МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4
МРНТИ 27.31.44
https://doi.org/10.47526/2024-4/2524-0080.12

Шарафидинов Д.Д.[1] , Турметов Б.Х.[2]
[1]*магистрант, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, Туркестан г.),e-mail:* dimabekeev@mail.ru
[2]*доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, Туркестан г.),* e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ON THE SOLVABILITY OF CERTAIN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A NONLOCAL HYPERBOLIC EQUATION
БЕЙЛОКАЛ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕЙБІР БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аннотация. *В настоящей работе исследуются вопросы корректных постановок начально-краевых задач для нелокального аналога гиперболического уравнения. В эллиптической части рассматриваемых уравнений участвует нелокальный аналог оператора Лапласа. Мы находим собственные функции и собственные значения краевых задач для нелокального аналога оператора Лапласа. Представляем собственные функции этих задач в виде суммы четной и нечетной части относительно рассматриваемого отображения. Исследуются свойства симметричности собственные функции краевых задач с условием Дирихле и Неймана. Эти свойства в дальнейшем используются при получении представлений решений основных задач. Рассматриваемые нами уравнения входят в класс дифференциальных уравнений с преобразованными аргументами. Задачи рассматриваются в* $n+1$ *- мерной цилиндрической области с основанием шар. В граничных условиях задаются условие Дирихле и Неймана. Задачи решаются сведением их к эквивалентным задачам для классического гиперболического уравнения. Используя известные утверждения для начально-краевых задач для классического гиперболического уравнения доказаны теоремы о существовании и единственности решения. Показано, что корректность рассматриваемых задач существенно зависит от коэффициентов участвующих в определении нелокального оператора Лапласа. Решения рассматриваемых задач построены в виде ряда.*

Ключевые слова: *инволюция, нелокальный оператор, гиперболическое уравнение, начально-краевая задача, существование, единственность, условие Дирихле, условие Неймана.*

Abstract. *This paper investigates the well-posedness of initial-boundary value problems for a nonlocal analogue of the hyperbolic equation. The elliptic part of the considered equations involves a nonlocal analogue of the Laplace operator. We find the eigenfunctions and eigenvalues of boundary value problems for a nonlocal analogue of the Laplace operator. The eigenfunctions of the problems are represented as even and odd parts with respect to the considered mapping. The symmetry properties of the eigenfunctions of boundary value problems with Dirichlet and Neumann conditions are investigated. These properties are further applied in obtaining solutions to the main problems. The equations we consider fall into the class of differential equations with transformed arguments. The problems are considered in an* $n+1$*-dimensional cylindrical domain with a spherical base. The boundary conditions include Dirichlet and Neumann conditions. The problems are solved by reducing them to equivalent problems for the classical hyperbolic equation. Using known results for initial-boundary value problems for the classical hyperbolic equation, theorems on the existence and uniqueness of solutions are proved. It is shown that the well-posedness of the problems under consideration significantly depends on the coefficients involved in defining the nonlocal Laplace operator. The solutions of the problems are constructed as a series.*

Keywords: *involution, nonlocal operator, hyperbolic equation, initial-boundary value problem, existence, uniqueness, Dirichlet condition, Neumann condition.*

Аңдатпа. *Бұл жұмыста біз гиперболалық теңдеудің бейлокал аналогы үшін бастапқы-шеттік есептерді қисынды қойылу мәселелері зерттеледі. Қарастырылып отырған теңдеулердің эллипстік бөлігінде Лаплас операторының бейлокал аналогы қатысады. Біз Лаплас операторының бейлокал аналогы үшін шеттік есептердің меншікті функциялары және меншікті мәндерін табамыз. Бұл есептердің меншікті функцияларын қарастырылып жатқан түрлендірулерге қатысты жұп және тақ бөліктерінің қосындысы* *түрінде өрнектейміз. Дирихле және Нейман шарттарымен берілген шеттік есептердің меншікті функцияларының симметриялық қасиеттері зерттеледі. Бұл қасиеттер алдағы уақытта негізгі есептердің шешімдерін алу үшін қолданылады. Біз қарастыратын теңдеулер түрлендірілген аргументтері бар дифференциалдық теңдеулер класына жатады. Есептер негізі шар болған* $n+1$ *өлшемді цилиндрлік аймақта қарастырылады. Шекаралық шарттарда Дирихле және Нейман шарттары беріледі. Есептер оларды классикалық гиперболалық теңдеу үшін эквивалент есептерге келтіру арқылы шешіледі . Классикалық гиперболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептерге белгілі нәтижелерді пайдалана отырып, шешімнің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденді. Қарастырылып отырған есептердің қисындылығы бейлокал Лаплас операторын анықтауға қатысатын коэффициенттерге айтарлықтай тәуелді екені көрсетілген. Қарастырылып отырған есептердің шешімдері қатар түрінде құрылады.*

