УДК 517.988
ГРНТИ 27.29.15
https://doi.org/10.47526/2024-1/2524-0080.04

Д. АБИБУЛЛА[1], К.И. УСМАНОВ[2]
[1]*магситрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан),* e-mail: dinara.abibulla@ayu.edu.kz
[2] *кандидат физико-математических наук, доцент Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан),* e-mail:kairat.usmanov@ayu.edu.kz

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ПАНТОГРАФА

Аннотация. Уравнения пантографа и типа пантографа изучаются издавна. В 1940 г. K. Mahler ввел функционально-дифференциальные уравнения такого типа в теорию чисел. 1971 году J. Ockendon функционально-дифференциальное уравнение с преобразованным аргументом, $y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$, было использована для описания динамики токоприемника (пантографа) электровоза. В дальнейшем уравнения типа пантографа изучались в работах многих авторов.

В данной статье рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения типа пантографа. Для решение поставленной краевой задачи применяется метод параметризации предложенный профессором Д.Джумабаевым. Для этого, значение функции в начальной точке рассматриваемого отрезка, обозначим через параметр $\mu = y(0)$ и выполним замену переменной $y(x) = u(x) + \mu.$ Тогда разрешимость исходной краевой задачи сводится к исследованию разрешимости полученной задачи Коши для исходного уравнения и к линейному алгебраическому уравнению для определения введенного параметра. Далее, применяя метод последовательных приближении находим решения задачи Коши для уравнения типа пантографа. Доказывается сходимость полученной последовательности и сходимость его решения к решению задачи Коши для уравнения типа пантографа. Требуя непрерывность свободного члена, устанавливаем его однозначную разрешимость. Полученное решение подставляя в линейное алгебраическое уравнения определим введенный параметр через исходные данные. Полученные выражение подставляя в $y(x) = u(x) + \mu$ находим решение исходной задачи. И предполагая однозначную разрешимость линейного алгебраического уравнения, устанавливаем разрешимость краевой задачи для уравнения типа пантографа.

Ключевые слова: уравнение пантографа, сходимость, краевая задача, метод параметризации, разрешимость, задача Коши.

Д. Абибулла[1], К.И. Усманов[2]
[1]*Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің магистранты (Қазақстан, Түркістан қ.),* e-mail: dinara.abibulla@ayu.edu.kz
[2]*физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.),*e-mail:kairat.usmanov@ayu.edu.kz

Пантограф тектес дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептерді шешудің бір әдісі жайында

Аңдатпа. Пантограф теңдеулері бұрыннан зерттелген. 1940 жылы K. Mahler сандар теориясына осы типтегі функционалдық дифференциалдық теңдеулерді енгізді. 1971 жылы J. Ockendon түрлендірілген аргументі бар функционалды-Дифференциалдық теңдеу, $y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$, электровоздың ток қабылдағышының (пантографтың) динамикасын сипаттау үшін пайдаланылды. Кейінен, пантограф түріндегі теңдеулер көптеген авторлардың еңбектерінде зерттелді.

Бұл мақалада пантограф типіндегі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер қарастырылады. Қойылған шеттік есепті шешу үшін профессор Д. Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісі қолданылады. Ол үшін қарастырылып отырған сегменттің бастапқы нүктесіндегі функцияның мәнін $\mu = y(0)$ параметр арқылы белгіленеді және $y(x) = u(x) + \mu$ айнымалы ауыстылады, содан кейін бастапқы шеттік есептің шешімділігі бастапқы теңдеу үшін алынған Коши есебінің шешімділігін зерттеуге және енгізілген параметрді анықтау үшін сызықтық алгебралық теңдеуге жіктеледі. Әрі қарай, біртіндеп жуықтау әдісін қолдана отырып, пантограф типті теңдеу үшін Коши есебінің шешімін табамыз. Алынған шешімдердің жинақтылығы және оның шегі, пантограф типіндегі Коши есебінің шешіміне ұмтылатындығы дәлелденеді. Бос мүшенің үздіксіздігін талап ете отырып, біз Коши есебінің жалғыз шешімі болатындығын көрсетеміз. Алынған шешімді, сызықтық алгебралық теңдеулерді қоя отырып, параметр мәнін бастапқы деректер арқылы анықтаймыз. Алынған өрнектерді $y(x) = u(x) + \mu$ қойып, бастапқы есептің шешімін табамыз. Сызықтық алгебралық теңдеудің бірмәнді шешімділігін ескере отырып, біз пантограф типіндегі теңдеу үшін шеттік есептің шешімін анықтаймыз.

