МРНТИ 14.25.07
ӘОЖ 373.1:372.8.51
https://doi.org/10.47526/2024-1/2524-0080.02

А.Б. ТӨЛЕГЕН[1], М.Д. КОШАНОВА[2]
[1]Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің магистранты (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: aruzh.t@gmail.com
[2]техника ғылымдарының кандидаты, доцент
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

МАТЕМАТИКАНЫҢ ТАҢДАМАЛЫ ЕСЕПТЕРІН ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

Аңдатпа. Мақалада математиканың таңдамалы есептері туралы қысқаша түсінік берілді, таңдамалы есептер қамтылатын тараулар қарастырылды және таңдамалы есептердің шығарылуы нақты мысалдармен көрсетілді. Математиканың таңдамалы есептері ұзақ жылдар бойы жүргізілген жоғары оқу орнының студенттері мен мектеп оқушыларының математикалық олимпиада есептері бойынша жинақталғаны, белгілі. Сонымен қатар, таңдамалы есептерді шығару арқылы мектептің жоғары сынып оқушылары жоғары оқу орнында өтілетін жоғары математика элементтерімен таныстығын бастайды. Зерттеу жұмысын жүргізу кезінде математиканың таңдамалы есептері зерттелген әдебиеттерді талдау, таңдамалы есептерге педагогикалық талдау, бақылау, педагогикалық эксперимент жүргізілді. Жалпы орта мектептерде тереңдетілген оқу арқылы оқушылардың математикаға деген қызығушылығын арттыру және қолдау үшін элективті курс әдістемесін жасау талқыланды. Зерттеу барысында мектептің 10-11 сынып оқушылары үшін мақалада қарастырылған есептерден бақылау жүргізілді. Нәтижесінде жалпы оқушылардың таңдамалы есептерді шығару барысында қиындық туындайтынын байқадық. Элективті курстарда осы мәселені талқылап, шығару тәсілдері қарастырылды. Бұл мақала және зерттеу нәтижелері жалпы білім беретін мектептердің мұғалімдеріне, жас мамандарға, жас ғалымдарға және де болашақта математика саласында ғылыммен айналысамын деген оқырмандарға пайдалы болады.

Кілт сөздер: элективті курс, элективті курсты әзірлеу алгоритмі, таңдаулы есептер, талдау, бақылау, эксперимент.

А.Б. Толеген[1], М.Д. Кошанова[2]
[1]магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжа Ахмет Ясави, (Казахстан, г. Туркестан), e-mail: aruzh.t@gmail.com
[2]кандидат технических наук, доцент
Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан), E-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz

Методы решения избранных математических задач

Аннотация. В статье дается краткое изложение избранных математических задач, рассматриваются главы, охватывающие избранные задачи, и на конкретных примерах демонстрируется способы решения избранных задач. Известно, что избранные математические задачи обобщены по математическим олимпиадным задачам студентами вуза и школьниками, которые проводились в течение многих лет. Кроме того, путем решения избранных математических задач старшеклассники школы начинают знакомство с элементами высшей математики, которые проходят в вузе. При проведении исследовательской работы проводились выборочные математические задачи анализ изученной литературы, педагогический анализ избранных задач, наблюдение, педагогический эксперимент. Обсуждалось создание методики элективного курса для повышения и поддержки интереса учащихся к математике посредством углубленного изучения в общеобразовательных школах. В ходе исследования для учащихся 10-11 классов школы был проведен контрольные работы из задач, рассмотренных в статье. В результате мы заметили, что в целом у учащихся возникают трудности при решении избранных задач.На элективных курсах обсуждали этот вопрос и рассматривали способы решения. Данная статья и результаты исследования будут полезны учителям общеобразовательных школ, молодым ученым, читателям, которые в будущем будут заниматься наукой в области математики.

Ключевые слова: элективный курс, алгоритм разработки элективного курса, избранные задачи, анализ, наблюдение, эксперимент.

A.B. Tolegen[1],M.D. Koshanova[2]

[1]Master's Student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkestan), e-mail:aruzh.t@gmail.com

[2]candidate of technical sciences, docent Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkestan), e-mail:maira.koshanova@ayu.edu.kz

Methods for solving selected mathematical problems

Annotation. The article provides a summary of selected mathematical problems, discusses chapters covering selected problems, and demonstrates ways to solve selected problems using concrete examples. It is known that the selected mathematical problems are generalized by mathematical Olympiad problems by university students and schoolchildren, which have been conducted for many years. In addition, by solving selected mathematical problems, high school students begin to get acquainted with the elements of higher mathematics that take place at the university. During the research work, selective mathematical problems were carried out, the analysis of the studied literature, pedagogical analysis of selected tasks, observation, pedagogical experiment. In the course of the study, control works were carried out for students of grades 10-11 of the school from the tasks discussed in the article. As a result, we noticed that, in general, students have difficulties in solving selected tasks.Elective courses discussed this issue and considered ways to solve it. This article and the results of the study will be useful to teachers of secondary schools, young scientists, readers who will be engaged in science in the field of mathematics in the future.