Негізгі сөздер: *инволюция, бейлокал оператор, гиперболалық теңдеу, бастапқы- шеттік есеп, бар болу, жалғыз болуы, Дирихле шарты, Нейман шарты.*

Введение

Настоящая работа посвящена к исследованию корректных постановок начально-краевых задач для уравнений с преобразованными аргументами. В уравнениях рассматриваемые нами преобразование аргументов осуществляются при помощи отображений типа инволюции. Следует отметит, что одним из первых опубликованных работ для уравнений с инволютивными преобразованиями является работа Т.Карлемана [1], где изучены уравнения со сдвигами аргументов вида $\alpha = \alpha(t), \alpha^2(t) = t$. Начально-краевые задачи для нелокальных аналогов параболических уравнений исследованы в работах [2-8], а краевые задачи для нелокальных эллиптических уравнений изучались в работах [9-11]. В работах [12,13] для нелокальных гиперболических уравнений в одномерном случае изучены задачи, которые по постановке являются близкими к нашим исследованиям.

Переходим к постановке задач, которые будем исследовать в настоящей работе. Пусть Q_T цилиндрическая область $Q_T = (0,T)\times\Omega$, где Ω единичный шар в $R^n, n \geq 2,$ $\partial\Omega$ - единичная сфера. Далее, пусть S - ортогональная матрица: $S\cdot S^T = E$ и $S^2 = E$, где E единичная матрица. Примером такой матрицы является матрица отображения $Sx = -x$.

Рассмотрим в области Q_T следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2} - a_0\Delta z(t,x) - a_1\Delta z(t,Sx) = h(t,x), (t,x)\in Q_T, \tag{1}$$

$$z(0,x) = \tau(x), z_t(0,x) = \rho(x), x\in\bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$z(t,x) = 0, [0,T]\times\partial\Omega, \tag{3}$$

где a_0, a_1 - некоторые действительные числа, $h(t,x), \tau(x)$ и $\rho(x)$ заданные функции.

Классическим решением задачи (1) - (3) назовем функцию $z(t,x)$ из класса $C_{t,x}^{2,2}\left(Q_T\right)\cap C_{t,x}^{1,0}\left(\bar{Q}_T\right)$ и удовлетворяющую условиям (1) - (3) в обычном смысле.

Наряду с этой задачей мы будем исследовать также начально-краевую задачу с условиями (1),(2) и граничным условием Неймана

$$\partial_\nu z(t,x) = 0, [0,T]\times\partial\Omega, \tag{4}$$

где $\partial_\nu = \dfrac{\partial}{\partial\nu}$ - производная по направлению вектора нормали к сфере $\partial\Omega$.

В этом случае решение будем искать в классе функции $z(t,x)\in C_{t,x}^{2,2}\left(Q_T\right)\cap C_{t,x}^{1,1}\left(\bar{Q}_T\right)$.

Цель исследования: Целью настоящей работы является установление корректности рассматриваемых задач. Доказательства теорем о существования и единственности решения задач с условиями (1)-(3) и (1),(2) и (4).

Методы исследования задачи

В этом пункте мы исследуем начально-краевую задачу с условием Дирихле. Сначала приведем известное утверждение для классического случая, т.е. когда $a_0 \neq 0, a_1 = 0$. Будем считать $a_0 > 0$ и перепишем уравнение (1) в следующем виде

$$\Delta z(t,x) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2} = -f(t,x), (t,x) \in Q_T, \qquad (5)$$

где $a = \sqrt{a_0}$, $f(t,x) = \frac{1}{a^2}h(t,x)$.

В работе В.А.Ильина [13] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть функции $\tau(x), \rho(x)$ и $f(t,x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) функция $\tau(x)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ и обладает в этой области непрерывными производными до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ и интегрируемыми с квадратом производными порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+3$. Кроме того,

$$\tau(x) = \Delta\tau(x) = ... = \Delta^k \tau(x) = 0, k = \left[\frac{n+4}{4}\right];$$

2) функция $\rho(x)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ и обладает в этой области непрерывными производными до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ и интегрируемыми с квадратом производными порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$. Кроме того,

$$\rho(x) = \Delta\rho(x) = ... = \Delta^k \rho(x) = 0, k = \left[\frac{n+2}{4}\right];$$

3) функция $f(t,x)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T = [0,T]\times\bar{\Omega}$ и обладает в этом цилиндре непрерывными производными до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ и интегрируемыми с квадратом производными порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$. Кроме того,

$$f(t,x) = \Delta f(t,x) = ... = \Delta^k f(t,x) = 0, k = \left[\frac{n+2}{4}\right].$$

Тогда решение задачи с условиями (5),(2),(3) существует, единственно и представлятся в виде

$$z(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\tau_m \cos a\sqrt{\mu_m}t + \frac{\rho_m}{a\sqrt{\mu_m}}\sin a\sqrt{\mu_m}t\right\} z_{m,D}(x) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{a}{\sqrt{\mu_m}}\int_0^t f_m(s)\sin a\sqrt{\mu_m}(t-s)ds\right\}z_{m,D}(x).$$

Здесь $z_{m,D}(x)$ - нормированные собственные функции следующей задачи Дирихле

$$\Delta z(x)+\mu z(x)=0, x\in\Omega, z(x)=0, x\in\partial\Omega, \qquad (6)$$

а τ_m, ρ_m и $f_m(t)$ коэффициенты Фурье в разложении функций $\tau(x), \rho(x)$ и $f(t,x)$ по системе $z_{m,D}(x)$.

Далее, на основе утверждение этой леммы построим решение задачи (1) - (2). Если в уравнении (1) меняем точку x на Sx, то получаем следующую систему

$$\begin{cases} z_t(t,x)-a_0\Delta z(t,x)-a_1\Delta z(t,Sx)=h(t,x) \\ z_t(t,Sx)-a_1\Delta z(t,x)-a_0\Delta z(t,Sx)=h(t,Sx) \end{cases}. \qquad (7)$$

Введем обозначения

$$w_0(t,x)=z(t,x)+z(t,Sx), w_1(t,x)=z(t,x)-z(t,Sx),$$

$$h_0(t,x)=h(t,x)+h(t,Sx), h_1(t,x)=h(t,x)-h(t,Sx).$$

Пусть $\partial_t=\frac{\partial}{\partial t}$. Используя данные системы (7) имеем

$$h_0(t,x)\equiv h(t,x)+h(t,Sx)=$$

$$=z_t(t,x)-a_0\Delta z(t,x)-a_1\Delta z(t,Sx)+z_t(t,Sx)-a_1\Delta z(t,x)-a_0\Delta z(t,Sx)=$$

$$=\partial_t\left[z(t,x)+z(t,Sx)\right]-\Delta\left[a_0 z(t,x)+a_1 z(t,x)\right]-\Delta\left[a_1 z(t,Sx)+a_0 z(t,Sx)\right]=$$

$$=\partial_t\left[z(t,x)+z(t,Sx)\right]-\left(a_0+a_1\right)\Delta\left[z(t,x)+z(t,x)\right]=\partial_t w_0(t,x)-\left(a_0+a_1\right)\Delta w_0(t,x).$$

Таким образом, для функции $w_0(t,x)$ получаем уравнение

$$\partial_t w_0(t,x)-\left(a_0+a_1\right)\Delta w_0(t,x)=h_0(t,x).$$

Аналогично, для функции $w_1(t,x)$ имеем

$$h_1(t,x)\equiv h(t,x)-h(t,Sx)=$$

$$=z_t(t,x)-a_0\Delta z(t,x)-a_1\Delta z(t,Sx)-\left[z_t(t,Sx)-a_1\Delta z(t,x)-a_0\Delta z(t,Sx)\right]=$$

$$=\partial_t\left[z(t,x)-z(t,Sx)\right]-a_0\Delta\left[z(t,x)-z(t,Sx)\right]-a_1\Delta\left[z(t,Sx)-z(t,x)\right]=$$

$$=\partial_t\left[z(t,x)+z(t,Sx)\right]-\left(a_0-a_1\right)\Delta\left[z(t,x)-z(t,Sx)\right]=\partial_t w_1(t,x)-\left(a_0-a_1\right)\Delta w_1(t,x).$$

Следовательно,

$$\partial_t w_1(t,x)-\left(a_0-a_1\right)\Delta w_1(t,x)=h_1(t,x).$$

Далее, из условий (2) и (3) для функций $w_j(t,x),\ j=0,1$ получаем

$$w_0(0,x)=z(0,x)+z(0,Sx)=\tau(x)+\tau(Sx)\equiv\tau_0(x),$$

$$\partial_t w_0(0,x)=\partial_t z(0,x)+\partial_t z(0,Sx)=\rho(x)+\rho(Sx)\equiv\rho_0(x),$$

$$w_1(0,x)=z(0,x)-z(0,Sx)=\tau(x)-\tau(Sx)\equiv\tau_1(x),$$

$$\partial_t w_1(0,x)=\partial_t z(0,x)+\partial_t z(0,Sx)=\rho(x)+\rho(Sx)\equiv\rho_1(x),$$

$$w_0(t,x)\big|_{\partial\Omega}=z(t,x)\big|_{\partial\Omega}+z(t,Sx)\big|_{\partial\Omega}=0+0=0, w_1(t,x)\big|_{\partial\Omega}=z(t,x)\big|_{\partial\Omega}-z(t,Sx)\big|_{\partial\Omega}=0.$$

Таким образом, для функций $w_j(t,x),\ j=0,1$ мы получили следующие начально-краевые задачи

$$\Delta w_j(t,x)-\frac{1}{\varepsilon_j}\frac{\partial^2 w_j(t,x)}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_j}h_j(t,x),(t,x)\in Q_T, \qquad (8)$$

$$w_j(0,x)=\tau_j(x),\partial_t w_j(0,x)=\rho_j(x),x\in\bar{\Omega}, \qquad (9)$$

$$w_j(t,x)=0,[0,T]\times\partial\Omega, \qquad (10)$$

где $\varepsilon_0=a_0+a_1,\varepsilon_1=a_0-a_1$. Будем считать $\varepsilon_j>0,\ j=0,1$.

Находим решения задач (8)-(10). Для этого воспользуемся утверждением Леммы 1. Если функции $\tau_j(x),\rho_j(x)$ и $f_j(t,x)\equiv\frac{1}{\varepsilon_j}h_j(t,x),\ j=0,1$ удовлетворяют условиям Леммы 1, то решение задач (8)-(10) существует, единственно и представляются в виде

$$w_j(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\tau_{j,m}\cos\sqrt{\varepsilon_j\mu_{j,m}}t+\frac{\rho_{j,m}}{\sqrt{\varepsilon_j\mu_{j,m}}}\sin\sqrt{\varepsilon_j\mu_{j,m}}t\right\}z_{m,D}(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{\varepsilon_j\mu_{j,m}}}\int_0^t h_{j,m}(s)\sin\sqrt{\varepsilon_j\mu_{j,m}}(t-s)ds\right\}z_{m,D}(x) \qquad (11)$$

Далее, исследуем некоторые свойства функции $w_j(t,x)$. В работе [14] доказано, что все собственные функции задачи Дирихле (6) обладают одним из свойств симметричности: $z_{m,D}(x)=z_{m,D}(Sx)$ или $z_{m,D}(x)=-z_{m,D}(Sx), x\in\Omega$. Используя эти свойства заново перенумеруем собственные функции $z_{m,D}(x)$. Будем считать, что четными номерами пронумерованы собственные функции, обладающие свойствами $z_{m,D}(x)=z_{m,D}(Sx)$. Соответственно, нечетными номерами будут пронумерованы собственные функции, обладающие свойствами $z_{m,D}(x)=-z_{m,D}(Sx)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Функции $w_j(t,x),\ j=0,1$ обладают следующими свойствами:

1) $w_0(t,x)=w_0(t,Sx)$ и для коэффициентов $\tau_{0,m},\rho_{0,m},h_{0,m}(t)$ справедливы равенства

$$\tau_{0,m}=\begin{cases}0, m=2k-1\\ 2(\tau,z_{2k})\equiv 2\tau_{2k}, m=2k\end{cases}, \rho_{0,m}=\begin{cases}0, m=2k-1\\ 2(\rho,z_{2k})\equiv 2\rho_{2k}, m=2k\end{cases},$$

$$h_{0,m}(t)=\begin{cases}0, m=2k-1\\ 2(h,z_{2k})\equiv 2h_{2k}(t), m=2k\end{cases};$$

2) $w_1(t,x)=-w_1(t,Sx)$ и для коэффициентов $\tau_{1,m},\rho_{1,m},h_{1,m}(t)$ справедливы равенства

$$\tau_{1,m}=\begin{cases}0, m=2k\\ 2(\tau,z_{2k-1})\equiv 2\tau_{2k-1}, m=2k-1\end{cases}, \rho_{1,m}=\begin{cases}0, m=2k\\ 2(\rho,z_{2k-1})\equiv 2\rho_{2k-1}, m=2k-1\end{cases},$$

$$h_{1,m}(t)=\begin{cases}0, m=2k\\ 2(h,z_{2k-1})\equiv 2h_{2k-1}(t), m=2k-1\end{cases}.$$

Доказательство. Из представления функции $\tau_0(x)$ для коэффициентов $\tau_{0,2m}$ имеем

$$\tau_{0,2m}=\left(\tau_0,z_{2m,D}\right)\equiv\int_\Omega \tau_0(x)z_{2m,D}(x)dx=\int_\Omega\left[\tau(x)+\tau(Sx)\right]z_{2m,D}(x)dx=$$

$$=\int_\Omega \tau(x)\left[z_{2m,D}(x)+z_{2m,D}(Sx)\right]dx=2\int_\Omega \tau(x)z_{2m,D}(x)dx=2\left(\tau,z_{2m,D}\right)=2\tau_{2m}.$$

Для коэффициентов с нечетными индексами получаем

$$\tau_{0,2m-1}=\left(\tau_0,z_{2m-1,D}\right)\equiv\int_\Omega \tau_0(x)z_{2m-1,D}(x)dx=\int_\Omega\left[\tau(x)+\tau(Sx)\right]z_{2m-1,D}(x)dx=$$

$$=\int_\Omega \tau(x)\left[z_{2m-1,D}(x)+z_{2m-1,D}(Sx)\right]dx=\int_\Omega \tau(x)\left[z_{2m-1,D}(x)-z_{2m-1,D}(x)\right]dx=0.$$

Свойства коэффициентов $\rho_{0,m}, h_{0,m}(t)$ доказываются аналогичным образом. Далее, используя эти свойства коэффициентов, а также из свойства $z_{2m,D}(x) = z_{2m,D}(Sx)$ собственных функций для функции $w_0(t,x)$ имеем

$$w_0(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tau_{0,2m} \cos \sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}}\, t + \frac{\rho_{0,2m}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}}} \sin \sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}}\, t \right\} z_{2m,D}(x) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}}} \int_0^t h_{0,2m}(s) \sin \sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}} (t-s) ds \right\} z_{2m,D}(x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tau_{0,2m} \cos \sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}}\, t + \frac{\rho_{0,2m}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}}} \sin \sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}}\, t \right\} z_{2m,D}(Sx) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}}} \int_0^t h_{0,2m}(s) \sin \sqrt{\varepsilon_0 \mu_{0,2m}} (t-s) ds \right\} z_{2m,D}(Sx) = w(t,Sx).$$

Свойства пункта 1) доказаны.

Далее, из представления функции $\tau_1(x)$ для коэффициентов $\tau_{1,m}$ получаем

$$\tau_{1,m} = \left(\tau_1, z_{m,D}\right) \equiv \int_{\Omega} \tau_1(x) z_{m,D}(x) dx = \int_{\Omega} \left[\tau(x) - \tau(Sx)\right] z_{m,D}(x) dx =$$

$$= \int_{\Omega} \tau(x) \left[z_{m,D}(x) + z_{m,D}(Sx) \right] dx.$$

Отсюда, если $m = 2k$, то из равенства $z_{2m,D}(x) = z_{2m,D}(Sx)$ следует $\tau_{1,2m} = 0$, а из равенства $z_{2m-1,D}(x) = -z_{2m-1,D}(Sx)$ получаем $\tau_{1,2m-1} = 2(\tau, z_{2m-1}) \equiv 2\tau_{2m-1}$. Остальные свойства функции $w_1(t,x)$ как в пункте 1). Лемма доказана.

Из утверждений этой леммы получаем следующее

Следствие 1. Решения задач (8)-(10) можно представить в виде

$$w_0(t,x) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tau_{2m} \cos \sqrt{\varepsilon_0 \mu_{2m}}\, t + \frac{\rho_{2m}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_{2m}}} \sin \sqrt{\varepsilon_0 \mu_{2m}}\, t \right\} z_{2m,D}(x) +$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_{2m}}} \int_0^t h_{2m}(s) \sin \sqrt{\varepsilon_0 \mu_{2m}} (t-s) ds \right\} z_{2m,D}(x), \tag{12}$$

$$w_1(t,x) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tau_{2m-1} \cos \sqrt{\varepsilon_1 \mu_{2m-1}}\, t + \frac{\rho_{2m-1}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_{2m-1}}} \sin \sqrt{\varepsilon_1 \mu_{2m-1}}\, t \right\} z_{2m-1,D}(x) +$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_{2m-1}}}\int_0^t h_{2m-1}(s)\sin\sqrt{\varepsilon_1\mu_{2m-1}}(t-s)ds\right\}z_{2m-1,D}(x). \qquad (13)$$

Анализ и основные результаты

Далее, докажем обратное утверждение. А именно, если функции $w_0(t,x)$ и $w_1(t,x)$ являются решениями задач (8)-(10), то функция

$$z(t,x)=\frac{1}{2}\left[w_0(t,x)+w_1(t,x)\right] \qquad (14)$$

будет решением задачи (1)-(3). Действительно, пусть функции $w_0(t,x)$ и $w_1(t,x)$ являются решениями задач (8)-(10). Из свойств симметричности функций $w_0(t,x)$ и $w_1(t,x)$ имеем $\Delta w_0(t,x)=\Delta w_0(t,Sx), \Delta w_1(t,x)=-\Delta w_1(t,Sx)$. Тогда для функции $z(t,x)$ из равенства (14) получаем

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}-a_0\Delta z(t,x)-a_1\Delta z(t,Sx)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 w_0(t,x)}{\partial t^2}-a_0\Delta w_0(t,x)-a_1\Delta w_0(t,x)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 w_1(t,x)}{\partial t^2}-a_0\Delta w_1(t,x)-a_1\Delta w_1(t,x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 w_0(t,x)}{\partial t^2}-\left(a_0+a_1\right)\Delta w_0(t,x)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 w_1(t,x)}{\partial t^2}-\left(a_0-a_1\right)\Delta w_1(t,x)\right]=$$

$$=-\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\Delta w_0(t,x)-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2 w_0(t,x)}{\partial t^2}\right]-\frac{\varepsilon_1}{2}\left[\Delta w_1(t,x)-\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 w_1(t,x)}{\partial t^2}\right]=$$

$$=-\frac{\varepsilon_0}{2}\left(-\frac{1}{\varepsilon_0}h_0(t,x)\right)-\frac{\varepsilon_1}{2}\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}h_1(t,x)\right)=\frac{1}{2}h_0(t,x)+\frac{1}{2}h_1(t,x)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[h(t,x)+h(t,Sx)+h(t,x)-h(t,Sx)\right]=h(t,x).$$

Следовательно, функция $z(t,x)$ из равенства (14) удовлетворяет уравнению (1). Далее, из начальних условий (9) следует

$$z(0,x)=\frac{1}{2}\left[w_0(0,x)+w_1(0,x)\right]=\frac{1}{2}\left[\tau_0(x)+\tau_1(x)\right]=\tau(x),$$

$$z_t(0,x)=\frac{1}{2}\left[\partial_t w_0(0,x)+\partial_t w_1(0,x)\right]=\frac{1}{2}\left[\rho_0(x)+\rho_1(x)\right]=\rho(x).$$

И наконец, используя условия (10) получаем

$$z(t,x)\big|_{[0,T]\times\partial\Omega}=\frac{1}{2}\left[w_0(t,x)+w_1(t,x)\right]\Big|_{[0,T]\times\partial\Omega}=0\,.$$

Таким образом, функция $z(t,x)$ из равенства (14) удовлетворяет всем условиям задачи (1)-(3).

Далее, подставляя представление функции $w_0(t,x)$ из (12) и функции $w_1(t,x)$ из (13) в равенство (14) получаем окончательное представление решения задачи (1) - (3).

$$z(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\tau_{2m}\cos\sqrt{(a_0+a_1)\mu_{2m}}t+\frac{\rho_{2m}}{\sqrt{(a_0+a_1)\mu_{2m}}}\sin\sqrt{(a_0+a_1)\mu_{2m}}t\right\}z_{2m,D}(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\tau_{2m-1}\cos\sqrt{(a_0-a_1)\mu_{2m-1}}t+\frac{\rho_{2m-1}}{\sqrt{(a_0-a_1)\mu_{2m-1}}}\sin\sqrt{(a_0-a_1)\mu_{2m-1}}t\right\}z_{2m-1,D}(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{\mu_{2m}}}\int_0^t h_{2m}(s)\sin\sqrt{(a_0+a_1)\mu_{2m}}(t-s)ds\right\}z_{2m,D}(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{\mu_{2m-1}}}\int_0^t h_{2m-1}(s)\sin\sqrt{(a_0-a_1)\mu_{2m-1}}(t-s)ds\right\}z_{2m-1,D}(x)\,. \qquad (15)$$

Таким образом, относительно задачи (1) - (3) доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $a_0\pm a_1>0$, функции $\tau(x),\rho(x)$ и $h(t,x)$ удовлетворяют условиям Леммы 1. Тогда решение задачи (1) - (3) существует, единственно и представляется в виде (15).

Основные результаты отностительно начально-краевой задачи с граничным условием Неймана

В этом пункте мы исследуем начально-краевую задачу с граничным условием Неймана, т.е. рассматривается задача с условиями (1),(2),(4). Для удобства эту задачу назовем задачей N. Сначала, как и в случае задачи с условием Дирихле для уравнения (5) рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу с начальными условиями (2) и краевым условием.

$$\partial_\nu z(t,x)=0,[0,T]\times\partial\Omega \qquad (16)$$

Приведем аналог Леммы 1 для задачи с условием Неймана. В указанной выше работе В.А.Ильина [13] доказано следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть функции $\tau(x),\rho(x)$ и $f(t,x)$ удовлетворяют следующим условиям:
1) функция $\tau(x)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ и обладает в этой области непрерывными производными до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ и интегрируемыми с квадратом производными порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+3$. Кроме того,

$$\tau(x)=\Delta\tau(x)=...=\Delta^k\tau(x)=0, k=\left[\frac{n+2}{4}\right];$$

2) функция $\rho(x)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ и обладает в этой области непрерывными производными до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ и интегрируемыми с квадратом производными порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$. Кроме того,

$$\rho(x)=\Delta\rho(x)=...=\Delta^k\rho(x)=0, k=\left[\frac{n}{4}\right];$$

3) функция $f(t,x)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T=[0,T]\times\bar{\Omega}$ и обладает в этом цилиндре непрерывными производными до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ и интегрируемыми с квадратом производными порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$. Кроме того,

$$f(t,x)=\Delta f(t,x)=...=\Delta^k f(t,x)=0, k=\left[\frac{n}{4}\right].$$

Тогда решение задачи с условиями (5),(2),(4) существует, единственно и представлятся в виде

$$z(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\tau_m\cos a\sqrt{\mu_m}t+\frac{\rho_m}{a\sqrt{\mu_m}}\sin a\sqrt{\mu_m}t\right\}z_{m,N}(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{a}{\sqrt{\mu_m}}\int_0^t f_m(s)\sin a\sqrt{\mu_m}(t-s)ds\right\}z_{m,N}(x).$$

Здесь $z_{m,N}(x)$ - нормированные собственные функции задачи Неймана

$$\Delta z(x)+\mu z(x)=0, x\in\Omega, \partial_\nu z(x)=0, x\in\partial\Omega, \qquad (17)$$

а τ_m,ρ_m и $f_m(t)$ коэффициенты Фурье в разложении функций $\tau(x),\rho(x)$ и $f(t,x)$ по системе $z_{m,N}(x)$.

Проделав те же вычисления, как и в случае задачи с условием Дирихле доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $a_0\pm a_1>0$, функции $\tau(x),\rho(x)$ и $h(t,x)$ удовлетворяют условиям Леммы 3. Тогда решение задачи N существует, единственно и представляется в виде

$$z(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\tau_{2m}\cos\sqrt{(a_0+a_1)\mu_{2m}}t+\frac{\rho_{2m}}{\sqrt{(a_0+a_1)\mu_{2m}}}\sin\sqrt{(a_0+a_1)\mu_{2m}}t\right\}z_{2m,N}(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\tau_{2m-1}\cos\sqrt{(a_0-a_1)\mu_{2m-1}}t+\frac{\rho_{2m-1}}{\sqrt{(a_0-a_1)\mu_{2m-1}}}\sin\sqrt{(a_0-a_1)\mu_{2m-1}}t\right\}z_{2m-1,N}(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{\mu_{2m}}}\int_0^t h_{2m}(s)\sin\sqrt{(a_0+a_1)\mu_{2m}}(t-s)ds\right\}z_{2m,N}(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{\mu_{2m-1}}}\int_0^t h_{2m-1}(s)\sin\sqrt{(a_0-a_1)\mu_{2m-1}}(t-s)ds\right\}z_{2m-1,N}(x).$$

Заключение

В работе изучены начально-краевые задачи для новых классов дифференциальных уравнений в частных производных. Показаны корректность рассматриваемых задач. При доказательстве единственности и существования решения использованы свойства инволютивных отображений.

В дальнейшем предполагается исследования аналогичных задач для нелокальных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP19677926).

Список использованной литературы

1. Ahmad, B., Alsaedi, A., Kirane, M., & Tapdigoglu, R. G. (2017). An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation. *Quaestiones Mathematicae, 40*(2), 151-160. https://doi.org/10.2989/16073606.2017.1283370
2. Ilyas, A., Malik, S. A., & Saif, S. (2021). Inverse problems for a multi-term time fractional evolution equation with an involution. *Inverse Problems in Science and Engineering, 29*(13), 3377-3405. https://doi.org/10.1080/17415977.2021.2000606
3. Kirane, M., & Sarsenbi, A. A. (2023). Solvability of mixed problems for a fourth-order equation with involution and fractional derivative. *Fractal and Fractional*, *7*(2), 131. https://doi.org/10.3390/fractalfract702013
4. Mussirepova, E., Sarsenbi, A., & Sarsenbi, A. (2022). The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient. *Boundary Value Problems, 2022*(1), 99. https://doi.org/10.1186/s13661-022-01675-1
5. Mussirepova, E., Sarsenbi, A. A., & Sarsenbi, A. M. (2022). Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45*(17), 11262-11271. https://doi.org/10.1002/mma.8448
6. Muratbekova, M., Kadirkulov, B., Koshanova, M., & Turmetov, B. (2023). On Solvability of Some Inverse Problems for a Fractional Parabolic Equation with a Nonlocal Biharmonic Operator. *Fractal and Fractional, 7*(5), 404. https://doi.org/10.3390/fractalfract7050404
7. Turmetov, B., & Karachik, V. (2024). On solvability of some inverse problems for a nonlocal fourth-order parabolic equation with multiple involution. *AIMS Mathematics, 9*(3), 6832-6849. https://doi.org/10.3934/math.2024333
8. Karachik, V., Sarsenbi, A., & Turmetov, B. (2019). On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation. *Turkish journal of mathematics, 43*(3), 1604-1625.
9. Karachik, V. V., & Kh, T. B. (2020). Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation. *Novi sad journal of mathematics, 50(1),* 67-88. https://doi.org/ 10.30755/NSJOM.08942
10. Yarka, U., Fedushko, S., & Veselý, P. (2020). The Dirichlet problem for the perturbed elliptic equation. *Mathematics, 8*(12), 2108. https://doi.org /10.3390/math8122108
11. Kirane, M., & Al-Salti, N. (2016). Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation. *Journal of Nonlinear Science and Applications, 9,* 1243-1251. http://dx.doi.org / 10.22436 /jnsa. 009.03.49
12. Tapdigoglu, R., & Torebek, B. T. (2018). Inverse source problems for a wave equation with involution. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series,* 9175-82.

13. Ильин, В. А. (1957). К вопросу об обосновании метода Фурье для уравнения колебаний. *Успехи математических наук*, *12*(4 (76)), 289-296.
14. Sadybekov, M. A., & Turmetov, B. K. (2012). On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball. *Eurasian Mathematical Journal*, *3*(1), 143-146.

References

1. Ahmad, B., Alsaedi, A., Kirane, M., & Tapdigoglu, R. G. (2017). An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation. *Quaestiones Mathematicae*, *40*(2), 151-160. https://doi.org/10.2989/16073606.2017.1283370
2. Ilyas, A., Malik, S. A., & Saif, S. (2021). Inverse problems for a multi-term time fractional evolution equation with an involution. *Inverse Problems in Science and Engineering*, *29*(13), 3377-3405. https://doi.org/10.1080/17415977.2021.2000606
3. Kirane, M., & Sarsenbi, A. A. (2023). Solvability of mixed problems for a fourth-order equation with involution and fractional derivative. *Fractal and Fractional*, *7*(2), 131. https://doi.org/10.3390/fractalfract702013
4. Mussirepova, E., Sarsenbi, A., & Sarsenbi, A. (2022). The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient. *Boundary Value Problems*, *2022*(1), 99. https://doi.org/10.1186/s13661-022-01675-1
5. Mussirepova, E., Sarsenbi, A. A., & Sarsenbi, A. M. (2022). Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *45*(17), 11262-11271. https://doi.org/10.1002/mma.8448
6. Muratbekova, M., Kadirkulov, B., Koshanova, M., & Turmetov, B. (2023). On Solvability of Some Inverse Problems for a Fractional Parabolic Equation with a Nonlocal Biharmonic Operator. *Fractal and Fractional*, *7*(5), 404. https://doi.org/10.3390/fractalfract7050404
7. Turmetov, B., & Karachik, V. (2024). On solvability of some inverse problems for a nonlocal fourth-order parabolic equation with multiple involution. *AIMS Mathematics*, *9*(3), 6832-6849. https://doi.org/10.3934/math.2024333
8. Karachik, V., Sarsenbi, A., & Turmetov, B. (2019). On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation. *Turkish journal of mathematics*, *43*(3), 1604-1625.
9. Karachik, V. V., & Kh, T. B. (2020). Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation. *Novi sad journal of mathematics*, *50*(1), 67-88. https://doi.org/ 10.30755/NSJOM.08942
10. Yarka, U., Fedushko, S., & Veselý, P. (2020). The Dirichlet problem for the perturbed elliptic equation. *Mathematics*, *8*(12), 2108. https://doi.org /10.3390/math8122108
11. Kirane, M., & Al-Salti, N. (2016). Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, *9*, 1243-1251. http://dx.doi.org / 10.22436 /jnsa. 009.03.49
12. Tapdigoglu, R., & Torebek, B. T. (2018). Inverse source problems for a wave equation with involution. *Bulletin of the Karaganda University*. *Mathematics series*, *91*(3), 75-82.
13. lyin, V. A. (1957). K voprosu ob obosnovanii metoda Fur'e dlya uravneniya kolebaniy. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, *12*(4(76)), 289–296.
14. Sadybekov, M. A., & Turmetov, B. K. (2012). On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball. *Eurasian Mathematical Journal*, *3*(1), 143-146.

Авторлар туралы мәліметтер

Шарафидинов Д.Д. – магистрант, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: dimabekeev@mail.ru

Турметов Б.Х. - физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Information about authors

Sharafidinov D.D. - master's student, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: dimabekeev@mail.ru

Turmetov B.Kh. - doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz