УДК 517.956.4
ГРНТИ 27.31.44
https://doi.org/10.47526/3007-8598-2025.1-12

Абан У.Б.[1] , Турметов Б.Х.[2]
[1]*магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г.Туркестан), e-mail: abanulbolsyn@gmail.com*
[2]*доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г.Туркестан), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

О РАЗРЕШИМОСТИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ
ON THE SOLVABILITY OF DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR A CLASS OF DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS WITH INVOLUTION
ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР АЗҒЫНДАЛҒАН ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР КЛАСЫ ҮШІН ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аннотация. *В данной работе для вырожденных диффузионных уравнения с инволюцией исследуются вопросы разрешимости прямой и обратной задачи по определению правой части. Рассматривается уравнение с дробным производным в смысле Капуто. В эллиптической части рассматриваемого уравнения участвует нелокальный аналог оператора Лапласа с коэффициентом, зависящий от временной переменной.*

При исследовании этих задач по временной переменной получаем одномерное вырожденное уравнение с дробной производной Капуто. Решение этого уравнения выражается через специальной функции типа Килбаса-Сайго. Аналогично, по пространственной переменной получается спектральная задача для нелокального оператора Лапласа с краевым условием Дирихле. В явном виде находим собственные функции и собственные значения этой задачи и показываем полноту системы собственных функций в пространстве L_2.

Используя классический метод Фурье решения рассматриваемых задач ищутся в виде разложения в ряд по собственным функциям. Доказана абсолютная и равномерная сходимость рядов, возможность их почленного дифференцирования по всем переменным и абсолютная и равномерная сходимость дифференцированных рядов. Основные утверждения относительно рассматриваемых задач приведены в виде теорем о существования и единственности.

Ключевые слова: *уравнение субдиффузии, производная Капуто, нелокальный оператор Лапласа, прямая задача, обратная задача, метод Фурье, функция Килбаса-Сайго.*

Abstract. *In this paper, for degenerate diffusion equations with involution, the solvability of the direct and inverse problems for determining the right-hand side is studied. The equation with a fractional derivative in the Caputo sense is considered. The elliptic part of the studied equation involves a nonlocal analogue of the Laplace operator with a coefficient depending on the time variable.*

By studying these problems with respect to the time variable, we obtain a one-dimensional degenerate equation with a fractional Caputo derivative. The solution of this equation is expressed by a special function of the Kilbas-Saigo type. Similarly, for the spatial variable, we obtain a spectral problem for the nonlocal Laplace operator with the Dirichlet boundary condition. We explicitly find the eigenfunctions and eigenvalues of this problem and show the completeness of the system of eigenfunctions in space.

Using the classical Fourier method, solutions to the problems under consideration are sought in the form of expansions in a series of eigenfunctions. The absolute and uniform convergence of the series, the possibility of their differentiation term by term in all variables and the absolute and uniform convergence of the differentiated series are proved. The main statements concerning the problems considered are presented in the form of existence and uniqueness theorems.

Key words: *subdiffusion equation, Caputo derivative, nonlocal Laplace operator, direct problem, inverse problem, Fourier method, Kilbas-Saigo function.*

Аңдатпа. *Бұл жұмыста инволюциясы бар азғындалған диффузия теңдеулері үшін тура және оң жақ бөлігін анықтау кері есептерінің шешілу мәселелері зерттеледі. Капуто мағынасында бөлшек туындысы бар теңдеу қарастырылады. Қарастырылып отырған теңдеудің эллипстік бөлігі уақыт айнымалысына тәуелді коэффициенті бар Лаплас операторының бейлокал аналогын қамтиды.*

Осы есептерді зерттеу барысында уақыт айнымалысына қатысты Капутоның бөлшек туындысы бар бір өлшемді азғындалған теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің шешімі Килбас-Сайго түріндегі арнайы функция арқылы өрнектеледі. Сол сияқты, кеңістіктік айнымалы бойынша бейлокал Лаплас операторы үшін Дирихле шекаралық шарты бар спектрлік есеп алынады. Біз бұл есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндерін айқын түрде табамыз және меншікті функциялар жүйесінің L_2 *кеңістіктегінде толықтығын көрсетеміз.*

Классикалық Фурье әдісін қолдана отырып, қарастырылатын есептердің шешімдері меншікті функциялар арқылы жіктелген қатар түрінде ізделеді. Қатарлардың абсолютті және біркелкі жинақтылығы, олардың барлық айнымалылар бойынша мүшелеп дифференциалдау мүмкіндігі, дифференциалданған қатарлардың абсолютті және біркелкі жинақтылығы дәлелденген. Қарастырылып отырған мәселелерге қатысты негізгі тұжырымдар шешімнің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар түрінде берілген.

***Негізгі сөздер**: субдиффузия теңдеуі, Капуто туындысы, бейлокал Лаплас операторы, тура есеп, кері есеп, Фурье әдісі, Килбас-Сайго функциясы.*

Введение

В современной науке основой большинства моделей, описывающих физические и химические процессы, экономические и социально-биологические явления и многих других, служат дифференциальные уравнения дробного порядка. Подробное сведения об этих моделях можно найти, например, в справочнике по дробному исчислению с приложениями [1] и литературе в них.

Хотя к настоящему времени было опубликовано множество работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка и различным их приложениям, тем не менее, теория дробных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами еще далека от полноты.

