *Шановні учасники конференції!* (p. 200).
11. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34–46.
12. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34–46.
13. Dzhumabayev, D. (2018). Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(4), 1439–1462.
14. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021, July). Unique solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution. In *American Institute of Physics Conference Series* (Vol. 2365, No. 1, p. 070012).
15. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021). On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution. *International Journal of Applied Mathematics*, 34(2), 225.
16. Усманов, К., & Мамидова, М. (2025). Пантограф типтегі интегралдық-дифференциалдық тендеулерге параметрлеу әдісін қолдану. *Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары*, 1(32).
17. Абибулла, Д., & Усманов, К. И. (2024). Об одном подходе решения краевых задач для дифференциального уравнения типа пантографа. *Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары*, 1(28).
18. Вольтерра, В. (1982). *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* (304 с.). М.: Наука.

References

1. Mahler, K. (1940). On a special functional equation. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(2), 115–123.
2. Fox, L., Mayers, D. F., Ockendon, J. R., & Tayler, A. B. (1971). On a functional differential equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 8(3), 271–307.
3. Morris, G. R., Feldstein, A., & Bowen, E. W. (1972). The Phragmén-Lindelöf principle and a class of functional differential equations. In *Ordinary differential equations* (pp. 513–540). Academic Press.
4. Bykov, Y. V., Bykova, L. Y., & Shevtsov, E. I. (1973). Sufficient conditions for the oscillatory nature of solutions of nonlinear differential equations with deviating argument. *Differential Equations*, 9(9), 1555–1560.
5. Iserles, A., & Liu, Y. (1997). Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 208(2), 404–424.
6. Rodionov, V. I. (2021). *Primenenie algebricheskikh sistem v teorii differentsial'nykh uravnenii*. Izd. tsentr "Udmurtskii universitet".
7. Vorob'ev, A. A., Vatulin, Ya. S., & Karimov, D. D. (2021). Povishenie effektivnosti pantografa elektropodvizhnogo sostava. *Sistemy avtomatizirovannogo proektirovaniya na transporte*, 66–67.
8. Vorob'ev, A. A., Vatulin, Ya. S., & Karimov, D. D. (2021). Vozdeistvie vozdushnogo potoka na aerodinamicheskoe ustroistvo dlya pantografa. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putei soobshcheniya*, 18(4), 453–459.
9. Vorob'ev, A. A., Vatulin, Ya. S., & Karimov, D. D. (2021). Vozdeistvie vozdushnogo potoka na aerodinamicheskoe ustroistvo dlya pantografa. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putei soobshcheniya*, 18(4), 453–459.

10. Rukavishnikov, P. V., Skurikhin, D. I., & Rybin, A. V. (2024). Zastosuvannia armanogo vugletsevyim voloknom plastiku dlya pidvishchennia energoefektyvnosti reikovyh transportnyh zasobiv. In *Shanovni uchashnyky konferentsii!* (p. 200).
11. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34–46.
12. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29(1), 34–46.
13. Dzhumabayev, D. (2018). Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(4), 1439–1462.
14. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021, July). Unique solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution. In *American Institute of Physics Conference Series* (Vol. 2365, No. 1, p. 070012).
15. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021). On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution. *International Journal of Applied Mathematics*, 34(2), 225.
16. Usmanov, K., & Mamidova, M. (2025). Pantograf tiptegi integraldyk-differentsialdyk teñdeulerge parametrleu ädisin qoldanu. *Q.A.Yasaui atyndagy Khalyqaralyq qazaq-türk universitetiniñ khabarlary*, 1(32).
17. Abibulla, D., & Usmanov, K. I. (2024). Ob odnom podkhode resheniya kraevykh zadach dlya differentsial'nogo uravneniya tipa pantografa. *Q.A.Yasaui atyndagy Khalyqaralyq qazaq-türk universitetiniñ khabarlary*, 1(28).
18. Volterra, V. (1982). *Teoriya funktsionalov, integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravnenii* (304 s.). M.: Nauka.

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	Усманов К.И. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
	Usmanov K.I. – candidate of Physics and Mathematics, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
	Усманов К. И. – кандидат физика-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
2	Зикиш З.А. – магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: zarifa.zikish@ayu.edu.kz , +7 705 356 6615
	Zikish Z.A. – master student, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: zarifa.zikish@ayu.edu.kz , +7 705 356 66 15
	Зикиш З.А. – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: zarifa.zikish@ayu.edu.kz , +7 705 356 6615