Кілт сөздер: Пантограф теңдеуі, жинақтылық, шеттік есеп, параметрлеу әдісі, шешімділік, Коши есебі.

D. Abibulla[1], K. I. Usmanov[2]

[1]*Master's Student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail*: dinara.abibulla@ayu.edu.kz

[2]*candidate of physico-mathematical science, associate professor Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan) ,e-mail:*kairat.usmanov@ayu.edu.kz

About one approach for solving bounary-value problems of differential equation of pantograph type

Abstract. Pantograph equations have been studied for a long time. In 1940, K. Mahler introduced functional differential equations of this type into number theory. In 1971, J. Ockendon used a functional differential equation with a transformed argument, $y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$, to describe the dynamics of the pantograph of an electric locomotive. Subsequently, Pantograph-type equations were studied in the works of many authors.

This article considers a boundary value problem for a differential equation of the pantograph type. To solve the posed boundary value problem, the parameterization method proposed by Professor D. Dzhumabaev is used. To do this, we denote the value of the function at the initial point of the segment under consideration by a parameter $\mu = y(0)$ and perform a change of variable $y(x) = u(x) + \mu.$ Then the solvability of the original boundary value problem is reduced to studying the solvability of the resulting Cauchy problem for the original equation and to a linear algebraic equation to determine the introduced parameter. Next, using the method of successive approximations, we find solutions to the Cauchy problem for the Pantograph type equation. The convergence of the resulting sequence and the convergence of its solution to the solution of the Cauchy problem of Pantograph type are proved. By requiring continuity of the free term, we establish its unique solvability. Substituting the resulting solution into a linear algebraic equation to

determine the entered parameter, we calculate the values of the entered parameter using the original data. Substituting the resulting expressions into we find the solution to the original problem $y(x) = u(x) + \mu$. And assuming the unique solvability of a linear algebraic equation, we establish the solvability of the boundary value problem for an equation of Pantograph type.

Keywords: Pantograph equation, convergence, boundary value problem, parameterization method, solvability, Cauchy problem.

Введение

Уравнения пантографа и типа пантографа изучаются издавна. В 1940 г. K. Mahler [1] ввел функционально-дифференциальные уравнения такого типа в теорию чисел.

1971 году J. Ockendon [2] функционально-дифференциальное уравнение с преобразованным аргументом

$$y'(x) = ay(\varepsilon x) + by(x)$$

было использована для описания динамики токоприемника (пантографа) электровоза.

В 1972 г. G.R. Morris, A. Feldstein and E. W. Bowen [3] доказали, что решение уравнения

$$y'(x) = -ay(\varepsilon x), \quad y(0) = 1$$

имеет бесконечное число положительных нулей и что в таких нулевых точках решения начальной задачи будут не единственными или не будут существовать.