В работе А.А.Килбаса и М.Сайго [2] было изучено дифференциальное уравнение дробного порядка следующего вида,

$$_{RL}D^{\alpha}u(t)+\lambda t^{\beta}u(t)=g(t), 0<t ,$$

где, $0<\alpha, \beta>-\{\alpha\}, {}_{RL}D^{\alpha}$ - производная порядка α в смысле Римана-Лиувилля. Решение этого уравнения выписана в явном виде с помощью специальной функции, зависящей от трех параметров (функция Килбаса-Сайго).

$$E_{\alpha,m,l}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{m=0}^{k-1}\frac{\Gamma\left[\alpha(mj+l)+1\right]}{\Gamma\left[\alpha(mj+l+1)+1\right]}\right)z^{k} .$$

Более общее уравнения дробного поряка с переменными коэффициентами изучены в работах [3-5]. В частности, в работе [5] используя метод преобразования Лапласа, построены явные решения дробного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра с переменными коэффициентами.

Цикл работ D.Suragan и соавторов [6-8] были посвящены к построению явного вида решений общего дифференциального уравнения дробного порядка с переменными коэффициентами. В этих работах рассматривались уравнения с производными Римана-Лиувилля, Капуто и Хильфера. В качестве приложения полученных результатов в работе [8] были изучены начально-краевые задачи для уравнений в частных производных дробного порядка с переменными коэффициентами.

Начально-краевые задачи для вырожденных диффузионных уравнений исследовались в работах многочисленных авторов. Так в работе M.Kirane и соавторов [9] в случае $n=1$ в прямоугольной области для дробного аналога вырожденного параболического уравнения с инволюцией изучены обратные задачи по определению правой части, зависящей от пространственной переменной. Методом Фурье найдены классические решения задач с краевыми условиями Дирихле и Неймана.

В дальнейшем, в работах [10-12] аналогичные исследования проводились для вырожденных уравнений в конечных и бесконечных областях. При этом рассматривались уравнения с линейными и полилинейными операторами. В частности, в работе [12] в линейных и нелинейных случаях получены оптимальные оценки скоростей затухания решений.

В работе [13] рассмотрена задача моделирования процесса термодиффузии в замкнутом металлическом проводе, обернутом тонким листом изоляционного материала. Моделирование этого процесса приводит к рассмотрению обратной задачи для одномерного вырожденного дробного эволюционного уравнения с инволюцией. Применением метода разделения переменных доказаны теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемой задачи.

Далее, в работе [14] исследованы вырожденные дробно-эллиптические уравнения типа Трикоми–Геллерстедта–Келдыша. Доказаны теоремы о корректности дробно-эллиптических краевых задач для общих положительных операторов с дискретными спектром.

Отметим, также что обратные задачи для одномерных параболических уравнений с инволюцией с комплекснозначными переменными коэффициентами изучены в работах [15,16]. Установлены существование и единственность решения изучаемых задач. А в работах [17,18] обратные задачи изучены для уравнений диффузии с общим эллиптическим оператором. Кроме того, свойства операторов с инволютивными преобразованиями изучены в работах [19,20].

В настоящей работе рассматривается вырожденное уравнение диффузии с нелокальным оператором Лапласа. Рассматриваемое нами уравнение входят в класс дифференциальных уравнений с инволюцией. Ранее такие задачи для уравнений с инволюцией в основном исследовались в одномерном или двумерном случае. В отличие от этих работ авторов, в данной работе задачи изучаются в n-мерном случае.

Переходим к постановке задачи. Пусть $Q = \Pi \times (0,T)$, где $\Pi = \left\{ x \in R^n : 0 < x_j < p_j, j = 1,\ldots,n \right\}$ - параллелепипед, $p_j > 0$ и $T > 0$. Рассмотрим отображения $S_j : R^n \to R^n$, $1 \le j \le n$ вида

$$S_j x = \left(x_1, ..., x_{j-1}, p_j - x_j, x_{j+1}, ..., x_n \right).$$

Если рассмотрим всевозможные произведение отображений S_j, $1 \le j \le n$, то общее количество таких отображений с учетом отображения $S_0 x = x$ будет 2^n. Для нумерации этих отображений мы возпользуемся записью целого числа в двоичной системе исчисления. Если i индекс, то кроме обычного обозначения мы будем также использовать запись этого числа в двоичной системе исчисления $i = \left(i_n ... i_1 \right)_2$, где $i_k = 0$ или $i_k = 1$. Тогда мы можем рассматривать отображения вида $S_l^{i_l} ... S_1^{i_1} x$.

Пусть $a_0, a_1, ..., a_{2^l - 1}$ - некоторый набор действительных чисел. Введем оператор

$$L_x v(x) = \sum_{i=0}^{2^l - 1} a_i \Delta v\left(S_l^{i_l} ... S_1^{i_1} x \right).$$

Пусть $0 < \alpha \le 1, \beta > -\alpha, D_t^\alpha$ оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле Капуто [21], а именно $D_t^\alpha = I^{1-\alpha} \dfrac{d}{dt}$, где $I^0 u(t) = u(t)$ и

$$I^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(\tau) d\tau .$$

В дальнейшем функция $g(t)$ будет означать квазиполином вида $g(t)=\sum_{j=1}^{p} g_j t^{m_j}$, $m_j>0, g_j$ заданные постоянные.

Цель исследования: Целью настоящей работы является исследования корректности и доказательства теорем о существования и единственности решений следующих задач.