Keywords: elective course, , algorithm for developing an elective course, selected tasks, analysis, observation, experiment.

Кіріспе

Жалпы білім беретін мектептерде білім беру үдерісінде математикалық есептерді шешуді үйретудің әдістемесінің жасалуы және оқушылардың есептерді шешу дағдысын меңгеру қажеттілігі арасында қарама қайшылықтар кездесіп жатады. Мектеп оқушыларының есептерді шығару біліктілігін арттыру қазіргі заманның талабы болып отыр. Есептерді тиімді тәсілдермен шешу арқылы математиканы оқытудың әдістемесін жетілдіру, математиканы оқытуда есептердің ролі мен орнын анықтауда көптеген ғалымдар зерттеулер жүргізген. Оқушылардың шығармашылық дамуы үшін математиканың таңдаулы есептерін шешу өте маңызды. Қиын математикалық есептерді шешу үшін, оқушылардың мұндай есептерді шешуде тәжірибесінің, оларды шешу әдістері мен оларға түрлендірулер пайдалана білу қабілеттіліктерін мол болуы талап етіледі. Таңдамалы есептер, яғни стандартты емес есептер – нақты бір шешу алгоритмі жоқ есептер. Сондықтан мұндай есептерді шешу кезінде оқушыларда математикалық мәдениет, ой – өрісінің тереңдігі дамиды. Қорыта айтқанда, стандартты емес есептер оқушылардың интеллектуалдық мүмкіндіктерін арттырады, ал стандартты есептер мұндай мүмкіндікті бермейді. Профессор Отто Данкел (1869-1951) өзінің өмірінің 28 жылын осы математиканың таңдамалы есептерін зерттеумен айналысқан. Ол 1919-1946жж. аралығында «American Mathematical Monthly» атты журналға редактор болып қызмет атқарды, кейіннен 1936 жылдан бастап осы журналды басқарады. О.Данкел өмірден өткен соң, Американың математиктерінің ассоциациясының жетекшілігімен оның жинақтаған 400 таңдаулы есептерінен мемориалды жинақ ретінде жариялады. Математиканың таңдаулы есептерін таңдап алу оңай болмады, сондықтан сол кездегі атақты математиктер арасында сауалнама жүргізіліп, дауыс беру арқылы анықталды. Математиканың таңдаулы есептері қатарына көп жылдар бойы студенттердің және мектеп оқушыларының математикалық олимпиадаларында ұсынылған есептер жинақталды. Таңдамалы есептер есептің мазмұнына, шығарылу тәсілдеріне қарай тарауларға бөлінді. Есептер арасында кейбірі сәтті құрылған, кейбірі оңай, ал кейбірі шығарылу жолы қиындық туғызатын есептер де кездеседі. Таңдамалы есептерде, әсіресе, математикалық талдау және алгебра курсы бойынша есептер кездеседі, ол есептер анықтауыш есептеуге, күрделі интеграл есептеуге және жай дифференциалдық теңдеулерді шешуге, қатарлардың жинақтылығын зерттеуге арналған. Ал кейбір есептерде сандар теориясының элементтері қамтылған, яғни бөлінгіштік, диофанттық теңдеулерді шешу т.с.с. Мысалы кейбір есептерде сферадағы бүтін нүктелер санын есептеу де қарастырылған. Сонымен қатар таңдамалы есептер қатарына қазіргі заманауи есептердің бірі – сызба геометриясының есептері де қамтылған, яғни бір параболаға жанасатын түзу туралы есепті айтуға болады.

Зерттеу әдістері

Зерттеудің нысаны стандартты емес және олимпиадалық есептерді шешу жолдары. Зерттеу Түркістан қаласындағы «TULGA» жалпы орта мектебінде 10-11 сынып оқушылары арасында жүргізілді.

Ғылыми зерттеу жұмысын жүргізу кезінде, тақырып пен тапсырмалардың күрделігі бойынша ***педагогикалық талдау***, берілген материалды оқушының меңгеру деңгейін ***бақылау***, математикалық анализ элементеріне қатысты тарауларды оқытуда оқушылардың қызығушылығын арттыру мақсатында ***педагогикалық эксперимент әдістері*** қолданылды.

Материалды оқып-үйрену процесінде ақпараттық-әдістемелік материалмен өзіндік жұмыс жасау арқылы оқушылардың өзін-өзі дамытуы, оқытудың дәстүрлі түрлері де қолданылады.

Сабақтар мүмкіндігіне қарай теориялық және практикалық бөлімдерден тұрады. Сабақтарды өткізудің негізгі формалары: әңгімелесу, пікірталас, кеңес беру, практикалық жаттығу, жобаны қорғау. Оқушылардың өзіндік жұмысына ерекше мән беріледі, онда мұғалім тақырыпты зерделеудің әртүрлі кезеңдерінде әртүрлі рөлдерді атқарады, оқушылардың жұмысын нақты бақылап, бағыттайды.

Педагогикалық эксперимент ретінде аталған әдістерді жекелеген оқушыларға түсіндіре отырып, берілген әдіс бойынша оқушының жетістігіне қарай тиімдісі анықталды.

Талдау мен нәтижелер

Экспериментке Түркістан қаласындағы «TULGA» жалпы орта мектебінде 10-11 сынып оқушылары арасында жүргізілді. Олардың жалпы саны 20 болатын.

Эксперимент күнделікті оқу бағдарламасына қосымша ретінде 10 сынып оқушылары үшін аптасына 1 рет, 11 сынып оқушылары үшін аптасын 1 рет жүргізіліп отырды.

Төменде эксперимент барысында қарастырылған математиканың таңдамалы есептеріне бірнеше мысал қарастырайық. Бұл есептер 1967 жылғы Ломоносов атындағы Мәскеу Мемлекеттік университетінің математика механика факультетіне түсетін талапкерлер үшін дайындалған тапсырмалардан алынды [9].

Есеп -1. $\log_{100} x^2 = \log_{\sqrt{x}} 10\left(\lg 10a - \left|\lg\frac{x}{a}\right|\right)$ (1) теңдеуінің шешімі

болатындай a параметрінің барлық мүмкін мәндерін табыңыз.
Шешуі: Берілген теңдеу келесі теңдеумен эквивалентті екені анық

$$\frac{lg^2 x - 2\left(1+\lg a - \left|\lg\frac{x}{a}\right|\right)}{\lg x} = 0$$

1-ден өзгеше бөлшектің алымының барлық түбірлері берілген теңдеудің де түбірі болып табылады. Сонымен, теңдеудің шешімін табайық

$$\lg^2 x - 2\left(1+\lg a - \left|\lg\frac{x}{a}\right|\right) = 0$$

немесе

$$\lg^2 x - 2 - 2\lg a + 2\left|\lg x - \lg a\right| = 0 \qquad (2)$$

1-жағдай. $\lg x \geq \lg a$. (2) теңдеуі $\lg x$ -ке қатысты келесі квадраттық теңдеуге эквивалентті:

$$\lg^2 x + 2\lg x - 2 - 4\lg a = 0 \qquad (3)$$

Оның дискриминантты: $\Delta = 3 + 4\lg a$. (3) теңдеудің түбірлері тек $\Delta \geq 0$ болғанда ғана орынды, яғни $\lg a \geq -\frac{3}{4}$. Егер $\lg a = -\frac{3}{4}$, яғни $\Delta = 0$ болса, онда (3) теңдеуінің түбірлері: $\lg x = -1$; онда $\lg x \geq \lg a$ шарты орындалмайды. Ендеше, параметр мәні $a = 10^{-\frac{3}{4}}$ болғанда, берілген теңдеудің мұндай $\lg x \geq \lg a$ шарты орындалатындай түбірлері болмайды.

Енді $\lg a > -\frac{3}{4}$ деп есептейік. Сонда (3) теңдеудің шешімдері $\lg x$-ке қатысты нақты және әртүрлі түбірлері бар болады; $\lg x = \lg a$ (3) теңдеуінің түбірі болады, тек сонда ғана келесі теңдік орындалған жағдайда

$\lg^2 a - 2\lg a - 2 = 0$, яғни тек қана $\lg a = 1 \pm \sqrt{3}$ болса ғана (3) теңдеудің түбірлері болады екен.

Берілген теңдеуінің $(\lg x = \lg a)$ түбірлері: $x = 10^{1-\sqrt{3}}$, егер $a = 10^{1-\sqrt{3}}$ және $x = 10^{1+\sqrt{3}}$, егер $a = 10^{1+\sqrt{3}}$.

Енді келесі теңсіздікті де орынды деп есептейміз.

$\lg a > -\frac{3}{4}, \lg a \neq 1-\sqrt{3}, \lg a \neq 1+\sqrt{3}.$ (3) теңдеуінің түбірлері нақты және әртүрлі болады, сонда тек сонда ғана олардың біреуі де $\lg a$–ға тең болмаса ғана деген қорытындыға келеміз.

1 жағдайда (3) теңдеудің ($\lg a > -\frac{3}{4}, \lg a \neq 1-\sqrt{3}, \lg a \neq 1+\sqrt{3}$ шартын қанағаттырғанда) $\lg x$-ке қатысты екі түбірі бар болады, тек қана келесі теңсіздіктер жүйесі орындалған кезде, яғни

$$\begin{cases} \left(\lg^2 x + 2\lg x - 2 - 4\lg a\right)_{\lg x = \lg a} > 0, \\ \left(2\lg x + 2\right)_{\lg x = \lg a} < 0 \end{cases}$$

(3) теңдеудің нақты түбірлері болуы үшін, бұл теңсіздіктер жүйесінің екінші теңсіздігі $\lg a > -\frac{3}{4}$ шартына қайшы келеді.