В работе Быкова и др. [4] были исследованы дифференциальные уравнения второго порядка типа пантографа. Введены понятия обобщенных показательной, синус и косинус функций

$$e_\varepsilon^t = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t^k}{k!}, \qquad \cos_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k-1)} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^{k(2k+1)} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

В данной работе было показано, что $\cos_\varepsilon(x)$ и $\sin_\varepsilon(x)$ являются решениями уравнения

$$y''(t) = \varepsilon y(\varepsilon^2 t).$$

В работе Родионова [5] предлагается специальный алгебраический аппарат для решения уравнения пантографа в классе аналитических функции, с введением специального произведения

$$f(x)*g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k} f_i g_j \varepsilon^{ij}\frac{x^k}{k!}.$$

Доказывается свойства обобщенных показательной, синус и косинус функций относительно данного произведения

$$\sin_{\varepsilon}(x)*\sin_{\varepsilon}(x)+\cos_{\varepsilon}(x)*\cos_{\varepsilon}(x)=1 \text{ и т.д.}$$

A.Iserles, Yunkang Liu [6] использовали обобщенные гипергеометрические функции для решения некоторых интегро-дифференциальных уравнений пантографа.

$$y'(t)=ay(t)+\int_0^1 y(\varepsilon s)ds+\int_0^1 y'(\varepsilon s)ds, \quad t>0,$$

$$y(t)+\int_0^1 y(\varepsilon s)ds+\int_0^1 y'(\varepsilon s)ds=0, \quad t>0,$$

Метод исследования

В данной работе на отрезке $[0,1]$ будут рассмотрены вопросы разрешимости краевой задачи для неоднородного уравнения

$$y'(x)=\lambda y(\varepsilon x)+f(x), \quad 0<\varepsilon\le 1.$$

Для решения данной задачи будет использован метод параметризации Д.Джумабаева [7]. Изначально метод параметризации был использован для решения краевых задач для систем дифференциальных уравнении. Позже данный метод был применен для решения различных краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [8-11]. Идея метода параметризации заключается введения параметров, и тем самым разбиение краевой задачи на две части:

1) задача Коши для исходного уравнения;
2) система линейных уравнений для определения введенных параметров.

Задача. Определит на отрезке $[0,1]$ решение краевой задачи

$$y'(x)=\lambda y(\varepsilon x)+f(x), \quad 0<\varepsilon\le 1, \tag{1}$$

$$ay(0)+by(1)=d. \tag{2}$$

где λ - некоторое конечное положительное число.

Определение. Решением краевой задачи дифференциального уравнения (1), (2) называется всякая функция $y(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$, которая удовлетворяет (1), (2).

Введем параметр $\mu=y(0)$ и выполним замену переменной $y(x)=u(x)+\mu.$ Тогда краевую задачу (1), (2) можно записать в виде

$$u'(x) = \lambda u(\varepsilon x) + \tilde{f}(x), \tag{3}$$

$$u(0) = 0, \tag{4}$$

$$bu(1) + (a+b)\mu = d, \tag{5}$$

где $\tilde{f}(x) = f(x) + \lambda\mu.$

Замечание. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[-a,a]$, тогда для конечных положительных λ функция $f_1(x, u(\varepsilon x)) = \lambda u(\varepsilon x) + \tilde{f}(x)$ будет непрерывна в области $D = [-a,a] \times [-b,b]$, где $\tilde{f}(x) = f(x) + \lambda\mu$. Значение $\varepsilon \in (0,1]$, поэтому $|f(\varepsilon x)| \le |f(x)| \le M$ на $[-a,a]$, где $M = \max\limits_{x\in[-a,a]} |f(x)|$.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a,a]$, тогда задача Коши эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_0^x u(\varepsilon\tau)d\tau + \int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Для решения задачи Коши (3), (4) используем метод последовательных приближений.

$$u_k(x) = \lambda \int_0^x u_{k-1}(\varepsilon\tau)d\tau + \int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Возьмем качестве начального приближение

$$u_0(x) = u(0) = 0.$$

Тогда

$$u_1(x) = \int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau, \quad \text{отсюда} \quad u_1(\varepsilon x) = \int_0^{\varepsilon x} \tilde{f}(\tau)d\tau.$$