Задача 1 (Прямая задача). Необходимо найти функцию $u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$, $D_t^{\beta}u(t,x), L_x u(t,x)\in C\left(Q\right)$, удовлетворяющие условиям,

$$D_t^{\alpha}u(t,x)-t^{\beta}L_x u(t,x)=F(t,x)\equiv f(x)g(t),(t,x)\in Q\,, \tag{1}$$

$$u(t,x)=0,[0\le t\le T], x\in\partial\Pi\,. \tag{2}$$

$$u(0,x)=\varphi(x), x\in\bar{\Pi}\,, \tag{3}$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданные функции.

Задача (Обратная задача). Необходимо найти пару функции $u(t,x)$ и $f(x)$ обладающие гладкостью, $u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right), D_t^{\alpha}u(t,x), L_x u(t,x)\in C\left(Q\right)$, $f(x)\in C\left(\bar{\Pi}\right)$, удовлетворяющие условиям (1)-(3) и дополнительному условию

$$u(T,x)=\psi(x), x\in\bar{\Pi}\,, \tag{4}$$

где, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные функции.

Методы исследования задачи

Сначала построим решение одномерного дифференциального уравнения дробного порядка Пусть $\lambda>0, 0<\alpha\le 1, \beta>-\alpha$ -заданные числа. Рассмотрим следующую задачу.

Задача OD1. Необходимо определить функцию $u(t)$ из класса $C[0,+\infty)$ для которой $D^{\alpha}u(t)\in C(0,+\infty)$ и удовлетворяющую условиям,

$$D^{\alpha}u(t)+\lambda t^{\beta}u(t)=fg(t), 0<t<T\,, \tag{5}$$

$$u(0)=\varphi, \tag{6}$$

где, f,φ - заданные числа, и $g(t)=\sum_{j=1}^{p} g_j t^{m_j}$ некоторый квазиполином, $m_j>0, g_j$ заданные постоянные.

Задача OD2. Необходимо определить функцию $u(t)$ из класса $C[0,T]$, для которой $D^{\alpha}u(t)\in C(0,T)$ и постоянную f удовлетворяющую условиям (5),(6) и дополнительному условию

$$u(T)=\psi, \tag{7}$$

где, φ,ψ - заданные числа, и $g(t)=\sum_{j=1}^{p} g_j t^{m_j}$ некоторый квазиполином, $m_j>0, g_j$ заданные постоянные.

Решение задачи **OD1** построена в работах [22] и оно имеет вид

$$u(t)=\varphi E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right)+f\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right). \tag{8}$$

Введем обозначение

$$G_p(t)=\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right).$$

Тогда формулу (8) можно переписать в виде

$$u(t)=\varphi E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right)+fG_p(t). \tag{9}$$

Далее, считая f неизвестной и подставляя функцию (9) в условие (7), имеем

$$\psi=u(T)=\varphi E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda T^{\alpha+\beta}\right)+fG_p(T).$$

Отсюда при выполнении условии $G_p(T)\neq 0$ решение задачи OD2 имеют вид

$$f=\frac{\psi-\varphi\cdot E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda T^{\alpha+\beta}\right)}{G_p(T)}$$

и

$$u(t)=\frac{G_p(t)}{G_p(T)}\psi+\left[E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda t^{\alpha+\beta}\right)-\frac{G_p(t)}{G_p(T)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda T^{\alpha+\beta}\right)\right]\varphi.$$

Далее, приведем известные утверждения о собственных функциях и собственных значениях задачи Дирихле для нелокального оператора Лапласа.

Рассмотрим следующую граничную задачу.

Задача S. Найти функцию $v(x)\neq 0$ из класса $v(x)\in C\left(\overline{\Pi}\right)\cap C^2\left(\Pi\right)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_x v(x)+\lambda v(x)=0,\ x\in\Pi,$$

и граничному условию

$$v(x)|_{\partial\Pi}=0,$$

где, $\lambda \in \mathrm{R}$.

Отметим, что Задача S изучена в работе [23]. Кроме того, спектральные вопросы нелокального аналога бигармонического оператора и их приложения к вопросам разрешимости обратных задач для параболического уравнения четвертого порядка изучены в работе [24].

Обозначим

$$\varepsilon_{k_1k_2...k_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+...+i_nk_n}.$$

В работе [23] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть коэффициенты $a_i, i = 0,1,...,2^n - 1$ такие что выполняются условия $\varepsilon_{k_1k_2...k_n} \neq 0$. Тогда собственные функции задачи S имеют вид

$$v_{k_1k_2...k_n}(x) = C\prod_{i=1}^{n} \sin\frac{k_i\pi x_i}{p_i}, C = 2^{n/2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p_i}}.$$

а соответствующие им собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{k_1k_2...k_n} = \varepsilon_{k_1k_2...k_n}\mu_{k_1k_2...k_n},$$

где $\mu_{k_1k_2...k_n} = \pi^2\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{k_i^2}{p_i^2}\right)$. Система функций $\left\{v_{k_1k_2...k_n}(x)\right\}_{k_j=1}^{\infty}, j = 1,2,...,n$ является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(\Pi)$.

Замечание 1. Если при всех $k_j = 1,2,..., j = 1,2,...,n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1,k_2,...,k_n} > 0$, то собственные значения задачи S являются положительными.