1 жағдайында (3) теңдеуі ($\lg a > -\frac{3}{4}, \lg a \neq 1-\sqrt{3}, \lg a \neq 1+\sqrt{3}$ шарттарын қанағаттандырғанда) $\lg x$–ке қатысты екі шешімі бар, олардың бірі $\lg a$–тен үлкен, ал екіншісі $\lg a$–дан кіші болады, сонда тек қана сонда

$$\left(\lg^2 x + 2\lg x - 2 - 4\lg a\right)_{\lg x = \lg a} < 0,$$

яғни

$$1-\sqrt{3} < \lg a < 1+\sqrt{3}.$$

Бұл теңдеудің түбірі (3) теңдеудің үлкен түбірі болады, яғни

$$\lg x = \sqrt{3+4\lg a} - 1.$$

Бірақ $\lg x = \sqrt{3+4\lg a} - 1 = 0$ шарттарынан $\lg a = -\frac{1}{2}$ болатынын табамыз, яғни $a = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Бұл сан $\left(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$ аралығында жатады, сондықтан да $x = 10^{\sqrt{3+4\lg a}-1}$ берілген теңдеудің түбірі болады, егер $1-\sqrt{3} < a < \frac{1}{\sqrt{10}}$ немесе $\frac{1}{\sqrt{10}} < a < 1+\sqrt{3}$.

2 жағдай. $\lg x = \lg a$. (2) теңдеу келесі теңдеуге эквивалентті:

$\lg^2 x - 2\lg x - 2 = 0,$ бұдан $\lg x = 1 \pm \sqrt{3}.$

Ендеше, егер $\lg a \le 1 - \sqrt{3}$ болса, онда берілген теңдеудің $\lg x < \lg a$ қанағаттандыратындай түбірлері болмайды. Егер $1 - \sqrt{3} < a \le 1 + \sqrt{3}$ болса, онда берілген теңдеудің түбірі $x = 10^{1-\sqrt{3}}$ болады, ал егер $\lg a > 1 + \sqrt{3}$ болса, онда берілген теңдеудің шешімі $x = 10^{1-\sqrt{3}}, x = 10^{1+\sqrt{3}}$.

Есеп -2. Лабораторияға сыйымдылығы 100 л. болатын бірдей сфералық колбаның бірнешеуіне тапсырыс беру қажет. Бір колбаның көлемі колбаның бетінің квадратына пропорционал ұста еңбегінің құнына қосылады, және материалдың құны оның бетіне пропорционал қосылады. Сонымен қатар көлемі 1 л. колба 125 теңгеге түседі, және бұл жағдайда еңбек құны колбаның құнының 20% құрайды (колбаның қабығының қалыңдығы жұқа деп есептеледі). Жасалған колбаның құны ең арзан болуы үшін қанша колба жасау керек?

Шешімі: r, s және v арқылы сәйкесінше сфералық колбаның радиусын, бетінің ауданын және көлемін белгілейміз, ал r_0, s_0 және v_0 арқылы көлемі 1 л-ге тең сфералық колбаның радиусын, бетінің ауданын және көлемін белгілейміз. Сонда

$$\frac{s}{s_o} = \frac{r^2}{r_0^2}; \frac{v}{v_o} = \frac{r^3}{r_0^3}, \text{бұдан } \frac{s}{s_o} = v^{\frac{2}{3}}.$$

Бір колбаның құны (теңгемен) мынаған тең $\frac{5}{4} = ps_o^2 + qs_o,$,мұндағы p және q - пропорционалдық коэфиценттері.

Есептің шарты бойынша: $ps_o^2 = \frac{1}{4}$ (тенге); бұдан $p = \frac{1}{4s_o^2}, q = \frac{1}{s_o}.$

Көлемі v бір колбаның құны мынаған тең:

$$ps^2 + qs = \frac{1}{4s_o^2}s^2 + \frac{1}{s_o}s = \frac{1}{4}v^{\frac{4}{3}} + v^{\frac{2}{3}},$$

ал барлық колбаның құны

$$T = \left(\frac{1}{4}v^{\frac{2}{3}}\right)\frac{100}{v} = 100\left(\frac{1}{4}v^{\frac{1}{3}}\right).$$

x-колбалар саны болсын. Сонда $v = \frac{100}{x}$, ал олай болса,

$$T = 100\left[\frac{1}{4}\left(\frac{100}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{100}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\right] = 100\left[\frac{1}{2}\left(\frac{100}{x}\right)^{\frac{1}{6}} - \left(\frac{100}{x}\right)^{-\frac{1}{6}}\right]^2 + 100.$$

Бұдан шығатыны, x-тің T функциясы ең кіші мәнін тек қана мына жағдайда ғана қабылдайды, яғни

$$\frac{1}{2}\left(\frac{100}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-\left(\frac{100}{x}\right)^{-\frac{1}{6}}=0, \text{ бұдан } \Rightarrow x=12,5.$$

Бірақ колбалар саны 12,5-ке тең болуы мүмкін емес. Есептің шешімін табу үшін $T=100\left[\frac{1}{4}\left(\frac{100}{x}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{100}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]$ функциясының $(0;12{,}5]$-жартылай интервалында кемімелі, $[12{,}5;+\infty)$-жартылай интервалында өспелі болатынын дәлелдеуіміз керек. Сонда ең тиімді жауаптың шешімі не x=12, не x=13 болатыны анық.