$$u_2(x) = \lambda \int_0^x u_1(\varepsilon\tau)d\tau + \int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau = \lambda \int_0^x \int_0^{\varepsilon\tau} \tilde{f}(\tau_1)d\tau_1 d\tau + \int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Меняем порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^x \int_0^{\varepsilon\tau} \tilde{f}(\tau_1)d\tau_1 d\tau = \int_0^{\varepsilon x} \tilde{f}(\tau)d\tau \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^x d\tau_1 = \int_0^{\varepsilon x} \left(x - \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \tilde{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon x} (\varepsilon x - \tau)\, \tilde{f}(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Полученное выражение (9) подставляя в (8), получим

$$u_2(x) = \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon x} (\varepsilon x - \tau)\, \tilde{f}(\tau)d\tau + \int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Выполним в первом интеграле замену переменных $\tau = \varepsilon\xi$, во втором τ заменим на ξ

$$u_2(x) = \lambda\varepsilon \int_0^x (x - \xi)\, \tilde{f}(\varepsilon\xi)d\xi + \int_0^x \tilde{f}(\xi)d\xi.$$

Аналогично

$$u_3(x)=\lambda\int_0^x u_3(\varepsilon\tau)d\tau+\int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau.$$

Из (10) следует

$$u_2(\varepsilon x)=\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon^2 x}\left(\varepsilon^2 x-\tau\right)\tilde{f}(\tau)d\tau+\int_0^{\varepsilon x}\tilde{f}(\tau)d\tau,$$

тогда

$$u_3(x)=\lambda\int_0^x\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon^2\tau}\left(\varepsilon^2\tau-\tau_1\right)\tilde{f}(\tau_1)d\tau_1+\int_0^{\varepsilon\tau}\tilde{f}(\tau_1)d\tau_1\right)d\tau+\int_0^x\tilde{f}(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{\lambda^2}{\varepsilon}\int_0^x\int_0^{\varepsilon^2\tau}\left(\varepsilon^2\tau-\tau_1\right)\tilde{f}(\tau_1)d\tau_1 d\tau+\lambda\int_0^x\int_0^{\varepsilon\tau}\tilde{f}(\tau_1)d\tau_1 d\tau+\int_0^x\tilde{f}(\tau)d\tau. \quad (11)$$

Поменяем порядок интегрирования в первом слагаемом в (11)

$$\frac{\lambda^2}{\varepsilon}\int_0^x\int_0^{\varepsilon^2\tau}\left(\varepsilon^2\tau-\tau_1\right)\tilde{f}(\tau_1)d\tau_1 d\tau=-\frac{\lambda^2}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon^2 x}\tilde{f}(\tau_1)d\tau_1\int_{\frac{\tau_1}{\varepsilon^2}}^x\left(\varepsilon^2\tau-\tau_1\right)d\tau=\frac{\lambda^2}{\varepsilon^3}\int_0^{\varepsilon^2 x}\frac{\left(\varepsilon^2 x-\tau_1\right)^2}{2}\tilde{f}(\tau_1)d\tau_1.$$

Подставляя полученное выражение в (11) и учитывая (9), получим

$$u_3(x)=\frac{\lambda^2}{\varepsilon^3}\int_0^{\varepsilon^2 x}\frac{\left(\varepsilon^2 x-\tau\right)^2}{2}\tilde{f}(\tau)d\tau+\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon x}\left(\varepsilon x-\tau\right)\tilde{f}(\tau)d\tau+\int_0^x\tilde{f}(\tau)d\tau. \quad (12)$$

Выполним в первом интеграле замену переменных $\tau=\varepsilon^2\xi$, во втором $\tau=\varepsilon\xi$, а в третьем τ заменим на ξ. Тогда

$$u_3(x)=\lambda^2\varepsilon^3\int_0^x\frac{\left(x-\xi\right)^2}{2}\tilde{f}(\varepsilon^2\xi)d\xi+\lambda\varepsilon\int_0^x\left(x-\xi\right)\tilde{f}(\varepsilon\xi)d\xi+\int_0^x\tilde{f}(\xi)d\xi.$$