Замечание 2. Если при всех $k_j = 1,2,..., j = 1,2,...,n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1,k_2,...,k_n} > 0$, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что справедливы оценки

$$C_1\mu_{k_1k_2...k_n} \leq \lambda_{k_1k_2...k_n} \leq C_2\mu_{k_1k_2...k_n}. \quad (10)$$

Теперь исследуем сходимость рядов Фурье по системе $v_{k_1...k_n}(x)$. Эти утверждения в основном известны (см. например, [24]), но для полноты изложения мы их приводим с доказательством.

Пусть

$$h(x) = \sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty} h_{k_1...k_n} v_{k_1...k_n}(x),$$

ряд Фурье функции $h(x)$ по системе $v_{k_1...k_n}(x)$, где

$$h_{k_1...k_n} = \left(h, v_{k_1...k_n}\right) \equiv \int_0^{p_1}...\int_0^{p_n} h(x_1,x_2,...,x_n)v_{k_1...k_n}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1..dx_n. \quad (11)$$

В дальнейщем всюду символ C будет означать произвольную постоянную, значение которой нас не интересует.

Лемма 1. Пусть $h(x) \in C\left(\bar{\Pi}\right)$, функции $\dfrac{\partial^j h(x)}{\partial x_1 ... \partial x_j}, 1 \le j \le n$ кусочно-непрерывны в $\bar{\Pi}$ и выполняется условие

$$h(x)\big|_{\partial\Pi} = 0 . \qquad (12)$$

Тогда числовой ряд $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty} ... \sum\limits_{k_n=1}^{\infty} \left| h_{k_1 ... k_n} \right|$ сходится.

Доказательство. Если $h(x) \in C\left(\bar{\Pi}\right)$ и $\dfrac{\partial^j h(x)}{\partial x_1 ... \partial x_j}, 1 \le j \le n$ кусочно-непрерывны, то интегрируя по частям по переменной x_1 в интеграле (11) с учетом равенства (12) получаем

$$h_{k_1 ... k_n} = \frac{1}{k_1} h_{k_1 ... k_n}^{1,0,..,0},$$

где,

$$h_{k_1 ... k_n}^{1,0,..,0} = C \int\limits_0^{p_1} ... \int\limits_0^{p_n} \frac{\partial h(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1} v_{k_1 ... k_n}^{1,0,..,0} (x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 .. dx_n ,$$

$$v_{k_1 ... k_n}^{1,0,..,0} (x_1, x_2, ..., x_n) = \cos \frac{k_1 \pi x_1}{p_1} \cdot \prod_{j=2}^{n} \sin \frac{k_j \pi x_j}{p_j} .$$

Продолжая этот процесс по всем $j \in \{2, 3, ..., n\}$, имеем

$$h_{k_1 ... k_n} = \frac{1}{k_1 k_2 ... k_n} h_{k_1 ... k_n}^{1,1,..,1},$$

где,

$$h_{k_1 ... k_n}^{1,1,..,1} = C \int\limits_0^{p_1} ... \int\limits_0^{p_n} \frac{\partial^n h(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n} v_{k_1 ... k_n}^{1,1,..,1} (x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 .. dx_n ,$$

$$v_{k_1 ... k_n}^{1,1,..,1} (x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{n} \cos \frac{k_j \pi x_j}{p_j} .$$

Далее, используя неравенство Коши-Буняковского получаем

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_n=1}^{\infty} \left| h_{k_1 ... k_n} \right| = \sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k_1 k_2 ... k_n} h_{k_1 ... k_n}^{1,1,..,1} \right| \le \sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 ... k_m^2}} \sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_n=1}^{\infty} \left| h_{k_1 ... k_n}^{1,1,..,1} \right|^2} .$$

Так как система $\left\{v_{k_1...k_n}^{1,1,..,1}(x_1,x_2,...,x_n)\right\}$ ортогонально в пространстве $L_2(\Pi)$ и $\dfrac{\partial^n h(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_n}\in L_2(\Pi)$, то в силу неравенства Бесселя ряд $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1...k_n}^{1,1,..,1}\right|^2$ сходится. Кроме того,

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2...k_m^2}=\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{1}{k_2^2}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_m^2}<\infty\,.$$

Отсюда вытекает доказательство леммы.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть функция $h(x)$ принадлежит классу $C^2\left(\overline{\Pi}\right)$ и имеет кусочно-непрерывные в $\overline{\Pi}$ частные производные $\dfrac{\partial^{n+2}h(x)}{\partial x_1...\partial x_j^3...\partial x_n}$, $j\in\{1,2,...,n\}$. Тогда если функции $h(x)$ и $\dfrac{\partial^2 h(x)}{\partial x_j^2}$ удовлетворяют условиям (12), то числовой ряд $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_j=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}k_j^2\left|h_{k_1...k_j...k_n}\right|$ сходится.