Мынаны есептеп табамыз:

$$T(x_2)-T(x_1)=25\left[\left(\frac{100}{x_2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\times\frac{\left(\frac{100}{x_2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{100}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}}-4}{\left(\frac{100}{x_2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{100}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

$T(x_2)-T(x_1)$ айырмасының таңбасы төмендегі айырманың таңбасымен анықталады

$$\left(\frac{100}{x_2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{100}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}}-4 \text{ немесе } \frac{10000}{x_1\cdot x_2}-64=64\cdot\frac{12{,}5^2-x_1x_2}{x_1\cdot x_2}.$$

$0<x_1<x_2\le 12{,}5$ деп есептеп, мынаны табамыз: $T(x_2)-T(x_1)<0$.

Сонымен, $T(x)$ функциясы $(0;12{,}5]$ жартылай интервалында кемімелі екені шығады. Егер де $12{,}5\le x_1<x_2$ болса, онда $T(x_2)-T(x_1)>0$, ендеше $T(x)$ функциясы $[12{,}5;+\infty)$ жартылай интервалында өспелі екендігі шығады.

Бұл дәлелдеулерден, 12 не 13 колба жасау керек деген шешім шығады. Есептің толық шешімін алу үшін 12 колба, не 13 колба жасау үшін кеткен құнын салыстырамыз, және олардың айырмасын аламыз. Бұл айырма

$$T(13)-T(12)=25\left[\left(\frac{100}{13}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{100}{12}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\cdot\frac{\left(\frac{100}{13}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{100}{12}\right)^{\frac{1}{3}}-4}{\left(\frac{100}{13}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{100}{12}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\left(\frac{100}{13}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{100}{12}\right)^{\frac{1}{3}}<0$$

болғандықтан, $T(13)-T(12)$ айырмасының таңбасы

$$\left(\frac{100}{13}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{100}{12}\right)^{\frac{1}{3}} - 4,$$

өрнегінің таңбасымен анықталады. Немесе

$$\frac{10000}{13 \cdot 12} - 64 = \frac{100006 - 64 \cdot 13 \cdot 12}{13 \cdot 12} = \frac{10000 - 9984}{156} = \frac{4}{39} > 0.$$

Ендеше, $T(13) - T(12) < 0,$ яғни $T(13) < T(12).$ Жуық шамамен $T(13) - T(12) = 0{,}07$ теңге.

Есеп-3. Берілген өрнектің
$2\cos 2t + 4\sin 2x \sin t + 2\sin(x + y) - (\sin 2x - 1)^2$
мәні 1-ден үлкен болатын ең болмағанда *t*-ның бір мәні болатындай координаталық жазықтықта координаталары (x, y) болатын барлық нүктелерді көрсету керек және осы нүктелермен құралған облысты бейнелеу керек.
Шешуі: Берілген теңсіздікті түрлендірейік.
$2\cos 2t + 4\sin 2x \sin t + 2\sin(x + y) - (\sin 2x - 1)^2 > 1$
келесі түрге түрлендіреміз:
$2 - 4\sin^2 t + 4\sin 2x sint + 2\sin(x + y) - \sin^2 2x + 2\sin 2x - 1 > 1,$
немесе
$2[\sin(x + y) + \sin 2x] - (2\sin t - \sin 2x)^2 > 0.$

Егер болса, $\sin(x + y) + \sin 2x \le 0$ болса, онда соңғы теңсіздіктің сол жағы барлық нақты *t*-ның мәндері үшін оң емес.

Егер де $\sin(x + y) + \sin 2x > 0$ болса, онда мысалы $t = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$ болғанда мынаны аламыз

$$2[\sin(x + y) + \sin 2x] - (2\sin t - \sin 2x)^2 = 2[\sin(x + y) + \sin x] > 0.$$

Сонымен, есептің шарттарын қанағаттандыратын координаталары (x, y) барлық нүктелері мына теңсіздіктің шешімдері болатын нүктелер болады екен:
$\sin(x + y) + \sin 2x > 0$ немесе $\sin\frac{3x + y}{2}\cos\frac{y - x}{2} > 0.$

Бұл теңсіздіктің шешімі келесі теңсіздіктің шешімімен пара-пар: $\sin\frac{3x + y}{2} > 0$ яғни: $4k\pi < 3x + y < 4\pi k + 2\pi,$ ал мына теңсіздіктің $\sin\frac{3x + y}{2} < 0$ барлық шешімдері: $4\pi s - 2\pi < 3x + y < 4\pi s,$ мұндағы k және s барлық бүтін мәндерді қабылдайды.