Продолжая этот процесс можно получить

$$u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^x\frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}\left(x-\tau\right)^{k-1}\tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau. \quad (13)$$

Покажем, что (13) верно при любом n. Для этого воспользуемся методом математической индукции. Действительно, при $n=1$

$$u_1(x)=\int_0^x\tilde{f}(\tau)d\tau.$$

Предположим, что (13) верно, при $n=m$, т.е.

$$u_m(x)=\sum_{k=1}^{m}\int_0^x\frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}\left(x-\tau\right)^{k-1}\tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau.$$

Докажем, что (13) выполняется при $n=m+1$

$$u_{m+1}(x)=\sum_{k=1}^{m+1}\int_0^x\frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}\left(x-\tau\right)^{k-1}\tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau.$$

Так как

$$u_m(x) = \lambda \int_0^x u_{m-1}(\varepsilon\tau)d\tau + \int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau$$

и

$$u_m(\varepsilon x) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\varepsilon x} \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(\varepsilon x - \tau)^{k-1} \tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau .$$

Тогда

$$u_{m+1}(x) = \lambda \int_0^x \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\varepsilon x} \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(\varepsilon x - \tau)^{k-1} \tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau + \int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau. \qquad (14)$$

Поменяем порядок интегрирование в первом слагаемом и сделаем замену переменных $\tau_1 = \varepsilon\xi$

$$\lambda \int_0^x \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\varepsilon\tau} \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(\varepsilon\tau - \tau_1)^{k-1} \tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau_1)d\tau_1 d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\varepsilon x} \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!} \tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau_1)d\tau_1 \int_{\frac{\tau_1}{\varepsilon}}^{x} (\varepsilon\tau - \tau_1)^{k-1} d\tau = \sum_{k=0}^{m} \int_0^{\varepsilon x} \frac{\lambda^{k}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!} \frac{(\varepsilon x - \tau_1)^k}{\varepsilon k} \tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau_1)d\tau_1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_0^{x} \frac{\lambda^{k}\varepsilon^{\frac{k(k+1)}{2}}}{k!}(x-\xi)^k \tilde{f}(\varepsilon^{k}\xi)d\xi.$$

Меняя в сумме $i = k+1$ получим

$$\sum_{k=1}^{m} \int_0^{x} \frac{\lambda^{k}\varepsilon^{\frac{k(k+1)}{2}}}{k!}(x-\xi)^k \tilde{f}(\varepsilon^{k}\xi)d\xi = \sum_{i=2}^{m+1} \int_0^{x} \frac{\lambda^{i-1}\varepsilon^{\frac{i(i-1)}{2}}}{(i-1)!}(x-\xi)^{i-1} \tilde{f}(\varepsilon^{i-1}\xi)d\xi.$$

Подставляя полученное выражение в (14) и учитывая, что при $n = 1$

$$u_1(x) = \int_0^x \tilde{f}(\tau)d\tau.$$

Меняя знак суммирования i на k, получим

$$u_{m+1}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{x} \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-11)}{2}}}{(k-1)!}(x-\tau)^{k-1} \tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau .$$

В результате решения задачи Коши получим функциональную последовательность $\{u_n(x)\}$. Исследуем свойства данной последовательности.

Свойства решение задачи Коши

Лемма 2. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a,a]$, тогда последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится на $[0,H]$, где $H = \min\left(a, \frac{M}{b}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую бесконечную сумму

$$S(x)=u_1(x)+\left(u_2(x)-u_1(x)\right)+\left(u_3(x)-u_2(x)\right)+\ldots+\left(u_n(x)-u_{n-1}(x)\right)+\ldots \qquad (15)$$