Доказательство. Если функции $h(x)$ и $\dfrac{\partial^2 h(x)}{\partial x_j^2}$ удовлетворяют условиям (7), то интегрируя два раза по переменному x_j интеграл $h_{k_1...k_n}^{1,1,..,1}$ получаем

$$h_{k_1...k_n}=\frac{1}{k_1k_2...k_j^5...k_n}h_{k_1k_2...k_j...k_n}^{1,1,..,5,...,1}$$

где,

$$h_{k_1k_2...k_j...k_n}^{1,1,..,3,...,1}=C\int_0^{p_1}...\int_0^{p_n}\frac{\partial^{n+2}h(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_j^3...\partial x_n}v_{k_1k_2...k_j...k_n}^{1,1,..,3,...,1}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1..dx_n\,,$$

$$v_{k_1k_2...k_j...k_n}^{1,1,..,5,...,1}(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{k_j\pi x_j}{p_j}\,.$$

Далее, используя неравенство Коши-Буняковского для $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1...k_n}\right|$ получаем

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_j=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}k_j^2\left|h_{k_1...k_n}\right|=\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{k_j^2}{k_1k_2...k_j^3...k_n}\left|h_{k_1k_2...k_j...k_n}^{1,1,..,3,...,1}\right|\le\sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2...k_j^2...k_m^2}}\sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1k_2...k_j...k_n}^{1,1,..,3,...,1}\right|^2}\,.$$

Так как система $\left\{v_{k_1k_2...k_j...k_n}^{1,1,..,3,...,1}(x_1,x_2,...,x_n)\right\}$ ортогонально в пространстве $L_2(\Pi)$ и $\dfrac{\partial^{n+3}h(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_j^3...\partial x_n}\in L_2(\Pi)$, то в силу неравенства Бесселя ряд $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_j=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}\left|h_{k_1k_2...k_j...k_n}^{1,1,..,3,...,1}\right|^2$ сходится. Отсюда вытекает доказательство леммы.

Следствие 1. Пусть функция $h(x)$ принадлежит классу $C^2\left(\overline{\Pi}\right)$ и для всех $j\in\{1,2,...,n\}$ имеет кусочно-непрерывные в $\overline{\Pi}$ частные производные $\dfrac{\partial^{n+2}h(x)}{\partial x_1...\partial x_j^3...\partial x_n}$. Тогда, если функции $h(x)$ и $\dfrac{\partial^2 h(x)}{\partial x_j^2}$ удовлетворяют условиям (12), то числовой ряд $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_j=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_j...k_n}\left|h_{k_1...k_j...k_n}\right|$ сходится.

Доказательство этого утверждения следует из представления собственных значений $\lambda_{k_1k_2...k_n}=\varepsilon_{k_1k_2...k_n}\pi^2\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{k_j^2}{p_j^2}\right)$ и утверждения Леммы 2.

Анализ и основные результаты

Далее, докажем теорему о существования и единственности решения задачи 1.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть m_j і $0, g_j$ - постоянные, $g(t)=\mathop{\text{e}}\limits_{j=1}^{p} g_j t^{m_j}$ квазиполином, функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2. Тогда решение задачи 1 существует, единственно и имеет вид

$$u(t,x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\left[\varphi_{k_1...k_n}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+f_{k_1...k_n}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)\right)\right]v_{k_1...k_n}(x), \qquad (13)$$

где, $\varphi_{k_1...k_n}$ и $f_{k_1...k_n}$ коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ соответственно.

Доказательство. Сначала исследуем существование решение задачи 1. Решение будем искать в виде ряда

$$u(t,x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}u_{k_1...k_n}(t)v_{k_1...k_n}(x), \qquad (14)$$

где, $u_{k_1...k_n}(t)$ неизвестные коэффициенты.

Подставляя функцию $u(t,x)$ из (14) в уравнение (1) для коэффициентов $u_{k_1...k_n}(t)$ получаем следующую задачу Коши

$$D^{\alpha}u_{k_1...k_n}(t)+\lambda_{k_1...k_n}t^{\beta}u_{k_1...k_n}(t)=f_{k_1...k_n}g(t), t>0, \qquad (15)$$

$$u_{k_1...k_n}(0)=\varphi_{k_1...k_n}. \qquad (16)$$

На основании формулы (10) решение задачи (15)-(16) имеет вид

$$u_{k_1...k_n}(t)=\varphi_{k_1...k_n}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)+f_{k_1...k_n}\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right).$$

Следовательно, ряд (13) является формальным решением задачи 1. Покажем теперь, что этот ряд и ряды, полученные после применения к нему операторов D^{α} и L_x , сходятся.

В работе [25] для функции $E_{\alpha,m,l}(z)$ доказано следующее свойство:

$$\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\alpha(l-m)\right]}{\Gamma\left[1+\alpha(l-m+1)\right]}t\right)^{-1}\le E_{\alpha,m,l}\left(-t\right)\le\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\alpha l\right]}{\Gamma\left[1+\alpha(l+1)\right]}t\right)^{-1} \tag{17}$$

где, $\alpha\in(0,1),m>0,l>m-\dfrac{1}{\alpha},t\ge 0$.

Используя неравенство (17) для коэффициентов $u_{k_1...k_n}(t)$ имеем

$$\left|u_{k_1...k_n}(t)\right|\le\left|\varphi_{\varphi_{k_1...k_n}}\right|\left(1+\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)^{-1}+\left|f_{k_1...k_n}\right|\sum_{j=1}^{p}C_j\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\beta+\mu_j\right]}{\Gamma\left[1+\beta+\mu_j+1)\right]}\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)^{-1}\le$$

$$\le C\left(\left|\varphi_{\varphi_{k_1...k_n}}\right|+\left|f_{k_1...k_n}\right|\right).$$

Тогда для ряда (13) с учетом ограниченности функции $\left|v_{k_1...k_n}(x)\right|$ для всех $(t,x)\in\bar{Q}$ получаем оценку

$$\left|u(t,x)\right|\le C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\left[\left|\varphi_{k_1...k_n}\right|+\left|f_{k_1...k_n}\right|\right]. \tag{18}$$

Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 1, то ряды $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{k_1...k_n}\right|$ и $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}...\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}\left|f_{k_1...k_n}\right|$ сходятся. Тогда из оценки (18) следует, что ряд (13) сходится равномерно в замкнутой области $\bar{Q}$ и поэтому $u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$.

