МАТЕМАТИКА

ӘОЖ 517.988.68
https://doi.org/10.47526/2024-2/2524-0080.01

Г.Б. БАКАНОВ[1], С.К. МЕЛДЕБЕКОВА[2]
[1]физика-математика ғылымдарының докторы, профессор
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: galitdin.bakanov@ayu.edu.kz
[2]Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің докторанты
(Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz

ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ДИСКРЕТТІ КЕРІ ЕСЕПТІҢ ҚОЙЫЛЫМЫ, ДИСКРЕТТІ ТУРА ЖӘНЕ КӨМЕКШІ ДИСКРЕТТІ ЕСЕПТЕР ШЕШІМІНІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Аңдатпа. Бұл жұмыста гиперболалық теңдеу үшін дискретті кері есептің қойылымы қарастырылады. Алдымен гиперболалық теңдеу үшін қойылған үздіксіз кері есеп зерттеуге ыңғайлы түрге келтіріледі. Кері есепте ізделінді функция жұп деп есептелінеді. Есептің берілгенінде Дирактың дельта функциясы болғандықтан, гиперболалық теңдеу үшін Коши есебінің жалпылама шешімінің құрылымы анықталады. Гиперболалық теңдеу үшін қойылған Коши есебінің шешімі уақыттың тек оң мәндері үшін ғана анықталатындықтан, уақыттың теріс мәндері үшін Коши есебінің шешімі жұп емес жалғастыру арқылы анықталады. Бірнеше түрлендіруден кейін үздіксіз кері есептің қойылымы зерттеуге ыңғайлы түрге келеді. Торлық облыс енгізіліп, есептің қойылымындағы функциялар үшін сәйкес торлық функциялар және Дирактың дельта функциясының дискретті аналогы анықталады. Есептегі дифференциалдық операторлар және бастапқы шарттар, кері есептің берілгендері ақырлы айырымдар арқылы аппроксимацияланады. Дискретті кері есептің шешімі бар деп есептеліп, кері есептің берілгендеріне байланысты лемма дәлелденеді. Гиперболалық теңдеу үшін қойылған дискретті кері есепті зерттеу мақсатында дискретті тура есептің жалғыз шешімінің бар болуы және оның қасиеттері туралы теорема дәлелденеді. Теореманы дәлелдеу барысында гиперболалық теңдеуге қойылған Коши есебінің шешімі үшін Даламбер формуласының дискретті аналогы алынды. Дискретті көмекші есептің жалғыз шешімінің бар екендігі және оның шешімінің қасиеттері туралы теорема дәлелденді.

Кілттік сөздер: гиперболалық теңдеу, дискретті тура және кері есеп, Коши есебі.

Г.Б. Баканов[1], С.К. Мелдебекова[2]
[1]доктор физико-математических наук, профессор Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави
(Казахстан, г. Туркестан), e-mail: galitdin.bakanov@ayu.edu.kz
[2]докторант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави
(Казахстан, г. Туркестан), e-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz

Дискретная обратная задача для гиперболического уравнения, свойства решения дискретной прямой и дискретной вспомогательной задач

Аннотация. В данной работе рассматривается постановка дискретной обратной задачи для гиперболического уравнения. Сначала непрерывная обратная задача приводится к удобному виду для исследования. В обратной задаче искомая функция считается чётной. Так как в данных задачи присутствует дельта-функция Дирака, то определяется структура обобщенного решения задачи Коши для гиперболического уравнения. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения определяется только для положительных значений по времени, поэтому решение задачи Коши для отрицательных значений по времени определяется с помощью нечётного продолжения. После некоторых преобразований постановка непрерывной обратной задачи сводится к удобному для исследования виду. Вводится сеточная область, для всех функций в постановке задачи определяется соответствующие сеточные функции и дискретный аналог дельта-функции Дирака. Дифференциальные операторы, начальные условия и дополнительные данные обратной задачи аппроксимируются конечными разностями. Предполагая, что решение дискретной обратной задачи существует, доказывается лемма о данных дискретной обратной задачи. С целью исследования дискретной обратной задачи для гиперболического уравнения доказывается теорема существования и единственности дискретной прямой задачи, а также о свойствах решения этой дискретной задачи. В ходе доказательства теоремы получен дискретный аналог формулы Даламбера решения задачи Коши для гиперболического уравнения. Доказывается теорема о существовании единственного решения и свойствах вспомогательной дискретной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дискретная прямая и обратная задача, задача Коши.