$S_n(x)$ частичная сумма которой совпадает с $u_n(x)$. Для членов данной суммы справедливы следующие оценки

$$|u_2(x)-u_1(x)|\le\left|\lambda\varepsilon\int_0^x(x-\xi)\,\tilde f(\varepsilon\xi)d\xi\right|\le\left|\lambda\varepsilon\int_0^x(x-\xi)\,\tilde f(\xi)d\xi\right|\le\frac{\lambda\varepsilon H^2M}{2}.$$

$$|u_3(x)-u_2(x)|\le\left|\lambda^2\varepsilon^3\int_0^x\frac{(x-\tau)^2}{2}\,\tilde f(\varepsilon^2\tau)d\tau\right|\le\left|\lambda^2\varepsilon^3\int_0^x\frac{(x-\tau)^2}{2}\,\tilde f(\tau)d\tau\right|\le\frac{\lambda^2\varepsilon^3H^3M}{3!}$$

$$\ldots$$

$$|u_n(x)-u_{n-1}(x)|\le\left|\int_0^x\frac{\lambda^{n-1}\varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!}(x-\tau)^{n-1}\,\tilde f(\varepsilon^{n-1}\tau)d\tau\right|\le\left|\int_0^x\frac{\lambda^{n-1}\varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!}(x-\tau)^{n-1}\,\tilde f(\tau)d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{\lambda^{n-1}\varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!}\frac{H^nM}{n!}.$$

Так как $0<\varepsilon\le1$, то сумма (15) мажорируется по абсолютной величине сходящимся числовым рядом $HM\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}H^{k-1}}{(n-1)!}$, сумма которого равна $HM\cdot e^{\lambda HM}$. Тогда по теореме Вейерштрасса $S_n(x)=u_n(x)$ сходится $[0,H]$.

Аналогично можно доказать следующую лемму:

Лемма 3. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a,a]$, тогда последовательность $\{u_n(\varepsilon x)\}$ сходится на $[0,H]$, где $0<\varepsilon\le1$, $H=\min\left(a,\frac{M}{b}\right)$.

Лемма 4. Функциональная последовательность $\{u_n(x)\}$ стремится к непрерывному решению $u(x)$.

Доказательство. Так как все $\{u_n(x)\}$ непрерывны, то из леммы 2 следует непрерывность $u(x)$. Из леммы 3 следует непрерывность $u(\varepsilon x)$.

Используя лемму 2 и лемму 3, можно осуществить предельный переход в (7). Тогда получим решение задачи Коши в виде (6)

$$u(x)=\lambda\int_0^x u(\varepsilon\tau)d\tau+\int_0^x\tilde f(\tau)d\tau.$$

Лемма 5. Интегральное уравнение (6) имеет единственное решение $u(x)\in C([0,H])$.

Доказательство. Предположим, что (6) имеет два решения $u_1(x)$, $u_2(x)$. Обозначим их разность через $z(x)$. Тогда

$$\mathrm{z}(x)=\lambda\int_0^x \mathrm{z}(\varepsilon\tau)d\tau.$$

Так как $0<\varepsilon\le1$, то

$$|\mathrm{z}(x)|=\left|\lambda\int_0^x \mathrm{z}(\varepsilon\tau)d\tau\right|\le\left|\lambda\int_0^x \mathrm{z}(\tau)d\tau\right|\le\lambda\int_0^x|\mathrm{z}(\tau)|d\tau. \qquad (16)$$

Используя лемму Гронуолла – Бельмана [12], получим $z(x)=0$. Отсюда следует, что

$u_1(x)=u_2(x)$.

Из вышесказанных следует следующая теорема:

Основные результаты

Теорема 1. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a,a]$, тогда для конечных положительных λ, решение задачи Коши существует и единственно.

Из (13) следует, что

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(x-\tau)^{k-1}\tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau . \qquad (17)$$

Действительно

$$\frac{du(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(x-\tau)^{k-1}\tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(x-\tau)^{k-1}\tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau+\int_0^x\tilde{f}(\tau)d\tau\right)=\tilde{f}(\tau)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-2)!}(x-\tau)^{k-2}\tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau$$

Поменяем индекс суммы $k=i+1$. Тогда

$$\frac{du(x)}{dx}=\tilde{f}(\tau)+\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{i+1-1}\varepsilon^{\frac{(i+1)(i+1-1)}{2}}}{(i+1-2)!}(x-\tau)^{i+1-2}\tilde{f}(\varepsilon^{i+1-1}\tau)d\tau=$$

$$=\tilde{f}(\tau)+\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{i+1-1}\varepsilon^{\frac{i(i+1)}{2}}}{(i-1)!}(x-\tau)^{i-1}\tilde{f}(\varepsilon^{i}\tau)d\tau=\tilde{f}(\tau)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{i-1}\varepsilon^{\frac{i(i+1)}{2}}}{(i-1)!}(x-\tau)^{i-1}\tilde{f}(\varepsilon^{i}\tau)d\tau .$$

Так как

$$u(\varepsilon x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\varepsilon x} \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(\varepsilon x-\tau)^{k-1}\tilde{f}(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau .$$

Выполним замену переменных $\tau=\varepsilon\xi$, тогда

$$u(\varepsilon x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{x} \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(k-1)!}(x-\tau)^{k-1}\tilde{f}(\varepsilon^{k}\tau)d\tau .$$

Подставляя полученные выражения в (3), получим тождество. Так как $u(0)=0$, то получим что, (17) удовлетворяет и (4).

Значит (17) является решением (3), (4), где $\tilde{f}(x)=f(x)+\lambda\mu$, тогда

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(x-\tau)^{k-1}f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau+\mu\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{x^k}{k!}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(x-\tau)^{k-1}f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau+\mu\left(e_{\varepsilon}^{\lambda x}-1\right).$$

Подставим полученное решение задачи Коши в условие (5)

$$b\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(1-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau + \mu\left(be_\varepsilon^\lambda + a\right) = d.$$

Предположим, что $be_\varepsilon^\lambda + a \neq 0$, тогда

$$\mu = \frac{d}{be_\varepsilon^\lambda + a} - \frac{b}{be_\varepsilon^\lambda + a}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(1-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau . \tag{18}$$

Отсюда

$$\text{y}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(x-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau + $$

$$+\frac{e_\varepsilon^{\lambda x}}{be_\varepsilon^\lambda + a}\left(d - b\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(1-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau\right). \tag{19}$$

Теорема 2. Если $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, λ конечное положительное число и $be_\varepsilon^\lambda + a \neq 0$, тогда решение краевой задачи (1), (2) определяется в виде (19).

Доказательство.

$$\text{y}(\varepsilon x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\varepsilon x} \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(\varepsilon x-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau + $$

$$+\frac{e_\varepsilon^{\lambda\varepsilon x}}{be_\varepsilon^\lambda + a}\left(d - b\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(1-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau\right). \tag{20}$$

$$\text{y}'(x) = f(x) + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(k-1)!}(x-\tau)^{k-1} \tilde{f}(\varepsilon^{k}\tau)d\tau + $$

$$+\frac{\lambda e_\varepsilon^{\lambda\varepsilon x}}{be_\varepsilon^\lambda + a}\left(d - b\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(1-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau\right). \tag{21}$$

Подставляя (20) и (21) в (1) получим, что (19) удовлетворяет (1). Определим

$$\text{y}(0) = \frac{1}{be_\varepsilon^\lambda + a}\left(d - b\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(1-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau\right). \tag{22}$$

$$\text{y}(1) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(1-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau + $$

$$+\frac{e_\varepsilon^{\lambda}}{be_\varepsilon^\lambda + a}\left(d - b\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\lambda^{k-1}\varepsilon^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(k-1)!}(1-\tau)^{k-1} f(\varepsilon^{k-1}\tau)d\tau\right). \tag{23}$$

Подставляя (22), (23) в граничное условие (2), получаем тождество, т.е. (19) удовлетворяет и граничное условие.

Непрерывность, легко доказывается с помощью леммы 4.

Заключение

В данной работе методом параметризации были изучены вопросы разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения типа пантографа. Применяя метод параметризации, от исходной краевой задачи переходим к задаче Коши. Разрешимость полученной задачи Коши устанавливается методом последовательных приближении. Доказывается сходимость полученных решения к решению исходной задачи. Полученные результаты в дальнейшем, могут быт использованы для исследования разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнении типа пантографа, а также могут найти применения в механике, технике и нанотехнологиях.

This research has been/was/is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan *(Grant No. AP23488086)*

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. K. Mahler. On a special functional equation. J. London Math. Soc. – 1940. -1(2). - P. 115-123.
2. L. Fox, D. F. Mayers, J. R. Ockendon and A. B. Tayler. On a functional differantical equation. IMA Journal of Applied Mathematics. – 1971. - 8(3). -P. 271-307.
3. G R Morris, A Feldstein, and E W Bowen, The Phragmen Lindelof principle and a class of functional differential equations. Ordinary Differential Equations// Academic Press, New York. – 1972. – P. 513-540.
4. Быков Я.В., Быкова Л.Я., Шевцов Е.И. Достаточные условия осцилляторности решений нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. - 1973. - Т. 9, - № 9. - С. 1555–1560.
5. Родионов В.И. Аналог функции Коши для обобщенного уравнения с несколькими отклонениями аргумента // Дифференц. уравнения. - 2013. - Т. 49, - № 6. - С. 690–706.
6. A.Iserles, Yunkang Liu. Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, 1995
7. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics. -1989. -Vol.29, - No. 1. - P. 34-46.
8. Джумабаев Д.С. Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. - 2010. - Т. 50, - № 7. - С. 1209-1221.
9. Dulat Dzhumabaev, "Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2018. - 41(4). - P. 1439-1462.
10. Nazarova K.Zh., Usmanov K.I. Unique solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution // AIP Conference Proceedings. – 2021. – 2365(070012).
11. K. Nazarova, K. Usmanov., On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution // International Journal of Applied Mathematics. - 2021. – Vol.34. - P. 225-235.
12. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2018. - 344 с.

REFERENCES

1. K Mahler. On a special functional equation. J. London Math. Soc. – 1940. -1(2). - P. 115-123.
2. L Fox, D F Mayers, J R Ockendon and A B Tayler. On a functional differantical equation. IMA Journal of Applied Mathematics. – 1971. - 8(3). -P. 271-307.
3. G R Morris, A Feldstein, and E W Bowen, The Phragmen Lindelof principle and a class of functional differential equations. Ordinary Differential Equations// Academic Press, New York. – 1972. – P. 513-540.

4. Bykov Ya.V., Bykova L.Ya., Shevtsov E.I. Sufficient conditions for the oscillatory nature of solutions of nonlinear differential equations with deviating argument // Differents. Equations. - 1973. - T. 9, - No. 9. - P. 1555–1560.
5. Rodionov V.I. Analogue of the Cauchy function for a generalized equation with several deviations of the argument // Differents. Equations. - 2013. - T. 49, - No. 6. P. 690–706.
6. A.Iserles, Yunkang Liu. Integro-differential equations and generalized hypergeometric functions. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, 1995
7. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics. -1989. -Vol.29, - No. 1. - P. 34-46.
8. D. S. Dzhumabaev, “On a method for solving a linear boundary value problem for an integrodifferential equation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, - 2010. - T. 50, - № 7. - P. 1209-1221.
9. Dulat Dzhumabaev, “Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* – 2018. - 41(4). - P. 1439-1462.
10. Nazarova K.Zh., Usmanov K.I. Unique solvability of the boundary value problem for integro-differential equations with involution // AIP Conference Proceedings. – 2021. – 2365(070012).
11. K. Nazarova, K. Usmanov., On a boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution // International Journal of Applied Mathematics. - 2021. – Vol.34. - P. 225-235.
12. Arnold V.I. Ordinary differential equations. M.: MTsNMO, 2018. - 344 p.