Далее, так как $D^{\alpha}u_{k_1...k_n}(t)=f_{k_1...k_n}g(t)-\lambda_{k_1...k_n}t^{\beta}u_{k_1...k_n}(t)$, то

$$D^{\alpha}u(t,x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}f_{k_1...k_n}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}\right)v_{k_1...k_n}(x)-\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}t^{\beta}u_{k_1...k_n}(t).$$

Отсюда,

$$\left|D^{\alpha}u(t,x)\right|\le C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|f_{k_1...k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|u_{k_1...k_n}(t)\right|\le$$

$$\le C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|f_{k_1...k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|\varphi_{k_1...k_n}\right|.$$

Аналогично, применяя к функции (13) оператор L_x имеем

$$L_x u(t,x)=-\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left[\varphi_{k_1...k_n}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+f_{k_1...k_n}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)\right)\right]v_{k_1...k_n}(x).$$

Отсюда,

$$\left|L_x u(t,x)\right|\le C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|f_{k_1...k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|\varphi_{k_1...k_n}\right|.$$

Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2, то ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|\varphi_{k_1...k_n}\right|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1...k_n}\left|f_{k_1...k_n}\right|$ сходятся. Тогда ряды представляющие функции $D^{\alpha}u(t,x)$ и $L_x u(t,x)$ сходятся равномерно в замкнутой области $\bar{Q}$ и поэтому $D^{\alpha}u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$ и $L_x u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$.

Далее, единственность решения задачи докажем стандартным методом, основанным на полноте систем собственных функций $v_{k_1k_2...k_n}(x)$ в $L_2\left(\Pi\right)$. Действительно, пусть $u(t,x)$ - решение однородной задачи 1. Рассмотрим функции

$$u_{k_1k_2...k_n}(t)=\int_{\Pi}u(t,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx.$$

Тогда,

$$D^{\alpha}u_{k_1k_2...k_n}(t)=\int_{\Pi}D^{\alpha}u(t,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx=\int_{\Pi}L_x u(t,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx=$$

$$-\lambda_{k_1k_2...k_n}\int_{\Pi}u(t,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx=-\lambda_{k_1k_2...k_n}u_{k_1k_2...k_n}(t).$$

Кроме того,

$$u_{k_1k_2...k_n}(0)=\int_{\Pi}u(0,x)v_{k_1k_2...k_n}(x)dx=0.$$

Таким образом, для функции $u_{k_1k_2...k_n}(t)$ получаем однородную задачу (15)-(16) и поэтому $u_{k_1k_2...k_n}(t)\equiv 0$. Тогда функция $u(t,x)$ -решение однородной задачи 1 ортогональны всем элементам системы $v_{k_1k_2...k_n}(x)$. В силу полноты этой системы $u(t,x)\equiv 0$ в $\bar{Q}$. Теорема доказана.

Основным результатом относительно задачи 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $m_j \geq 0, g_j > 0$ - постоянные, $g(t)=\sum_{j=1}^{p} g_j t^{m_j}$ квазиполином, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2. Тогда решение задачи 2 существует, единственно и имеют вид

$$f(x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{G_p(T)}\left[\psi_{k_1...k_n}-\varphi_{k_1...k_n}\cdot E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\right]v_{k_1...k_n}(x), \tag{19}$$

$$u(t,x)=\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{G_p(t)}{G_p(T)}\psi_{k_1...k_n}v_{k_1...k_n}(x)+$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\left[E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)-\frac{G_p(t)}{G_p(T)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\right]\varphi_{k_1...k_n}v_{k_1...k_n}(x), \tag{20}$$

где, $\varphi_{k_1...k_n}$ и $\psi_{k_1...k_n}$ коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно, а функция $G_p(t)$ определяется равенством

$$G_p(t)=\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right).$$

Доказательство. Решение задачи 2 также будем искать в виде ряда (14). Тогда для неизвестных коэффициентов $u_{k_1k_2...k_n}(t)$ получаем задачу с условиями (15), (16) и дополнительным условием

$$u_{k_1...k_n}(T)=\varphi_{k_1...k_n}.$$

В этом случае считая функцию $f(x)$ неизвестной и используя условию переопределения (4), на основе формул (9) и (10) получаем

$$f_{k_1...k_n}=\frac{\psi_{k_1...k_n}-\varphi_{k_1...k_n}\cdot E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}T^{\alpha+\beta}\right)}{G_p(T)}$$

и

$$u_{k_1...k_n}(t)=\frac{G_p(t)}{G_p(T)}\psi_{k_1...k_n}+\left[E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}t^{\alpha+\beta}\right)-\frac{G_p(t)}{G_p(T)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1...k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\right]\varphi_{k_1...k_n}.$$

