МАТЕМАТИКА

ӘОЖ 517.988.
МҒТАР 27.29.25
https://doi.org/10.47526/3007-8598-2025.1-11

Усманов К.И.[1] , Мамидова М.Т.[2]
[1]*доцент, физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті*
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz
[2]*магистр, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті*
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: malikamamidova@gmail.com

ПАНТОГРАФ ТИПТЕГІ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІН ҚОЛДАНУ
APPLICATION OF THE PARAMETRIZATION METHOD TO INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE PANTOGRAPH TYPE
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ К ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ТИПА ПАНТОГРАФА

Аңдатпа. *Пантограф типтегі алғашқы теңдеулер 1940 жылы Mahler жұмыстарында қарастырылған. Ол сығушы аргументтері бар функционалдық-дифференциалдық теңдеулерді сандар теориясында қолданған болатын. 1971 жылы J. Ockendon аргументтері түрленген* $y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$ *түріндегі функционалдық-дифференциалдық теңдеулерді электровоздың тоқ қабылдағышының қозғалысын сипаттау үшін қолданған болатын. Кейінгі кезде пантограф тектес теңдеулер кең қолданыс табуда. Мысалы бапталатын (пантограф) телефон құрылғысын ұстағыш, ұзартылатын (пантограф) микрофон құрылғысы және т.б.*

Бұл мақалада $[0,1]$ *кесіндісінде пантограф тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есеп қарастырлады. Берілген есепті шешу үшін профессор Д.Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісі қолданылады. Ол үшін қарастырылып отырған аралықты* m *бөліктерге бөлеміз. Ізделінді функция әрбір бөліктің бастапқы нүктесіндегі мәнін* $\lambda_i = x_i(t_{i-1})$, $i = \overline{1,m}$ *параметрі арқылы белгілеп аламыз және* $[t_{i-1}, t_i)$ *аралығында* $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ *алмастыруын жасаймыз. Сонда қарастырылып отырған есеп формальді түрде екіге бөлінеді, яғни пантограф тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі мен енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне. Сонымен есеп, пантограф тектес интегралдық–дифференциальдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешімі мен сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін анықтайтын тұйықталған жүйеге келтіріледі. Соның негізінде, бастапқы есептің шешімін анықтау алгоритмі ұсынылады.*

Негізгі сөздер: *пантограф, шеттік есеп, Коши есебі, сызықтық теңдеулер жүйесі, алгоритм, интегралдық–дифференциалдық теңдеу, параметр, жуықтау.*

Abstract. *The first equations of the 1940 pantograph were considered in the works of Mahler. He used functional differential equations with compression arguments in number theory. He used functional differential equations* $y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$ *with compression arguments in number theory. In 1971, J. Ockendon used functional differential equations with transformed arguments of the form to describe the motion of an electric locomotive pantograph. Recently, pantograph type equations have been widely used. For example, a configurable (pantograph) phone device holder, a retractable (pantograph) microphone device, etc.*

In this article, on the segment $[0,1]$ *discusses a two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations of the pantograph type. To solve this problem, the parameterization method proposed by Professor D. Dzhumabaev is used. To do this, we divide the segment in question into* m *parts. Let's denote the value of the desired function at the starting point of each segment through the parameters* $\lambda_i = x_i(t_{i-1})$, $i = \overline{1,m}$ *and replace it* $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ *in the intervals* $[t_{i-1}, t_i)$. *Then the problem under consideration is formally divided into two parts, i.e., a system of linear algebraic equations with respect to the introduced parameters and to the Cauchy problem for a system of integro-differential equations of the pantograph type. Thus, the problem is reduced to a closed system for determining the solution of a special Cauchy problem for systems of integro–differential equations of the pantograph* *type and a system of linear equations. Based on this, an algorithm for determining the solution of the initial problem is proposed.*

Keywords: *pantograph, boundary value problem, Cauchy problem, system of linear equations, algorithm, integro-differential equation, parameter, approximation.*

Аннотация. *Первые уравнения пантографа 1940 года были рассмотрены в работах Mahlera. Он использовал функционально-дифференциальные уравнения с аргументами сжатия в теории чисел. В 1971 году J. Ockendon использоваль функционально-дифференциальные уравнения с преобразованными аргументами вида* $y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$ *для описания движения токоприемника электровоза. В последнее время уравнения типа пантограф находят широкое применение. Например, настраиваемый (пантограф) держатель телефонного устройства, выдвижное (пантограф) микрофонное устройство и т. д.*