Ал мына теңсіздіктің $\cos\frac{y - x}{2} > 0$ шешімдері: $-\pi + 4\pi n < y - x < \pi + 4\pi n,$ мына теңсіздіктің $\cos\frac{y - x}{2} < 0$ шешімдері: $\pi + 4\pi m < y - x < 3\pi + 4\pi m,$ мұндағы m және n барлық бүтін мәндерді қабылдайды.
(1) теңсіздікті қанағаттандыратындай барлық (x, y) нүктелерінің жиыны мына түрде жазылады. Түзулерді салайық:

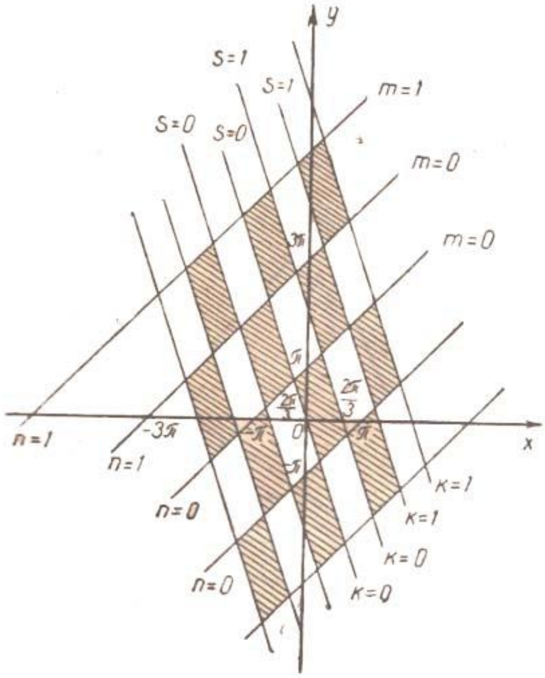
$$\begin{cases} 3x+y=4\pi k, \\ 3x+y=4\pi k+2\pi \end{cases} \quad \text{(A)} \qquad \begin{cases} y-x=4\pi n-\pi, \\ y-x=4\pi n+\pi. \end{cases} \quad \text{(B)}$$

және мына түзулерді

$$\begin{cases} 3x+y=4\pi s-2\pi, \\ 3x+y=4\pi s. \end{cases} \quad \text{(C)} \qquad \begin{cases} y-x=4\pi m+\pi, \\ y-x=4\pi m+3\pi. \end{cases} \quad \text{(D)}$$

Кез келген екі (A) параллель түзулер (кез келген бүтін k үшін) және екі (B) параллель түзулер (кез келген бүтін n үшін) паралеллограмм құрайды, яғни барлық ішкі нүктелерінің қанағаттандырады.

Тура сол сияқты (C) және (D) теңдеулері үшін де (түзулер) паралеллограмм құрылады. Барлық көрсетілген паралеллограмдардың ішкі нүктелерінің барлығынан (1) теңсіздіктің барлық шешімдерін алып тастаймыз, сол кезде біздің ізделінді жауабымыз келіп шығады (Сурет-1).



Сурет-1.Паралеллель сызықтардан құралған алеллограмм.

Есеп-4. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табаны центрі пирамиданың төбесі болатын шармен жанасады, пирамиданың ішінде шардың бетінің $\frac{1}{10}$ бөлігі жатады. Пирамида мен шардың көлемдерінің қатынасын табыңыз.

Шешуі: $A\breve{B}C$ сфералық үшбұрышының $A+B+C$ бұрыштарының қосындысы (яғни сфералық шеңбердің үлкен доғаларымен құралған үшбұрыш) оның x ауданымен мына қатынас арқылы байланысқан:

$A+B+C-\pi=\frac{x}{r^2}$, (1) мұндағы r-сфераның радиусы.

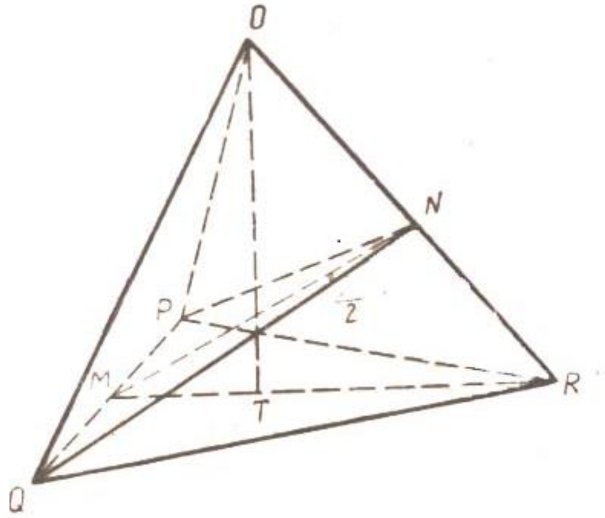
Берілген пирамиданың барлық екі жақты бұрыштары өзара тең болады, онда (1) формуладағы $r=1$ десек, мынаны аламыз $3A=\pi+x$, мұндағы x-берілген пирамиданың бүйір жақтарының сферадан шығып тұрған сфералық үшбұрыштың ауданы.

$r=1$ шарты бойынша, сфераның бетінің ауданы 4π -ға тең болса, ал x ауданы есептің шарты бойынша осы шаманың $\frac{1}{10}$ бөлігіне тең болса, онда $3A=\pi+\frac{4\pi}{10}, \Rightarrow$ бұдан $A=\frac{4\pi}{15}$.

Ішкі екі жақты бұрыштың шамасы қабырғасы пирамиданың бүйір қабырғасы болатын шама. Пирамиданың табанында PQR үшбұрышы жатыр деп есептейік, ал O нүктесі оның төбесі болсын (Сурет-2). PQ түзуі арқылы OR түзуіне перпендикуляр ($PQ \perp OR$ болғандықтан, бұл мүмкін болады) жазықтық саламыз. Бұл жазықтық OR қабырғасын N нүктесінде қиып өтетін болсын. M арқылы PQ кесіндісінің ортасын белгілейік.

$OT=1$ болғандықтан, $OR=l$ деп және $PR=a$ деп алсақ, мынаны аламыз:

$1\cdot MR = MN\cdot l,\;\; MQ = MN\cdot tg\,\frac{A}{2}.$



Сурет-2.Үшбұрышты пирамида.

Бірінші теңдікті екінші теңдікке мүшелеп бөлсек, мынаны аламыз $\sqrt{3}=\frac{l}{tg\frac{A}{2}}$;

OTR-дан $1+\frac{a^2}{3}=3tg^2\frac{A}{2}$,

бұдан $a^2=3\left(3tg^2\frac{A}{2}-1\right)=6\cdot\frac{1-2\cos A}{1+\cos A}$; және сондықтан

$OPQR$ пирамидасының υ_n көлемі мынаған тең: $\upsilon_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-2\cos A}{1+\cos A}$

Шардың көлемі мынаған тең $\upsilon_ш=\frac{4}{3}\pi$, ендеше,

$$\frac{\upsilon_n}{\upsilon_ш}=\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\cdot\frac{1-2\cos A}{1+\cos A}=\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\cdot\frac{1-2\cos\frac{7\pi}{15}}{1+\cos\frac{7\pi}{15}}=\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\cdot\frac{1+\cos\frac{8\pi}{15}}{1-\cos\frac{8\pi}{15}}=\frac{3\sqrt{3}}{32\pi}\cdot\left[40+12\sqrt{5}-3\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$

$\frac{8\pi}{15}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}$ екендігін ескереміз.

$\cos\frac{\pi}{5}$ мәнін есептеуде мына формула пайдаланылды $\cos\frac{\pi}{5}=\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Оны былай түрлендіруге болады:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}==\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{10}}\cdot\sin\frac{2\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)-\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{1}{2};$$

Сонымен, $\cos\frac{\pi}{5}$ және $-\cos\frac{2\pi}{5}$ мына квадраттың теңдеудің түбірлері болады: $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0.$

Зерттеу нәтижесінде келесі нәтижелер де алынды

Зерттеулер қорытындысы бойынша математиканың таңдамалы есептері бойынша жалпы білім беретін мектептерде оқушылардың математикалық білімін арттыру мақсатында «Математиканың таңдамалы есептері» атты элективті курс енгізіп, бағдарламасын мектептің әдістемелік кеңесіне ұсыну жоспарланды. Элективті курс мақсаты тақырып бойынша тұтас түсінік құру және оқушылар үшін орындалатын тапсырмалар ауқымын айтарлықтай кеңейту болып табылады.

Оқушылардан алынған нәтижелерді бақылай отырып, жалпы білім беретін мектептерде таңдамалы есептерді шығару барысында оқушылар қиындықтарға кездесетіні анықталды. Мектеп бағдарламасындағы тригонометриялық өрнектер, логарифм қасиеттерін қарапайым есептерде қолдана алғанымен, таңдамалы есептерді шешуде ауқымды көлемде қолданар кезде кедергілер орын алды. Атап айтқанда, 1-мысалды шығару барысында оқушылар шешімнің бір бөлігін жоғалтады және логарифмдік функция тек оң мән ретінде анықталатынын ескермейді, бұл бастапқы теңсіздіктің мағынасы жоқтығына әкеледі. Екінші мысалды шешу барысында есептің берілгеніне дұрыс мән бере алмаған. Келесі мысалдарда есептің құрылымын құрып, шығара алғанымен уақыт тапшылығына кезіккені, байқалды.

Қорытынды

Математикадан өтілетін факультативтік сабақтарда оқушылардың қызығушулығын қалыптастыруға, еңбек дағдысын, ізденімпаздығын арттыруға, өзінің мектеп бағдарламасы бойынша алған білімін дамыта отырып, оның өмірге қажеттілігін айқындауға, қолдана білуге дағдылантуға баулу керек. Мектеп курсындағы математиканың мәні оның көп қырлылығында, яғни негізгі объектілері нақты өмірге негізделгендігінде болып табылады. Сондықтан бағдарламадан тыс математиканың таңдамалы есептерін шығару оқушылардың білім жүйесін және ойлау қабілетін кең түрде дамытады деп есептеймін.

Жалпы білім беретін мектептің 10-11 сынып оқушыларынан облыстық олимпиада, республикалық сайыстардың, халықаралық математика пәнінен сұрақтарды бақылау түрінде алынды. Барлығы 20 оқушы қатысып, жалпы 4 есеп алынды. Курстың соңында бастапқыда берілген тақырыптардан есептер алынды. Тек сандық өзгерістер ғана орын алды. Курстың соңында оқушылардың білім деңгейі –27%-дан 49%-ға көтерілді.

Мұғалімнің жетекші рөлімен мектеп оқушылары өздері үшін жаңа қасиеттерді өз бетінше тұжырымдап, тіпті дәлелдей алады. Барлығы өз бетінше ізденуді ынталандырып, пәнді оқуға қызығушылықты арттыруы керек. Оқушыларға ережелер мен олардың дәлелдемелерін түсінуге мүмкіндік бере отырып, мұғалім геометриялық интуицияны дамытады, онсыз шығармашылықты елестету мүмкін емес деген қорытындыға келеміз.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Әбілқасымова А.Е. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі: дидактикалық – әдістемелік негіздері. – Алматы: Мектеп, 2014.
2. Алпысов А.Қ. Математиканы оқыту әдістемесі. — Павлодар: Павлодар мемлекеттік педагогикалық институты, 2012. —151 б.
3. Елубаев, С. Математиканы оқыту әдістемесі: Оқулық / Советбай Елубаев.- Алматы: Эверо, 2015.- 308б.
4. Әлімов А.Интербелсенді әдістемені ЖОО-да қолдану мәселелері. – А.,2013
5. Андреева Е.В. «Математические основы информатики: элективный курс», методическое пособие, Бином,2007, 312с.
6. Орлов В.А. Типология элективных курсов и их роль в организации профильного обучения// http://www.college.ru. - [Электронный ресурс].
7. Донцова М.А. Опыт организации элективных курсов по математике в старших классах // Современные проблемы науки и образования. – 2018. – №2
8. Павлова С.Н. Программа элективного курса для учащихся гуманитарных профилей 10-11-х классов «Мировоззренческие аспекты математики» //Практика административной работы в школе.-2007.-№1.-С.31-33.
9. Задачи, предлагавшиеся на премных испытаниях по математике в Московском государственном университете в 1967г. //Математика в школе.-№6-1972. С. 24-34.
10. Г.Ө.Балмағанбетова. Математика сабағында оқушылардың қисынды ойлау қабілетін дамыту // Х.Досмұхамедов атындағы Атырау МУ Хабаршысы. – 2016. - №2(41). – 200-206.
11. Sapargaliyeva, A. Zh., Shynybekova, A. S., Molbassynova, Z. M., Tasbolatova, R., & Nurzhanova, T. T. (2023).). Innovative Educational Technologies and Competencies in Higher Education. Higher Education for the Future, 10(1), 110-122.
12. Balta, Nuri & Dauletkulova, Aigul & Assanbayeva, Gulzhaukhar & Fernández-Cézar, Raquel. (2023). Mathematics achievement emotions of high school students in Kazakhstan. Journal on Mathematics Education. 14. 525-544. 10.22342/jme.v14i3.pp525-544.
13. А. Данилова, В. М. Алексеева.Избранные задачи. Сборник. «Мир», 1977.

REFERENCES

1. Abylkassymova A.E. Theory and methodology of mathematics teaching: didactic - methodical basics. – Almaty: School, 2014.
2. Methodology of mathematics teaching Alpysov A.K. — Pavlodar State Pedagogical Institute, 2012. —151 p.
3. Elubaev, S. Mathematicians about the subject: Okulyk / Sovetbay Elubaev. - Almaty: Evero, 2015. - 308b.
4. Alimov A. Interbelsendi adistemeni ZhOO-da koldana maseleleri. – A., 2013
5. Andreeva E.V. “Mathematical foundations of computer science: elective course”, methodological manual, Binom, 2007, 312 p.
6. . Orlov V.A. Typology of elective courses and their role in the organization of specialized training// http://www.college.ru. - [Electronic resource].
7. Dontsova M.A. Experience in organizing elective courses in mathematics in high school // Modern problems of science and education. – 2018. – No. 2.
8. Pavlova S.N. Elective course program for students of humanitarian profiles in grades 10-11 “Worldview aspects of mathematics” // Practice of administrative work at school. - 2007. - No. 1. - P. 31-33.

9. Problems proposed at the premium tests in mathematics at Moscow State University in 1967. //Mathematics at school.-No. 6-1972. pp. 24-34.

10. G.O.Balmaganbetova. Matematika sabagynda okushylardyn kisyndy oilau kabiletin damytu // Kh.Dosmukhamedov atyndagy Atyrau MU Khabarshysy. – 2016. - №2(41). – 200-206. (In Kazakh)

11. Sapargaliyeva, A. Zh., Shynybekova, A. S., Molbassynova, Z. M., Tasbolatova, R., & Nurzhanova, T. T. (2023). Innovative Educational Technologies and Competencies in Higher Education. Higher Education for the Future, 10(1), 110-122.

12. Balta, Nuri & Dauletkulova, Aigul & Assanbayeva, Gulzhaukhar & Fernández-Cézar, Raquel. (2023). Mathematics achievement emotions of high school students in Kazakhstan. Journal on Mathematics Education. 14. 525-544. 10.22342/jme.v14i3.pp525-544.

13. Danilova A., V.M., Alekseeva.Selected problems. "World," 1977.