G.B. Bakanov[1], S.K. Meldebekova[2]
[1]Doctor of physical-mathematical sciences, professor
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
(Kazakhstan, Turkistan), e-mail: galitdin.bakanov@ayu.edu.kz
[2]Doctoral Student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
(Kazakhstan, Turkistan), e-mail: saule.meldebekova@ayu.edu.kz

Discrete inverse problem for a hyperbolic equation, properties of the solution to a discrete direct and auxiliary discrete problems

Annotation. This paper considers the formulation of a discrete inverse problem for a hyperbolic equation. First, the continuous inverse problem is reduced to a convenient form for research. In the inverse problem, the required function is considered even. Since the Dirac delta function is present in the problem data, the structure of a generalized solution to the Cauchy problem for a hyperbolic equation is determined. The solution to the Cauchy problem for a hyperbolic equation is determined only for positive values in time, therefore the solution to the Cauchy problem for negative values in time is determined using odd continuation. After some transformations, the formulation of the continuous inverse problem is reduced to a form convenient for research. A grid domain is introduced, and for all functions in the problem statement the corresponding grid functions and a discrete analogue of the Dirac delta function are determined. Differential operators, initial conditions and additional data of the inverse problem are approximated by finite differences. Assuming that a solution to the discrete inverse problem exists, we prove the data lemma of the discrete inverse problem. In order to study the discrete inverse problem for a hyperbolic equation, a theorem on the existence and uniqueness of the discrete direct problem is proved, as well as on the properties of the solution to this discrete problem. In the course of proving the theorem, a discrete analogue of d'Alembert's formula for solving the Cauchy problem for a hyperbolic equation was obtained. The theorem on the existence of a unique solution to the auxiliary discrete problem and its properties is proved.

Key words: hyperbolic equation, discrete direct and inverse problem, Cauchy problem.

Кіріспе

Гиперболалық теңдеу үшін қойылған кері есептердің практикалық маңызы өте зор. Ізделінді коэффициенттер көбінесе зерттелетін ортаның маңызды қасиеттерін сипаттайды. Мысалы серпімділік теориясының кері есебінде Ламе параметрлері мен тығыздық, электродинамиканың кері есебінде диэлектрлік, магниттік өткізгіштік және өткізгіштік тензоры, ал акустиканың кері есебінде ортадағы толқынның таралу жылдамдығы мен ортаның тығыздығы. Гиперболалық теңдеулер үшін қойылған кері есептер математикалық физиканың қисынсыз есептеріне жатады. Қисынсыз есептерді шешудің жалпы теориясын А.Н.Тихонов, М.М.Лаврентьев, В.К.Иванов тұжырымдаған. Қосымша берілген ақпараттар бойынша гиперболалық теңдеулер үшін қойылған кері есептерді келесі үш топқа бөлуге болады: кинематикалық, спектрлік және динамикалық.

Кинематикалық кері есептерде қосымша мәлімет ретінде зерттелетін ортаның бетіне көздерден бұзылулардың келу уақыттары беріледі. Бұл жағдайда өлшеулерді ортаның бүкіл бетінде де, оның кейбір бөлігінде де жүргізуге болады. Бұзылу көздері ортаның бүкіл бетінде немесе зерттелетін ортаның ішінде орналасуы мүмкін.

Кері спектрлік есептерде сәйкес дифференциалдық операторлардың меншікті мәндері және сәйкес меншікті функциялардың квадраттық нормалары қосымша ақпарат ретінде беріледі.

Динамикалық кері есептерде кейбір (әдетте уақытқа байланысты) беттегі сәйкес тура есептің шешімі қосымша ақпарат ретінде беріледі.

Бұл жұмыста гиперболалық теңдеу үшін динамикалық кері есептің қойылымы қарастырылады. Динамикалық кері есептерді зерттеу бойынша келесі алты негізгі топқа бөлуге болады: Гельфанд-Левитан әдісінің динамикалық варианты [1-8], Вольтерраның операторлық теңдеулер әдісі [9], оптимизациялық әдіс [10], Ньютон-Канторович әдісі [11], сызықтандыру әдісі [12] және шектеулі-айырымдық схема әдісі [13].