В данной статье на отрезке $[0,1]$ *рассмотрена двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнении типа пантографа. Для решения данной задачи используется метод параметризации, предложенный профессором Д. Джумабаевым. Для этого рассматриваемый отрезок разбиваем рассматриваемый интервал на* m *части. Обозначим значение искомой функции начальной точке каждой отрезка через параметры* $\lambda_i = x_i(t_{i-1})$, $i = \overline{1,m}$ *и произведем замену* $u_i(t) = x_i(t) - \lambda_i$ *в интервалах* $[t_{i-1}, t_i)$. *Тогда рассматриваемая задача формально делится на две части, т. е. система линейных алгебраических уравнении, относительно введенных параметров и к задаче Коши для системы интегро-дифференциальных уравнении типа пантографа. Таким образом задача сводится в замкнутую систему для определения решения специальной задачи Коши для систем интегро–дифференциальных уравнении типа пантографа и систему линейных уравнении. На основе этого предлагается алгоритм определения решения исходной задачи.*

Ключевые слова: *пантограф, краевая задача, задача Коши, система линейных уравнении, алгоритм, интегро-дифференциальное уравнение, параметр, приближение.*

Кіріспе

Пантограф типтегі теңдеулер алғашқы рет 1940 жылы Mahler-дің [1] жұмысында кездеседі. Ол сығушы аргументтері бар, функционалдық–дифференциалдық теңдеулерді сандар теориясында қолданады.

1971 жылы J. Ockendon [2] турленген аргументті

$$y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$$

функционалдық-дифференциалдық теңдеулерді электровоздың тоқ қабылдағышының қозғалысын сипаттау үшін қолданған болатын.

Сурет 1. Троллейбус пантографы

1972 ж. жұмысында G R Morris, A Feldstein және E W Bowen [3]

$$y'(x) = -ay(\varepsilon x), \quad y(0) = 1$$

теңдеуінің шексіз көп нөлдері бар болатындығын және бұл нүктелерде бастапқы есептің шешімі жалғыз еместігін, немесе мүлдем болмайтындығын көрсеткен болатын.

Быковтың [4] жұмыстарында екінші ретті пантограф тектес теңдеулер зерттеліп, келесі жалпыланған экспоненталық, жалпыланған косинус және жалпыланған синус функциялар енгізілген болатын:

$$e_\varepsilon^t = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t^k}{k!}, \qquad \cos_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k-1)} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k+1)} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Быковтың жұмыстарында жалпыланған косинус және жалпыланған синус функциялары

$$y''(t) = \varepsilon y(\varepsilon^2 t)$$

теңдеуінің шешімі болатындығы көрсетілген.

A.Iserles және Yunkang Liu [5] жалпыланған гипергеометриялық функцияларды

$$y'(t) = ay(t) + \int_0^1 y(\varepsilon s)\,ds + \int_0^1 y'(\varepsilon s)\,ds, \quad t > 0,$$

$$y(t) + \int_0^1 y(\varepsilon s)\,ds + \int_0^1 y'(\varepsilon s)\,ds = 0, \quad t > 0,$$

түріндегі интегралдық–дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін анықтау үшін қолданған.

[6] Родионовтың жұмысында алгебралық структуралар мен арнайы көбейту амалын қолдану арқылы

$$f(x) * g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} f_i g_j \varepsilon^{ij} \frac{x^k}{k!},$$

пантограф типтес дифференциалдық және функционалды-дифференциалдық теңдеулердің шешімін анықтау жолдары келтірілген. Сонымен қатар, енгізілген амалға қатысты жалпыланған косинус және жалпыланған синус функцияларының қаситеттері көрсетілген. Мысалы,

$$\sin_\varepsilon(x) * \sin_\varepsilon(x) + \cos_\varepsilon(x) * \cos_\varepsilon(x) = 1.$$

Кейінгі кезде пантограф типіндегі теңдеулер кең қолданыс табуда. Мысалы бапталатын (пантограф) телефон құрылғысын ұстағыш, ұзартылатын (пантограф) микрофон құрылғысы және т.б.

Сурет 2. Бапталатын (пантограф) телефон құрылғысын ұстағыш, ұзартылатын (пантограф) микрофон құрылғысы

Нәтижелер мен талқылау

$[0,1]$ кесіндісінде пантограф типтегі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есеп қарастырамыз,

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(\varepsilon t) + \int_0^1 K(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad \varepsilon = \frac{1}{m} < 1, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(1) = d, \tag{2}$$

(1) теңдеуде $A(t)$ матрицасы мен $f(t)$ вектор-функциясы $[0,1]$ аралығында үзіліссіз, ал $K(t,s)$ өзегі сәйкесінше $[0,1]\times[0,1]$ аралығында үзіліссіз болсын. B, C - n өлшемді квадратты матрица, ал d - n өлшемді вектор.