Таким образом, ряды (19) и (20) являются формальным решением задачи 2. Исследуем гладкость этих функций. Сначала оценим ряд (19). Так как коэффициенты g_j положительны, то из нижнего неравенства (17) для функции $G_p(T)$ получаем

$$G_p(T)=\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}T^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)=\sum_{j=1}^{p}C_jE_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\geq$$

$$\geq\sum_{j=1}^{p}C_j\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\alpha\left(1+\dfrac{\beta+\mu_j}{\alpha}-1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\right]}{\Gamma\left[1+\alpha\left(1+\dfrac{\beta+\mu_j}{\alpha}-1-\dfrac{\beta}{\alpha}+1\right)\right]}\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)^{-1}=$$

$$\geq\sum_{j=1}^{p}C_j\left(1+\frac{\Gamma\left[1+\mu_j\right]}{\Gamma\left[1+\mu_j+\alpha\right]}\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)^{-1}=\sum_{j=1}^{p}C_j\left(\frac{\Gamma\left[1+\mu_j+\alpha\right]}{\Gamma\left[1+\mu_j+\alpha\right]+\Gamma\left[1+\mu_j\right]\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}}\right).$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{G_p(T)}\leq C\lambda_{k_1\ldots k_n}.$$

Из этой оценки для ряда (19) получаем

$$|f(x)|\leq\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{G_p(T)}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|+\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{1}{G_p(T)}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)\leq$$

$$\leq C\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\ldots k_n}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|.$$

Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2, то числовые ряды $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\ldots k_n}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|$ и $\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|$ сходятся. Тогда ряд (19) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{\Pi}$ и поэтому $f(x)\in C\left(\overline{\Pi}\right)$. Далее, из верхнего неравенства (17) следуют ограниченность функции $\dfrac{G_p(t)}{G_p(T)}$, $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\right)$ и $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)$. Тогда для ряда (20) получаем

$$|u(t,x)|\leq C\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|+C\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|.$$

Отсюда, как и в случае ряда (19) получаем равномерную сходимость ряда (20) в замкнутой области $\bar{Q}$ и поэтому $u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$.

Функция $u_{k_1\ldots k_n}(t)$ удовлетворяет уравнению (15), т.е. имеет место равенство

$$D^{\alpha}u_{k_1\ldots k_n}(t)=\frac{\psi_{k_1\ldots k_n}-\varphi_{k_1\ldots k_n}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)}{G_p(T)}G_p(t)-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}u_{k_1\ldots k_n}(t).$$

Из этого равенства учитывая ограниченность функций $\dfrac{G_p(t)}{G_p(T)}$, $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\right)$ и $E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right)$ получаем

$$\left|D^\alpha u_{k_1\ldots k_n}(t)\right| \le \frac{G_p(t)}{G_p(T)}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right| + \left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right| E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}T^{\alpha+\beta}\right) + \lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\left|u_{k_1\ldots k_n}(t)\right| \le$$

$$\le C\left(\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right| + \left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|\right) + C\lambda_{k_1\ldots k_n}\left(\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right| + \left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|\right).$$

Следовательно, ряды $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\ldots k_n}\left|\psi_{k_1\ldots k_n}\right|$ и $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum\limits_{k_n=1}^{\infty}\lambda_{k_1\ldots k_n}\left|\varphi_{k_1\ldots k_n}\right|$ являются мажорантными по отношению к ряду представляющую функцию $D^\alpha u(t,x)$. Поэтому если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 2, то этот ряд сходится и $D^\alpha u(t,x) \in C\left(\bar{Q}\right)$. Аналогично доказывается соотношение $L_x u(t,x) \in C\left(\bar{Q}\right)$. Остается доказать единственность решения задачи. Пусть существуют две пары $\{u_1(t,x), f_1(x)\}$ и $\{u_2(t,x), f_2(x)\}$ удовлетворяющие условиям задачи 2. Тогда пара функции $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x),\ f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным условия (2) и (3). Если рассмотрим функцию

$$u_{k_1k_2\ldots k_n}(t) = \int\limits_{\Pi} u(t,x)v_{k_1k_2\ldots k_n}(x)dx,$$

то для нее получаем задачу

$$D^\alpha u_{k_1\ldots k_n}(t) + \lambda_{k_1\ldots k_n}t^\beta u_{k_1\ldots k_n}(t) = f_{k_1\ldots k_n}g(t), t>0, \qquad (21)$$

$$u_{k_1\ldots k_n}(0) = 0, u_{k_1\ldots k_n}(T) = 0. \qquad (22)$$

Решение задачи (21)-(22) имеет вид

$$u_{k_1\ldots k_n}(t) = f_{k_1\ldots k_n}G_p(t) \equiv f_{k_1\ldots k_n}\sum_{j=1}^{p}\frac{g_j\Gamma(\mu_j+1)}{\Gamma(\mu_j+1+\alpha)}t^{(\alpha+\mu_j)}E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta+\mu_j}{\alpha}}\left(-\lambda_{k_1\ldots k_n}t^{\alpha+\beta}\right).$$

Так как $G_p(t) \ne 0$, то отсюда получаем $f_{k_1\ldots k_n} \equiv 0$ и $u_{k_1\ldots k_n}(t) = 0$. Следовательно, функции $u(t,x)$ и $f(x)$ ортогональны всем элементам системы $v_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$. В силу полноты этой системы $f(x) \equiv 0, x \in \bar{\Pi}$ и $u(t,x) \equiv 0, (t,x) \in \bar{Q}$. Теорема доказана.

Заключение

В данной работе в прямоугольной области исследованы вопросы разрешимости некоторых прямых и обратных задач для вырожденного уравнения диффузии с инволютивными преобразованными аргументами. Ранее подобные задачи для уравнений с инволюцией в основном рассматривались в одномерном или двумерном случае, а в нашем случае данную задачу мы исследовали в общем в n-мерном случае. Рассматриваемые задачи решены применением метода Фурье. При разделении переменных возникает спектральная задача для нелокального аналога оператора Лапласа. Используя известные утверждения относительно задачи Дирихле для классического оператора Лапласа нам удалось найти собственные функции и собственные значения этой спектральной задачи. Кроме того, мы доказали полноту системы собственных функций вспомогательной спектральной задачи. Это утверждение позволило нам построит решению основных задач в виде рядов по системе собственных функций.