Қарастырылып отырған жұмыста Гельфанд-Левитан әдісінің динамикалық варианты мен шектеулі-айырымдық схема әдісінің комбинациясы қолданылады.

<u>Есептің қойылымы</u>

Гиперболалық теңдеу үшін қойылған келесі кері есепті қарастырамыз:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - Q(x)U(x,t), \quad x \in R, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$U(x,0) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \delta(x), \quad x \in R \tag{2}$$

$$U(0,t) = g(t), \quad \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t > 0 \tag{3}$$

қатынастарынан үздіксіз $Q(x)$ функциясын анықтау керек. Мұндағы R – нақты сандар жиыны, $\delta(x)$ - Дирактың дельта-функциясы. $Q(x)$ функциясын жұп деп есептейміз.

(1)-(2) Коши есебінің жалпылама шешімі келесі түрде анықталады[14]:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\theta(t - |x|) + \widetilde{U}(x,t)$$

$$U(x,t) \equiv 0, \quad t < |x|, \quad \widetilde{U}(x,|x|) = 0,$$

мұндағы $\widetilde{U}(x,t)$ тегіс функция.

Бұл Коши есебінің шешімі уақыттың теріс мәндері үшін анықталған. Сондықтан уақыттың теріс мәндері үшін бұл есептің шешімін келесі түрде анықтаймыз:

$$\bar{U}(x,t) = \begin{cases} U(x,t), & t > 0 \\ -U(x,-t), & t \le 0. \end{cases}$$

Бұл жағдайда (3) шартының бірінші теңдігін мына түрде жазамыз:

$$f(t) = \bar{U}(0,t) = \tilde{f}(t) + \frac{1}{2}\theta(t) - \frac{1}{2}\theta(-t),$$

$\tilde{f}(t)$ – үзіліссіз функция,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$\tilde{V}(x,t)$ функциясын енгізе отырып, келесі есепті қарастырамыз:

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} - Q(x)\tilde{V}, \quad x \in R, \quad t > 0, \tag{4}$$

теңдеуін және

$$\tilde{V}(x,0) = \delta(x), \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in R,$$

$$\tilde{V}(0,t) = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

шарттарын қанағаттандыратын $Q(x)$ функциясын табу керек. Мұндағы

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\tilde{f}}{dt} + \delta(t)$$

Жоғарыда көрсетілген тура есептің шешімі келесі түрде жазылады:

$$\tilde{V}(x,t) = \frac{1}{2}[\delta(x+t) + \delta(x-t)] + V(x,t), \tag{5}$$

$$\tilde{V}(x,t) \equiv 0, \quad 0 < t < |x|.$$

Сонымен $V(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - Q(x)V(x,t) - \frac{1}{2}Q(x)[\delta(x+t) + \delta(x-t)], \ x \in R, \ t > 0, \tag{6}$$

теңдеуін және келесі

$$V(x,0) = 0, \ \frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = 0, \ x \in R,$$

$$V(0,t) = \frac{d\tilde{f}}{dt}, \ \frac{\partial V}{\partial x}(0,t) = 0, \ t \ge 0,$$

шарттарын қанағаттандыратындығы шығады.

Айталық, Т – оң сан, $N > 2$ – натурал сан және $h = T/N$ болсын. Мынадай белгілеулерді қолданамыз:

$$v_i^k = v(ih, kh), \ \ q_i = q(ih), \quad f^k = f(kh).$$

Айталық,

$$\tilde{f}_{\underset{t}{0}}^k = f_{\underset{t}{0}}^k - \delta_k^h$$

болсын, мұндағы δ_k^h - дельта функциясының дискретті аналогы:

$$\delta_k^h = \begin{cases} \frac{1}{h}, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad f_{\underset{t}{0}}^k = \begin{cases} \frac{1}{h}, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 1 \\ \frac{f^{|k|+1} - f^{|k|-1}}{2h}, & k = \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases}$$

Белгілі шектеулі-айырымдық туындыларды пайдаланамыз:

$$v_x = \frac{v_{i+1}^k - v_i^k}{h}, \quad v_{\bar{t}} = \frac{v_i^k - v_i^{k-1}}{h},$$

$$v_{x\bar{x}} = \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h^2}, \quad v_{t\bar{t}} = \frac{v_i^{k+1} - 2v_i^k + v_i^{k-1}}{h}, \ \text{т.с.с.}$$

Келесі дискретті кері есептің қойылымын қарастырамыз:

$$v_{t\bar{t}} = v_{x\bar{x}} - q_i v_i^k - \frac{1}{2} q_i \left(\delta_{i-k}^h + \delta_{i+k}^h\right), \quad k \geq 1, \quad i \in Z, \tag{7}$$

теңдеуін және

$$v_i^0 = 0, \quad v_i^1 = 0, \quad i \in Z, \tag{8}$$

$$v_0^0 = 0, \quad v_0^1 = 0, \quad v_0^k = \tilde{f}_{\underset{t}{0}}^k, \quad k > 1, \tag{9}$$

шарттарын қанағаттандыратын q_i функциясын табу керек. Мұндағы Z – бүтін сандар жиыны.

Қарастырылып отырған есептің шешімі бар деп есептейік.

Зерттеу әдістері

Лемма. Айталық v_i^k есептің ізделінді шешімі болсын. Сонда

$$v_1^k = \frac{1}{2}\left[\tilde{f}_{\underset{t}{0}}^{k+1} + \tilde{f}_{\underset{t}{0}}^{k-1}\right] + \frac{h^2}{2} q_0 \tilde{f}_{\underset{t}{0}}^k, \quad k > 1. \tag{10}$$

Дәлелдеуі. Есептің берілгендерін шартын ескере отырып,

$$\tilde{f}_{\underset{t}{0}}^{k+1} + \tilde{f}_{\underset{t}{0}}^{k-1} = v_1^k + v_{-1}^k - h^2 q_0 \tilde{f}_{\underset{t}{0}}^k - \frac{h^2}{2} q_0 (\delta_{-k}^h + \delta_k^h)$$

екендігін аламыз. Осыдан v_i^k функциясының жұп екендігін және δ_k^h функцияның дискретті аналогының анықтамасын пайдалана отырып, (10) формуласын аламыз. Лемма дәлелденді.

Дискретті тура есептің шешімінің қасиеттері

Теорема 1. *Айталық* $N > 2$ *болсын. Сонда* $0 \le k \le N$ *үшін (7)-(8) тура есебінің шешімі бар болады, ол жалғыз және*

$$v_i^k = 0, \quad 0 \le k \le |i|.$$

Дәлелдеуі. (7) теңдеуінен

$$v_i^{k+1} = v_{i+1}^k + v_{i-1}^k - v_i^{k-1} - h^2 q_i v_i^k - \tfrac{h^2}{2} q_i (\delta_{i-k}^h + \delta_{i+k}^h). \tag{11}$$

Соңғы теңдікке кіретін өрнектердің мәнін (11) формуласы бойынша жаза отырып, келесі теңдікті аламыз:

$$v_{i+1}^k = v_{i+1}^1 + v_{i-1}^k - v_{i+k-1}^0 - h^2 \sum_{j=1}^{k} q_{i+k-j} - \frac{h^2}{2} \sum_{j=1}^{k} q_{i+k-j} \left(\delta_{i+k-2j}^h + \delta_{i+k}^h\right).$$

Енді (8) шарттарына сәйкес

$$v_{i+k}^1 = 0, \qquad v_{i+k-1}^0 = 0,$$

екендігін ескере отырып, келесі теңдікті аламыз:

$$v_{i+1}^k = v_{i-1}^k - h^2 \sum_{j=1}^{k} q_{i+k-j} - \tfrac{h^2}{2} \sum_{j=1}^{k} q_{i+k-j} (\delta_{i+k-2j}^h + \delta_{i+k}^h). \tag{12}$$

Соңғы теңдікке кіретін өрнектердің мәнін (12) формуласы бойынша жаза отырып, келесі теңдікті аламыз:

$$v_i^{k+1} = v_{i-1}^k - h^2 \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} q_{i-k-j+2s} -$$
$$- \frac{h^2}{2} \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} q_{i-k-j+2s} \left(\delta_{i-k-2j+2s}^h + \delta_{i+k+2s}^h\right).$$

Енді (8) шартына сәйкес

$$v_{i-k}^1 = 0$$

екендігін ескере отырып, келесі теңдікті аламыз:

$$v_i^{k+1} = -h^2 \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} q_{i-k-j+2s}\, v_{i-k-j+2}^{j} - \\ -\frac{h^2}{2} \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} q_{i-k-j+2s} [\delta_{i-k-2j+2s}^{h} + \delta_{i+k+2s}^{h}], \tag{13}$$

мұндағы $i \in Z, \quad k \geq 1.$

Сонымен дискретті (7)-(8) есебінің шешімі бар екендігі дәлелденді.

Келесі белгілеуді енгіземіз:

$$\Delta_h^1(i_0, k_0) = \{(i,k): i_0 - k_0 + k \leq i \leq i_0 + k_0 - k, \qquad 0 \leq k \leq k_0\}.$$

Енді барлық $0 \leq k_0 \leq |i_0|$ үшін

$$v_i^k \equiv 0$$

екенін дәлелдейміз. Барлық $(i,k) \in \Delta_h^1(i_0, k_0)$ үшін (13) теңдігінен

$$v_i^{k+1} = -h^2 \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} q_{i-k-j+2s}\, v_{i-k-j+2}^{j} \tag{14}$$

екендігі шығады.

$$Q_1 = max|q_i|, \qquad i_0 - k_0 + k \leq i \leq i_0 + k_0 - k \text{ үшін},$$

$$V^{k+1} = max\left|v_i^{k+1}\right|, \qquad i_0 - k_0 + k \leq i \leq i_0 + k_0 - k \text{ үшін}$$

деп белгілейміз. Сонда (14) теңдігінен келесі бағалауды аламыз:

$$V^{k+1} \leq Q_1 T k_0 \sum_{j=1}^{k} h V^k, \qquad 0 \leq k \leq k_0.$$

Беллман теңсіздігін қолдана отырып

$$V^k = 0, \quad 0 \leq k \leq k_0$$

екендігін аламыз. Тура (7)-(8) есебінің шешімінің жалғыздығы да осылай көрсетіледі. Теорема 1 дәлелденді.

Көмекші дискретті есептің шешімінің қасиеттері

Гиперболалық теңдеу үшін қойылған (7)-(9) дискретті кері есебін зерттеу үшін Гельфанд-Левитан әдісі бойынша келесі көмекші дискретті есепті енгіземіз:

$$\frac{\omega_i^{k+1}-2\omega_i^k+\omega_i^{k-1}}{h^2}=\frac{\omega_{i+1}^k-2\omega_i^k+\omega_{i-1}^k}{h^2}-q_i\omega_i^k,\quad i\geq 1,\quad k\in Z, \tag{15}$$

$$\omega_0^k=\delta_k^h,\qquad \omega_1^k=\frac{1}{2}\left(\delta_{k+1}^h+\delta_{k-1}^h\right)+\frac{h^2}{2}q_0\delta_k^h,\qquad k\in Z, \tag{16}$$

мұндағы $\omega_i^k=\omega(ih,kh)$.

Теорема 2. *Айталық* $N>2$ *болсын. Сонда әрбір* $0\leq i\leq N$ *үшін көмекші (15)- (16) есебінің шешімі бар болады, ол шешім жалғыз және*

$$\omega_i^k=0,\qquad 1<i<|k|.$$

Дәлелдеуі. (1) теңдеуінен келесі теңдікті аламыз:

$$\omega_{i+1}^k=\omega_i^{k+1}+\omega_i^{k-1}-\omega_{i-1}^k+h^2q_i\omega_i^k. \tag{17}$$

Соңғы теңдіктің құрамындағы өрнектердің мәнін (11) формуласы бойынша жаза отырып, мынадай теңдікті аламыз:

$$\omega_{i+1}^k=\omega_i^{k-1}+\omega_1^{k+i}-\omega_0^{k+i-1}+h^2\sum_{j=1}^{i}q_j\omega_j^{k+i-j}. \tag{18}$$

Енді (16) шарттары бойынша

$$\omega_0^{k+i-1}=\delta_{k+i-1}^h,\qquad \omega_1^{k+i}=\frac{\delta_{k+i+1}^h+\delta_{k+i-1}^h}{2}+\frac{h^2}{2}q_0\delta_{k+i}^h$$

екендігін ескере отырып, (18) теңдігінен

$$\omega_{i+1}^k=\omega_i^{k-1}+\frac{1}{2}\left(\delta_{k+i+1}^h-\delta_{k+i-1}^h\right)+h^2\sum_{j=1}^{i}q_j\omega_j^{k+i-j}+\frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{i}q_0\omega_0^{k+i} \tag{19}$$

екендігін аламыз. Осы (19) теңдігіне келесі өрнектердің оң жағындағы мәндерді қоя отырып, мындай теңдіктерді аламыз:

$$\omega_i^{k-1}=\omega_{i-1}^{k-2}+\frac{1}{2}\left(\delta_{k+i-1}^h-\delta_{k+i-3}^h\right)+h^2\sum_{j=1}^{i-1}q_j\omega_j^{k+i-j-2}+\frac{h^2}{2}q_0\omega_0^{k+i-2}$$

$$\omega_{i-1}^{k-2}=\omega_{i-2}^{k-3}+\frac{1}{2}\left(\delta_{k+i-3}^h-\delta_{k+i-5}^h\right)+h^2\sum_{j=1}^{i-2}q_j\omega_j^{k+i-j-4}+\frac{h^2}{2}q_0\omega_0^{k+i-4}$$

$$\omega_{i-2}^{k-3}=\omega_{i-3}^{k-4}+\frac{1}{2}\left(\delta_{k+i-5}^h-\delta_{k+i-7}^h\right)+h^2\sum_{j=1}^{i-3}q_j\omega_j^{k+i-j-6}+\frac{h^2}{2}q_0\omega_0^{k+i-6}$$

$$\ldots$$

$$\omega_3^{k-i+2} = \omega_2^{k-i+1} + \frac{1}{2}\left(\delta_{k-i+5}^h - \delta_{k-i+3}^h\right) + h^2 \sum_{j=1}^{i-(i-2)} q_j \omega_j^{k-i-j+4} + \frac{h^2}{2} q_0 \omega_0^{k-i+4}$$

$$\omega_2^{k-i+1} = \omega_1^{k-i} + \frac{1}{2}\left(\delta_{k-i+3}^h - \delta_{k-i+1}^h\right) + h^2 \sum_{j=1}^{i-(i-1)} q_j \omega_j^{k-i-j+2} + \frac{h^2}{2} q_0 \omega_0^{k-i+2}.$$

Осыдан:

$$\omega_{i+1}^k = \frac{1}{2}\delta_{k+i+1}^h + \omega_1^{k-i} - \frac{1}{2}\delta_{k-i+1}^h + h^2 \sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s} q_j \omega_j^{k-i-j+2s} + \frac{h^2}{2}\sum_{s=1}^{i} q_0 \omega_0^{k-i+2s}.$$

Бастапқы (16) шарттары бойынша

$$\omega_1^{k-i} = \frac{1}{2}\left(\delta_{k+i+1}^h + \delta_{k-i-1}^h\right) + \frac{h^2}{2} q_0 \omega_0^{k-i}$$

екендігін ескере отырып, келесі теңдікті аламыз:

$$\omega_{i+1}^k = \frac{1}{2}\left(\delta_{k+i+1}^h + \delta_{k-i-1}^h\right) + h^2 \sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s} q_j \omega_j^{k-i-j+2s} + \frac{h^2}{2}\sum_{s=1}^{i} q_0 \omega_0^{k-i+2s}, \qquad (20)$$

мұндағы $i \geq 0, \quad k \in Z$.

Соңғы (20) формуласы (15)-(16) Коши есебінің шешімін беретін Даламбер формуласының аналогы екенін байқауға болады. Сонымен дискретті (15)-(16) көмекші есебінің шешімі бар екендігі дәлелденді.

Айталық

$$\Delta_h^2(i_0, k_0) = \{(i,k): 0 \leq i \leq i_0, \qquad k_0 - i_0 + i \leq k \leq k_0 + i_0 - i\}$$

болсын. Енді барлық $1 < i_0 < |k_0|$ үшін

$$\omega_i^k \equiv 0$$

екендігін көрсетеміз. Барлық $(i,k) \in \Delta_h^2(i_0, k_0)$ үшін (5) теңдігінен

$$\omega_{i+1}^k = h^2 \sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s} q_j \omega_j^{k-i-j+2s} + \frac{h^2}{2}\sum_{s=0}^{i} q_0 \omega_0^{k-i+2s}, \qquad (21)$$

екендігі шығады.

$$Q_2 = \max_{0 \leq i \leq i_0} |q_i|,$$

$$W_{i+1} = max\left|\omega_{i+1}^k\right|, \quad k_0 - i_0 + i \leq k \leq k_0 + i_0 - i \ \text{ үшін}$$

деп есептейміз. Сонда (21) теңдігінен келесі бағалауды аламыз:

$$W_{i+1} \leq Q_2 T i_0 \sum_{j=1}^{i} h W_j, \qquad 1 < i < i_0.$$

Осыдан Беллман теңсіздігін қолдана отырып,

$$W_i = 0, \quad 1 < i < i_0$$

екендігін аламыз. Осы секілді көмекші дискретті (15)- (16) есебінің шешімінің жалғыздығы дәлелденеді. Теорема 2 дәлелденді.

Талдау мен нәтижелер

Гиперболалық теңдеу үшін үздіксіз кері есептің қойылымы зерттеуге ыңғайлы түрге келтірілді және Коши есебінің жалпылама шешімінің құрылымы анықталды. Уақыттың теріс мәндері үшін Коши есебінің шешімі жұп емес жалғастыру арқылы анықталды. Гиперболалық теңдеу үшін дискретті кері есептің қойылымы көрсетілді және дискретті тура есептің жалғыз шешімінің бар болуы дәлелденді. Көмекші дискретті есептің шешімінің жалғыздығы және оның қасиеттері көрсетілді.

Қорытынды

Жұмыста дәлелденген дискретті тура және көмекші есептердің шешімінің қасиеттері туралы теоремалар гиперболалық теңдеу үшін қойылған кері есепті Гельфанд-Левитан әдісі бойынша толық зерттеуге мүмкіндік береді.

Зерттеу Қазақстан Республикасының Ғылым және Жоғары Білім Министрлігінің Ғылым Комитетінің қаржылық қолдауымен орындалды (грант № AP 19678469).

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Romanov V. G. On justification of the Gelfand–Levitan–Krein method for a two-dimensional inverse problem //Siberian Mathematical Journal. – 2021. – Т. 62. – №. 5. – p. 908-924.
2. Kabanikhin S. I., Novikov N. S., Shishlenin M. A. Gelfand-Levitan-Krein method in one-dimensional elasticity inverse problem //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2021. – Т. 2092. – №. 1. – p. 012022.
3. Kabanikhin S., Shishlenin M., Novikov N. and Prokhoshin N. Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand–Levitan–Marchenko–Krein Equations //Mathematics. – 2023. – Т. 11. – №. 21. – p. 4458.
4. S.Kabanikhin, M.Shishlenin, G.Bakanov. Multidimensional analogue of Krein equation for the inverse acoustic problem // Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023) – p.312.
5. Bektemessov M., Temirbekova L. Discretization of equations Gelfand-Levitan-Krein and regularization algorithms //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2021. – Т. 2092. – №. 1. – p. 012015.
6. Temirbekov N.M., Kabanikhin S.I., Temirbekova L.N., Demeubayeva Zh.E. “Gelfand-Levitan integral equation for solving coefficient inverse problem”. International scientifically-technical journal herald to National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, No. 3(85), (2022): p.158-167. \\https:/doi.org/10.47533/2020.1606-146X.184
7. Каримов Ш. Т., Мамадалиева Ш. Г. Решение коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнение сведением её у уравнению Гелфанда-Левитана первого рода//Finland International Scientific Journal of Education, Social Science & Humanities. – 2022. – Т. 10. – №. 12. – С. 142-151.

8. Исламов Э. Р., Мамадалиева Ш. Г. Решение коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнение сведением её у уравнению Гелфанда-Левитана второго рода //Finland International Scientific Journal of Education, Social Science & Humanities. – 2022. – Т. 10. – №. 12. – С. 399-404.
9. Алыбаев А. М. Регуляризация обратной задачи с оператором гиперболического типа, где вырождается некорректное уравнение Вольтерра первого рода // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2022. – № 7 – С. 57-71.
10. Кабанихин С. И., Криворотько О. И. Оптимизационные методы решения обратных задач иммунологии и эпидемиологии //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60. – №. 4. – С. 590-600.
11. Пененко А. В. Метод Ньютона–Канторовича для решения обратных задач идентификации источников в моделях продукции–деструкции с данными типа временных рядов //Сибирский журнал вычислительной математики. – 2019. – Т. 22. – №. 1. – С. 57-79.
12. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня //Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22. – №. 2. – С. 180-195.
13. Konuk T., Shragge J. Modeling full-wavefield time-varying sea-surface effects on seismic data: A mimetic finite-difference approach //Geophysics. – 2020. – Т. 85. – №. 2. – p. T45-T55. https://doi.org/10.1190/geo2019-0181.1
14. Романов В.Г.Обратные задачи математической физики.-М.:Наука, 1984. 264 с.

REFERENCES

1. Romanov V. G. On justification of the Gelfand–Levitan–Krein method for a two-dimensional inverse problem // Siberian Mathematical Journal. – 2021. – Т. 62. – №. 5. – p. 908-924.
2. Kabanikhin S. I., Novikov N. S., Shishlenin M. A. Gelfand-Levitan-Krein method in one-dimensional elasticity inverse problem //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2021. – Т. 2092. – №. 1. – p. 012022.
3. Kabanikhin S., Shishlenin M., Novikov N. and Prokhoshin N. Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand–Levitan–Marchenko–Krein Equations //Mathematics. – 2023. – Т. 11. – №. 21. – p. 4458.
4. S.Kabanikhin, M.Shishlenin, G.Bakanov. Multidimensional analogue of Krein equation for the inverse acoustic problem // Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023) – p.312.
5. Bektemessov M., Temirbekova L. Discretization of equations Gelfand-Levitan-Krein and regularization algorithms // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2021. – Т. 2092. – №. 1. – p. 012015.
6. Temirbekov N.M., Kabanikhin S.I., Temirbekova L.N., Demeubayeva Zh.E. Gelfand-Levitan integral equation for solving coefficient inverse problem // International scientifically-technical journal herald to National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, No. 3(85), (2022): p.158-167. \\https:/doi.org/10.47533/2020.1606-146X.184
7. Karimov Sh. T., Mamadalieva Sh. G. Reshenie koeffitsientnoy obratnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravnenie svedeniem eYo u uravneniyu Gelfanda-Levitana pervogo roda //Finland International Scientific Journal of Education, Social Science & Humanities. – 2022. – Т. 10. – №. 12. – p. 142-151. (in Russian)
8. Islamov E. R., Mamadalieva Sh. G. Reshenie koeffitsientnoy obratnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravnenie svedeniem eYo u uravneniyu Gelfanda-Levitana vtorogo roda //Finland International Scientific Journal of Education, Social Science & Humanities. – 2022. – Т. 10. – №. 12. – p. 399-404. (in Russian)
9. Alyibaev A. M. Regulyarizatsiya obratnoy zadachi s operatorom giperbolicheskogo tipa, gde vyirozhdaetsya nekorrektnoe uravnenie Volterra pervogo roda // Mezhdunarodnyiy zhurnal prikladnyih i fundamentalnyih issledovaniy. – 2022. – № 7 – p. 57-71. (in Russian)

10. Kabanihin S. I., Krivorot'ko O. I. Optimizatsionnyie metodyi resheniya obratnyih zadach immunologii i epidemiologii //Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki.– 2020. – T. 60. – №. 4. – p. 590-600. (in Russian)
11. Penenko A. V. Metod Nyutona–Kantorovicha dlya resheniya obratnyih zadach identifikatsii istochnikov v modelyah produktsii–destruktsii s dannyimi tipa vremennyih ryadov //Sibirskiy zhurnal vyichislitelnoy matematiki. – 2019. – T. 22. – №. 1. –p. 57-79. (in Russian)
12. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. Reshenie obratnoy zadachi ob identifikatsii dvuh termomehanicheskih harakteristik funktsionalno-gradientnogo sterzhnya //Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mehanika. Informatika.– 2022. – T. 22. – №. 2. – p. 180-195. (in Russian)
13. Konuk T., Shragge J. Modeling full-wavefield time-varying sea-surface effects on seismic data: A mimetic finite-difference approach //Geophysics. – 2020. – T. 85. – №. 2. – p. T45-T55. https://doi.org/10.1190/geo2019-0181.1
14. Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki.- M.:Nauka, 1984. 264p. (in Russian)