Қарастырылып отырған есепті шешу үшін профессор Д.Джумабаевтың енгізген параметрлеу әдісі қолданылады [7]. Бастапқыда параметрлеу әдісі қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есептердің шешімін анықтау үшін қолданылған болатын. Кейін параметрлеу әдісі дифференциалдық және интегралдық–дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін әртүрлі шеттік есептерді шешуде қолданылған болатын [8-11].

Берілген есепті шешу үшін параметрлеу әдісін қолданайық, ол үшін қарастырылып отырған $[0,1]$ кесіндісін m аралықтарға бөлейік: $[0,1) = \bigcup_{i=1}^{m} [t_{i-1}, t_i),\ t_0 = 0,\ t_{i+1} = t_i + \frac{1}{m},\ i = \overline{1,m}.$ Осылай бөлуді жүзеге асырғанда $0 \le t < 1$ аралығында жатса, онда $0 \le \varepsilon t < \varepsilon$ аралығында жатады және $h = \frac{1}{m}$.

$x_i(t)$ - $x(t)$ функциясының әрбір $[t_{i-1}, t_i)$, $i = \overline{1,m}$ аралығына сығылуы болсын. Онда (1), (2) есебін келесі эквивалент есеппен ауыстыруымызға болады.

$$\frac{dx_i}{dt} = A(t)x_1(\varepsilon t) + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)x_j(s)ds + f(t),\ [t_{i-1}, t_i),\ i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

$$Bx_1(0) + C\lim_{t\to 1} x_m(t) = d, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to t_p-0} x_p(t) = x_{p+1}(t_p)\,,\ \ p=\overline{1,m-1}. \qquad (5)$$

λ_i арқылы $x_i(t)$ функциясының $t=t_{i-1}, i=\overline{1,m}$ нүктесіндегі мәнін белгілеп алайық, яғни $\lambda_i = x_i(t_{i-1}),\ i=\overline{1,m}$ және $[t_{i-1},t_i)$ аралығында $u_i(t)=x_i(t)-\lambda_i$ алмастыруын жасайық. Сонда,

$$\frac{du_i}{dt} = A(t)\left[u_1(\varepsilon t)+\lambda_1\right] + \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\left[u_j(t)+\lambda_j\right] + f(t)\,,\ i=\overline{1,m}\,, \qquad (6)$$

$$u_i\left[t_{i-1}\right]=0\,,\ \ i=\overline{1,m}\,, \qquad (7)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_m + C\lim_{t\to 1} u_m(t) = d\,, \qquad (8)$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to t_p-0} u_p(t) = \lambda_{p+1},\ \ p=\overline{1,m-1}\,. \qquad (9)$$

Сонда (3)–(5) есебін формальді түрде екі есепке бөлеміз, яғни $u_i(t)$ функциясын анықтау үшін (6), (7) пантораф типтес интегралдық–дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі мен енгізілген λ_i параметрлерді анықтау үшін (8), (9) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі.

λ_i параметрінің мәндері белгілі деп есептесек, (6), (7) пантограф типтес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі шешімі келесі интегралдық теңдеулер жүйесімен анықталады:

$$u_i(t) = \int_{t_{i-1}}^{t} A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t} A(\tau)d\tau\cdot\lambda_1 + \int_{t_{i-1}}^{t}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau +$$

$$+\int_{t_{i-1}}^{t}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau\cdot\lambda_j + \int_{t_{i-1}}^{t} f(\tau)d\tau,\ \ t\in\left[t_{i-1},t_i\right),\ i=\overline{1,m}. \qquad (10)$$

Біртендеп жуықтау әдісімен келесі теореманы дәлелдеуге болады. Мұнда $\varepsilon = \dfrac{1}{m} < 1$ болғандықтан және $[0,1]$ аралығында $\|A(\varepsilon t)\| \le \|A(t)\| \le \alpha$ және сығушы оператордың қасиеттері қолданылады. Дәлелдеу өте ауқымды болғандықтан, мұнда келтірілмейді.

Теорема. Егер,

$$\delta_\varepsilon = e^{\alpha\varepsilon}\beta\varepsilon < 1$$

шарты орындалса, онда (6), (7) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебінің шешімі жалғыз. Мұнда $\|K(t,s)\| \le \beta$, α,β - тұрақтылар.

(10) интералдық теңдеулер жүйесінен $\lim\limits_{t\to t_i-0} u_i(t)$, $i=\overline{1,m}$ шектерді анықтайық және λ_i енгізілген параметрлерін анықтау үшін (8), (9) шеттік шарттарына қояйық, сонда енгізілген параметрлерге қатысты келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

$$B\lambda_1 + C\lambda_m + C\left(\int_{t_{m-1}}^{1} A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau + \int_{t_{m-1}}^{1} A(\tau)d\tau\cdot\lambda_1 + \int_{t_{m-1}}^{1}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_{m-1}}^{1}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau\cdot\lambda_j + \int_{t_{m-1}}^{1} f(\tau)d\tau\right) = d, \qquad (11)$$

$$\lambda_p + \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau + \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau)d\tau\cdot\lambda_1 + \int_{t_{p-1}}^{t_p}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau +$$

$$+ \int_{t_{p-1}}^{t_p}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau\cdot\lambda_j + \int_{t_{p-1}}^{t_p} f(\tau)d\tau = \lambda_{p+1}, \qquad p=\overline{1,m-1}. \qquad (12)$$

λ_i параметрлеріне қатысты өрнектерді теңдеулер жүйесінің сол жағына, ал қалған өрнектерді теңдеулер жүйесінің оң жағына шығарсақ, онда (11), (12) сызықтық теңдеулер жүйесін келесі түрде жазуға болады.

$$\left(B + C\int_{t_{m-1}}^{1} A(\tau)d\tau\right)\lambda_1 + C\int_{t_{m-1}}^{1}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau\cdot\lambda_j + C\lambda_m =$$

$$= d - C\int_{t_{m-1}}^{1} f(\tau)d\tau - C\int_{t_{m-1}}^{1} A(\tau)u_1(\varepsilon\tau)d\tau - C\int_{t_{m-1}}^{1}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau, \qquad (13)$$

$$\left(I + \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau)d\tau\right)\cdot\lambda_p + \int_{t_{p-1}}^{t_{p-1}}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)dsd\tau\cdot\lambda_j - \lambda_{p+1} = -\int_{t_{p-1}}^{t_p} f(\tau)d\tau - \int_{t_{p-1}}^{t_p} A(\tau)u_p(\tau)d\tau -$$

$$-\int_{t_{p-1}}^{t_p}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau,\ p=\overline{1,m-1}. \qquad (14)$$

(13), (14) теңдеулер жүйесінде λ_i қатысты матрицаны $Q_\varepsilon(h)$-деп белгілейік, ал оң жағындағы $f(t)$ өрнегіне сәйкес келетін интегралдарды $F_\varepsilon(h)$, ал $u_i(t)$ мүшелері бар интегралдарды $G_\varepsilon(u,h)$ - деп белгілейік, яғни,

$$F_\varepsilon^T(h) = \left(d - \int_{t_{m-1}}^{1} f(\tau)d\tau, \int_{t_0}^{t_1} f(\tau)d\tau, ..., \int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} f(\tau)d\tau\right)$$

$$G_\varepsilon^T(u,h) = \left(G_{\varepsilon,m}(u,h), G_{\varepsilon,1}(u,h), ..., G_{\varepsilon,m-1}(u,h)\right),$$

мұндағы, $G_{\varepsilon,i}(u,h) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\tau)u_1(\tau)d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t_i}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau,s)u_j(s)dsd\tau,\ i=\overline{1,m}$.

Сонда енгізілген λ_i параметрлеріне қатысты (13), (14) сызықтық теңдеулер жүйесін келесі түрде жазуға болады:

$$Q_\varepsilon(h)\lambda = -F_\varepsilon(h) - G_\varepsilon(u,h). \qquad (15)$$

Сонымен, $(\lambda, u[t])$ мәндері (10), (15) тұйық жүйесінен келесі алгоритм арқылы анықталады:

1-қадам. $Q_\varepsilon(h)$ матрицасының кері матрицасы бар деп есептеп, $Q_\varepsilon(h)\lambda = -F_\varepsilon(h)$ теңдеулер жүйесінен $\lambda^{(0)} = \left(\lambda_1^{(1)}, \ldots, \lambda_m^{(1)}\right) \in R^{nm}$ параметрлерінің 1-ші жуықталған мәнін анықтаймыз, яғни $\lambda^{(1)} = -\left[Q_\varepsilon(h)\right]^{-1} F_\varepsilon(h)$.

б) 1–ші жуықталған $\lambda_i^{(1)}$, $i = \overline{1,m}$ мәндерін (6) пантограф тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің оң жағына қоямыз және (7) шартты пайдаланып, арнайы Коши есебінің жуықталған шешімін анықтаймыз: $u^{(0)}[t] = \left(u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_m^{(0)}(t)\right)$.

Процесті жалғастыра отырып, k-шы қадамда $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$, $k = 0,1,\ldots$ жұптарының жүйесін анықтаймыз.

Осылайша анықталған $\tilde{\lambda} = \left(\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m\right) \in R^{nm}$, $\tilde{u}[t] = \left(\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \ldots, \tilde{u}_m(t)\right)$ элементтерінен құрылған $\left(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t]\right)$ жұбы (6)-(9) есебінің шешімі болса, онда табылған мәндерді $\tilde{x}(t) = \tilde{u}_r(t) + \tilde{\lambda}_r$, $\tilde{x}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} \tilde{u}_m(t) + \tilde{\lambda}_m$, $r = \overline{1,m}$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$ теңдіктеріне қойып, $\tilde{x}[t]$ (1), (2) есебінің жуықталған шешімін анықтауға болады.

Қорытынды

Бұл жұмыста параметрлеу әдісін қолдана отырып, пантограф типтес интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп зерттелген. Берілген есепке профессор Д.Джумабаевтың параметрлеу әдісі қолданылды. Жаңа айнымалылар енгізу арқылы бастапқы пантограф тектес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі алынды. Кіші аралықта Коши есебінің жалғыз шешімі болатындығы көрсетілді. Есептің жуық шешімін анықтау алгоритмі ұсынылды. Алынған нәтижелерді пантограф типіндегі дербес туындылы интегралдық–дифференциалдық теңдеулерді шешуде қолдануға болады.

Жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23488086) қаржыландыру аясында орындалған.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Mahler, K. (1940). On a special functional equation. *Journal of the London Mathematical Society*, *1*(2), 115-123. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-15.2.115
2. Fox, L., Mayers, D. F., Ockendon, J. R., & Tayler, A. B. (1971). On a functional differential equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, *8*(3), 271-307. https://doi.org/10.1093/imamat/8.3.271
3. Morris, G. R., Feldstein, A., & Bowen, E. W. (1972). The Phragmén-Lindelöf principle and a class of functional differential equations. In *Ordinary differential equations* (pp. 513-540). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-743650-0.50048-4
4. Bykov Ya.V., Bykova L.Ya., Shevtsov E.I. (1973). Sufficient conditions for the oscillatory nature of solutions of nonlinear differential equations with deviating argument . *Differents. Equations, 9(9),* 1555–1560.
5. Iserles, A., & Liu, Y. (1997). Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, *208*(2), 404-424. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5322

6. Rodionov, V. I. (2013). Analog of the cauchy function for a generalized equation with several deviations of the argument. *Differential Equations*, *49*, 662-679. https://doi.org/10.1134/S0012266113060025
7. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational mathematics and mathematical Physics*, *29*(1), 34-46. https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-4
8. Dzhumabayev, D. S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *USSR Computational mathematics and mathematical Physics*, *29*(1), 34-46. https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-4
9. Dzhumabaev, D. (2018). Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *41*(4), 1439-1462. https://doi.org/10.1002/mma.4674
10. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021, July). Unique solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution. In *American Institute of Physics Conference Series* (Vol. 2365, No. 1, p. 070012). https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/2021AIPC.2365g0012N/doi:10.1063/5.0057302
11. Nazarova, K., & Usmanov, K. (2021). On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution. *International Journal of Applied Mathematics*, *34*(2), 225. https://doi.org/10.12732/ijam.v34i2.1

Авторлар туралы мәліметтер

№	Аты-жөні, ғылыми дәрежесі, жұмыс немесе оқу орны, қала, ел, корреспондент автордың e-mail мекенжайы, ұялы телефон нөмірі
1	**Усманов Кайрат Идрисович** – доцент, физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz, ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
	Usmanov Kairat Idrisovich – docent, candidate of Physics and Mathematics, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz, ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
	Усманов Кайрат Идрисович – доцент, кандидат физика-математических наук, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz , ORCID: 0000-0002-4311-5807, +7 778 646 77 65
2	**Мамидова Малика Таирқызы** –магистр, Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан, e-mail: malikamamidova@gmail.com , +7 747 515 0802
	Mamidova Malika Tairovna– master, Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan, malikamamidova@gmail.com, +7 747 515 0802
	Мамидова Малика Таировна – магистр, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан, e-mail: malikamamidova@gmail.com , +7 747 515 0802