В дальнейшем планируется продолжить изучение обратных задач для вырожденных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP19677926).

Список использованной литературы

1. Tarasov, V. E. (Ed.). (2019). *Handbook of fractional calculus with applications* (Vol. 5). Berlin, Germany: de Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110571707
2. Kilbas, A. A., & Saigo, M. (1997). Closed-form solution of a class of linear differential equations of fractional order. *Differential Equations*,*33*(2), 194-204. http://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1609900
3. Bonilla, B., Rivero, M., & Trujillo, J. J. (2007). On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, *187*(1), 68-78. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.08.104
4. Tomovski, Z., Hilfer, R., & Srivastava, H. M. (2010). Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag–Leffler type functions. *Integral transforms and special functions*, *21*(11), 797-814. https://doi.org/10.1080/10652461003675737
5. Tomovski, Z., & Garra, R. (2014). Analytic solutions of fractional integro-differential equations of Volterra type with variable coefficients. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, *17*, 38-60. https://doi.org/10.2478/s13540-014-0154-8
6. Fernandez, A., Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2022). On linear fractional differential equations with variable coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, *432*, 892-897. https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127370
7. Fernandez, A., Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2023). A new representation for the solutions of fractional differential equations with variable coefficients. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *20*(1), 1--20. https://doi.org/10.1007/s00009-022-02228-71660-5446/23/010001-20
8. Restrepo, J. E., & Suragan, D. (2021). Hilfer-type fractional differential equations with variable coefficients. *Chaos, Solitons & Fractals*, *150*, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111146
9. Kirane, M., Samet, B., & Torebek, B. T. (2017). Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data. *Electronic Journal of Differential Equations*, 257,1-13.
10. Smadiyeva, A. G. (2023). Degenerate time-fractional diffusion equation with initial and initial-boundary conditions. *Georgian Mathematical Journal*, *30*(3), 435-443. https://doi.org/10.1515/gmj-2022-2217
11. Smadiyeva, A. G. (2022). Initial-boundary value problem for the time-fractional degenerate diffusion equation. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, *113*(1), 32–41. https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v113.i1.04
12. Smadiyeva, A. G., & Torebek, B. T. (2023). Decay estimates for the time-fractional evolution equations with time-dependent coefficients. *Proceedings of the Royal Society A*, *479* (2276), 1-21. https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0103.
13. Kirane, M., Sadybekov, M. A., & Sarsenbi, A. A. (2019). On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *42*(6), 2043-2052.
14. Ruzhansky, M., Torebek, B. T., & Turmetov, B. (2022). Well-posedness of Tricomi–Gellerstedt–Keldysh-type fractional elliptic problems. *Journal of Integral Equations and Applications*, *34*(3), 373-387. https://doi.org/10.1216/jie.2022.34.373
15. Mussirepova, E., Sarsenbi, A. A., & Sarsenbi, A. M. (2022). Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *45*(17), 11262-11271. https://doi.org/10.1002/mma.8448
16. Mussirepova, E., Sarsenbi, A., & Sarsenbi, A. (2022). The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient. Boundary Value Problems, 2022(1), 99. https://doi.org/10.1186/s13661-022-01675-1
17. Ashurov, R. R., & Mukhiddinova, A. T. (2020). Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation. *Differential equations*,*56*, 1550-1563. https://doi.org/10.1134/S0012266120120046

18. Ashurov, R. R., & Fayziev, Y. E. (2022). On the nonlocal problems in time for subdiffusion equations with the Riemann-Liouville derivatives. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 106*(2), 18-37. https://doi.org/10.31489/2022M2/18-37
19. Karachik, V. V., & Kh, T. B. (2020). Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation. *Novi sad journal of mathematics, 50*(1), 67-88. https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942
20. Karachik, V., & Turmetov, B. (2017). Solvability of some Neumann-type boundary value problems for biharmonic equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 218, 1--17. http://ejde.math.unt.edu
21. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006).*Theory and applications of fractional differential equations* 204, Elsevier.
22. Turmetov, B. (2018). On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2018* (25), 1-14. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.25
23. Turmetov, B., & Karachik, V. (2023). On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with involution in a parallelepiped. In *American Institute of Physics Conference Series* , 2879:1, 1-4. https://doi.org/10.1063/5.0175246
24. Turmetov, B., & Karachik, V. (2024). On solvability of some inverse problems for a nonlocal fourth-order parabolic equation with multiple involution. *AIMS Mathematics*, *9*(3), 6832-6849. https://doi.org/10.3934/math.2024333
25. Boudabsa, L., & Simon, T. (2021). Some properties of the Kilbas-Saigo function.*Mathematics*, *9*(3), 217. https://doi.org/10.3390/math9030217

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, корреспондент автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	**Абан Улболсын** – магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: abanulbolsyn@gmail.com
	Aban Ulbolsyn – master's student , Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: abanulbolsyn@gmail.com
	Абан Улболсын – магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: abanulbolsyn@gmail.com
2	**Турметов Батырхан** – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
	Turmetov Batirkhan – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
	Турметов Батырхан – доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz