МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4
ГРНТИ 27.31.44
https://doi.org/10.47526/2024-1/2524-0080.01

Ж.Б. ДЖАНЗАКОВА[1] , Б.Х. ТУРМЕТОВ[2]
[1]*Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты, (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail:* zhainar.janzakova@ayu.edu.kz
[2]*физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail:* batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

БЕЙЛОКАЛ ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ҮШІН ПЕРИОДТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ТУРАЛЫ

Аңдатпа. Бұл жұмыста бірлік шарда аргументтері түрлендірілген шеттік есептер зерттеледі. Аргументтерді түрлендіру инволюция түріндегі бейнелер арқылы беріледі. Бұл бейнелелер теңдеуге де, шеттік шарттарда да қатысады. Қарастырылып отырған теңдеу Пуассон теңдеуінің бейлокал аналогы болып табылады. Шеттік шарттар ізделінді функцияның шардың жоғарғы жарты бөлігіндегі мәнімен төменгі жарты шардағы мәнімен байланыстыру түрінде беріледі. Бұл шарттар әйгілі периодты шарттарды шар түріндегі аймақтар үшін жалпылайды. Шеттік есептерді зерттеу кезінде инволюциялық түрлендірулердің қасиеттері қолданылады. Қарастырылып отырған есептер оларды классикалық Пуассон теңдеуі үшін периодтық шарттармен берілген шеттік есептердің аналогтарына келтіру арқылы шешіледі. Қарастырылып отырған есептер үшін периодты белгілі нәтижелерді қолдана отырып, шешімнің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденді. Зерттелетін есептердің шешімділігінің дәл шарттары табылды. Периодты есептермен байланысты спектрлік мәселелер де зерттелді. Осы есептердің меншікті функциялары мен меншікті мәндері табылды.

Түйін сөздер: инволюция, бейлокал оператор, Пуассон теңдеуі, Лаплас операторы, периодтық есеп, Дирихле есебі, Нейман есебі, меншікті функциялар, меншікті мәндер.

Ж.Б. Джанзакова[1] , Б.Х. Турметов[2]
[1]*магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан), e-mail:* zhainar.janzakova@ayu.edu.kz
[2]*доктор физико-математических наук, профессор, Международного казахско-турецкого университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г. Туркестан),* E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

О периодических краевых задачах для нелокального уравнения Пуассона

Абстракт. В данной работе в единичном шаре изучаются краевые задачи с преобразованными аргументами. Преобразование аргументов задаются с помощью отображения типа инволюции. Эти отображения участвуют и в уравнении, и в краевых условиях. Рассматриваемое уравнение является нелокальным аналогом уравнения Пуассона. Краевые условия задаются в виде связи значении искомой функции в верхней полусферы со значением нижней полусферы. Эти условия обобщают известные периодические условия для шаровых областей. При исследовании краевых задач используются свойства инволютивных отображений. Рассматриваемые задачи решаются сведением их к аналогам краевых задач с периодическими условиями для классического уравнения Пуассона. Используя известные утверждения для периодических задач для рассматриваемых задач доказаны теоремы о существовании и единственности решения. Найдены точные условия разрешимости

исследуемых задач. Изучены также спектральные вопросы, связанные с периодическими задачами. Найдены собственные функции и собственные значения этих задач.

Ключевые слова: инволюция, нелокальный оператор, уравнение Пуассона, оператор Лапласа, периодическая задача, задача Дирихле, задача Неймана, собственные функции, собственные значения.

Zh.B. Dzhanzakova[1] , B.Kh. Turmetov[2]

[1]*Master's Student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: zhainar.janzakova@ayu.edu.kz*

[2]*doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

Investigation of the solvability of boundary value problems for the nonlocal Poisson equation with periodic conditions in circular domains

Abstract. In this paper, boundary value problems with transformed arguments are studied in the unit ball. The transformation of the arguments is specified using the involution type mapping. These mappings participate both in the equation and in the boundary conditions. The equation under consideration is a nonlocal analog of the Poisson equation. Boundary conditions are specified as a relationship between the value of the desired function in the upper hemisphere and the value of the lower hemisphere. These conditions generalize the known periodic conditions for spherical regions. When studying boundary value problems, the properties of involutive mappings are used. The problems under consideration are solved by reducing them to analogues of boundary value problems with periodic conditions for the classical Poisson equation. Using well-known statements for periodic problems for the problems under consideration, theorems on the existence and uniqueness of solutions are proved. Exact conditions for the solvability of the problems under study are found. Spectral questions related to periodic problems are also studied. Eigenfunctions and eigenvalues of these problems are found.

Keywords: involution, nonlocal operator, Poisson equation, Laplace operator, periodic problem, Dirichlet problem, Neumann problem, eigenfunctions, eigenvalues.

Кіріспе

Есептің қойылымы. Бұл жұмыс бейлокал Пуассон теңдеуі үшін периодтық түрдегі шарттармен берілген есептердің шешімділік мәселелерін зерттеуге арналған.

$\Omega=\left\{x\in R^n:|x|<1\right\}$ - бірлік шар және $\partial\Omega$ оның шекарасы болсын. Келесідей белгілеулерді еңгіземіз:

$$\partial\Omega_+=\left\{x\in\partial\Omega:x_1\geq 0\right\},\partial\Omega_-=\left\{x\in\partial\Omega:x_1\leq 0\right\},I=\left\{x\in\partial\Omega:x_1=0\right\}.$$

Кез-келген $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in R^n$ нүкте үшін $Sx=\left(-x_1,\alpha_2x_2,...,\alpha_nx_n\right)$ нүктені сәйкес қоямыз, мұндағы $\alpha_j, j=2,3,...,n$ параметрлері ±1 мәндерінің бірін қабылдайды. S түрлендіруі үшін $S\left(Sx\right)=x$ шарт орындалады, яғни ол инволюциялық қасиетке ие.

Айтайлық, a_0,a_1-нақты сандар, Δ - Лаплас операторы және $Lu(x)\equiv-a_0\Delta u(x)-a_1\Delta u(Sx)$, болсын. L операторын біз Лаплас операторының бейлокал аналогы дейміз, ал оған сәйкес келетін $Lu(x)=f(x)$ теңдеуі Пуассон теңдеуінің бейлокал аналогы болып табылады. Ω -аймағында келесі есептерді қарастырамыз.

1-Есеп. Берілген $g_0(x)$ и $g_1(x)$ функциялар үшін

$$Lu(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) - u(Sx) = g_0(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial u(Sx)}{\partial \nu} = g_1(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{3}$$

шарттарын қанағаттандыратын $u(x) \in C^2(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$ функциясын анықтау қажет.

2-Есеп. (1)-теңдеу және келесі

$$u(x) + u(Sx) = g_0(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(Sx)}{\partial \nu} = g_1(x), x \in \partial\Omega_+. \tag{5}$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x) \in C^2(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$ функциясын анықтау қажет.

Лаплас теңдеуінің инволютивті түрленген аргументтері бар шеттік есептер алғашқы рет [1] жұмыста зерттелген. Бұл жұмыста Дирихле,Нейман және Робен шеттік есептерінің екі өлшемді жалпылама түрлері зерттеледі. 1 және 2 есептер классикалық Пуассон теңдеуі жағдайында, яғни $a_0 = 1$ және $a_1 = 0$ болғанда [2,3] жұмыстарда зерттелген. Кейіннен бұл шеттік есептердің Дирихле, Нейман және Робин, сондай-ақ Самарский-Ионкин түріндегі шарттармен берілген кейбір жалпылаулары [4-13] жұмыстарда қарастырылған. Сондай-ақ, бейлокал Лаплас операторы үшін инволютивті түрленетін аргументтері бар Коши және Дирихле типті шарттармен берілген есептер тікбұрышты облыста [14-16] жұмыстарда зерттелген. Пуассон теңдеуінің бейлокал аналогтары үшін негізгі шеттік есептер және бейлокал Лаплас операторы үшін спектрлік мәселелер [17-19] жұмыстарда толығырақ зерттелген.

Зерттеу әдістері

Қазіргі таңда эллипстік теңдеулер үшін классикалық емес шеттік есептердің шешімділігін зерттеу өзекті мәселе болып табылады. Бұл есептерді зерттеу барысында классикалық есептерді шешуге арналған, потенциалдар әдісі, интегралдық теңдеуге келтіру, Грин функциясы әдісі тағы сол сияқты басқа әдістерді тікелей қолдануға болмайды. Сол себептен мұндай есептер классикалық есептерге келтіру арқылы немесе есепті шешудің жаңа әдісін қарастыру арқылы шешіледі. Біз қарастырып отырған 1 және 2 есептерді шешу барысында алдымен S - инволюциялы түрлендірудің қасиеттеріне сүйене отырып, ізделінді функция үшін алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің бір мәнді шешімділік шарттарын анықтаймыз. Осы теңдеулер жүйесінің шешімі болатын функция үшін классикалық Пуассон теңдеу орынды болатынын көрсетеміз және оған қатысты шеттік шарттарды анықтаймыз. Бұл көмекші есептің шешімін [2,3] жұмыстарда көрсетілген Грин функциясы әдісін қолданып табамыз. Алгебралық теңдеулер жүйесіне қатысты матрицаның кері матрицасын қолдану арқылы 1 және 2 есептердің шешімі үшін негізгі формуланы аламыз. Табылған функция қарастырылатын есептің шешімі болатынын тікелей тексеру арқылы көрсетеміз.

Талдау мен нәтижелер

1-Есепті зерттеуге көшеміз. Бұл есептің шешімі бар деп алып, оны $u(x)$ функциясымен белгілейікте, келесі

$$v(x) = a_0 u(x) + a_1 u(Sx) \tag{6}$$

функцияны қарастырайық. Егер бұл теңдікке Лаплас операторын қолдансақ, онда (1) - теңдіктен келесі $-\Delta v(x) = f(x), x \in \Omega$ теңдеуді аламыз. Берілген S түрлендіру үшін $S\left(Sx\right) = x$ болады, онда (6) теңдік Sx нүктесінде $v(Sx) = a_1 u(x) + a_0 u(Sx)$ түрге келеді. Бұдан

$$a_0 v(x) - a_1 v(Sx) = a_0^2 u(x) + a_0 a_1 u(Sx) - a_1^2 u(x) - a_0 a_1 u(Sx) = \left(a_0^2 - a_1^2\right) u(x)$$

нәтиже келіп шығады.

Әріқарай, егер $a_0 \neq \pm a_1$ шарттар орындалса, онда келесі теңдік орынды

$$u(x) = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 v(x) - a_1 v(Sx)\right]. \tag{7}$$

Осы орайда, 1 -есептің шешімі ретінде (7) формуладан $v(x)$ функциясы анықталады . Бұл формуладан келесі

$$u(Sx) = -\frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_1 v(x) - a_0 v(Sx)\right]$$

теңдік орынды екені айқын. Әріқарай,егер $x \in \partial\Omega_+$ болса, онда (2) - шарттан келесі теңдік алынады

$$g_0(x) = u(x) - u(Sx) = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 v(x) - a_1 v(Sx)\right] + \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_1 v(x) - a_0 v(Sx)\right] =$$

$$= \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 v(x) - a_1 v(Sx) + a_1 v(x) - a_0 v(Sx)\right] = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[\left(a_0 + a_1\right) v(x) - \left(a_0 + a_1\right) v(Sx)\right] =$$

$$= \frac{1}{a_0 - a_1}\left[v(x) - v(Sx)\right].$$

Осы сияқты ,

$$g_1(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial u(Sx)}{\partial \nu} = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - a_1 \frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right] - \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_1 \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - a_0 \frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right] =$$

$$= \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[\left(a_0 - a_1\right)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} + \left(a_0 - a_1\right)\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu} =\right] = \frac{1}{a_0 + a_1}\left(\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right)$$

теңдіккеде ие боламыз.

Осы есептеулер нәтижесінде $v(x)$ функциясы үшін мына есепті аламыз

$$-\Delta v(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{8}$$

$$v(x) - v(Sx) = (a_0 - a_1) g_0(x) \equiv h_0(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{9}$$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu} = (a_0 + a_1) g_1(x) \equiv h_1(x), x \in \partial\Omega_+. \tag{10}$$

Классикалық Пуассон теңдеуі үшін Дирихле және Нейман есептерінің Грин функцияларын $G_D(x,y)$ және $G_N(x,y)$ деп белгілейік. Дөңгелек аймақта $G_D(x,y)$ функциясының айқын түрі математикалық физика теңдеулері курсының оқулықтарында келтірілген (мысалы, [20] жұмыстың 7-бетте), ал $G_N(x,y)$ функциясының айқын түрі [21] жұмыста құрылған.

Егер $f(x) \in C^{\varepsilon}\left(\bar{\Omega}\right), h_0(x) \in C^{1+\varepsilon}\left(\partial\Omega_+\right)$ және $h_1(x) \in C^{\varepsilon}\left(\partial\Omega_+\right), 0 < \varepsilon < 1$, болса, онда (8)-(10) есептің шешімі бар болатындығы [2] жұмыста дәлелденген және ол шешім жалғыз және келесі түрде болады

$$v(x) = \int_{\Omega} G_1(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial G_1(x,y)}{\partial \nu_y} h_0(y) dS_y + \int_{\partial\Omega_+} G_1(x,y) h_1(y) dS_y. \tag{11}$$

Бұл жерде

$$G_1(x,y) = \frac{1}{2}\left[G_D(x,y) + G_D\left(x,y^*\right) + G_N(x,y) - G_N\left(x,y^*\right)\right].$$

Енді кері тұжырымды дәлелдеп қарайық, яғни егер $v(x)$ функциясы (8)-(10) есептің шешімі болса, онда (7) фомуламен алынған $u(x)$ функциясы 1-ші есептің барлық шарттарын қанағаттандырады. Шын мәнінде, $u(x)$ функциясына L операторын қолдана отырып, (8) теңдіктен келесі формуланы аламыз:

$$Lu(x) = \frac{a_0}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0\left(-\Delta\right)v(x) - a_1\left(-\Delta\right)v(Sx)\right] + \frac{a_1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0\left(-\Delta\right)v(Sx) - a_1\left(-\Delta\right)v(x)\right] =$$

$$= \frac{a_0}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 f(x) - a_1 f(Sx)\right] + \frac{a_1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 f(Sx) - a_1 f(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[\left(a_0^2 - a_1^2\right) f(x) - a_0 a_1 f(Sx) + a_0 a_1 f(Sx)\right] = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left(a_0^2 - a_1^2\right) f(x) = f(x).$$

Демек, $u(x)$ функциясы (1) теңдеуді қанағаттандырады. Әрі қарай, $x \in \partial\Omega_+$ нүктелерде (9) және (10) шекаралық шарттар орындалатынын көрсетейік:

$$u(x) - u(Sx) = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 v(x) - a_1 v(Sx)\right] - \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 v(Sx) - a_1 v(x)\right] =$$

$$=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0v(x)-a_1v(Sx)-a_0v(Sx)+a_1v(x)\right]=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[\left(a_0+a_1\right)v(x)-\left(a_0+a_1\right)v(Sx)\right]=$$

$$=\frac{1}{a_0-a_1}\left[v(x)-v(Sx)\right]=\frac{1}{a_0-a_1}\left(a_0-a_1\right)g_0(x)=g_0(x), x\in\partial\Omega_+ ;$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}+\frac{\partial u(Sx)}{\partial\nu}=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}-a_1\frac{\partial v(Sx)}{\partial\nu}\right]+\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0\frac{\partial v(Sx)}{\partial\nu}-a_1\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}\right]=$$

$$=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}-a_1\frac{\partial v(Sx)}{\partial\nu}+a_0\frac{\partial v(Sx)}{\partial\nu}-a_1\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}\right]=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[\left(a_0-a_1\right)\left(\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}+\frac{\partial v(Sx)}{\partial\nu}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{a_0+a_1}\left(\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}+\frac{\partial v(Sx)}{\partial\nu}\right)=\frac{1}{a_0+a_1}\left(a_0+a_1\right)g_1(x)=g_1(x), x\in\partial\Omega_+ .$$

Осылайша біз (2) және (3) шекаралық шарттарда орынды болатынын көрсеттік. Соңында, $v(x)$ функциясының (11)-формулада берілген мәнін (7) - теңдіктің оң жағына қойып келесі

$$u(x)=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\int_\Omega\left[a_0G_1(x,y)-a_1G_1(x^*,y)\right]f(y)dy-$$

$$-\frac{a_0-a_1}{a_0^2-a_1^2}\int_{\partial\Omega_+}\frac{\partial}{\partial\nu_y}\left[a_0G_1(x,y)-a_1G_1(x^*,y)\right]g_0(y)dS_y+\frac{a_0+a_1}{a_0^2-a_1^2}\int_{\partial\Omega_+}\left[a_0G_1(x,y)-a_1G_1(x^*,y)\right]g_1(y)dS_y$$

өрнекті аламыз.

Осылайша біз келесі тұжырымды дәлелдедік.

1-Теорема. Егер 1-есепте $a_0\neq\pm a_1$, $f(x)\in C^\varepsilon\left(\bar\Omega\right), g_0(x)\in C^{1+\varepsilon}\left(\partial\Omega_+\right)$ және $g_1(x)\in C^\varepsilon\left(\partial\Omega_+\right), 0<\varepsilon<1$ шарттар орындалса, онда есептің шешімі бар, жалғыз және ол келесі

$$u(x)=\int_\Omega G_{a,b}^1(x,y)f(y)dy-(a_0-a_1)\int_{\partial\Omega_+}\frac{\partial G_{a,b}^1(x,y)}{\partial\nu_y}g_0(y)dS_y+(a_0+a_1)\int_{\partial\Omega_+}G_{a,b}^1(x,y)g_1(y)dS_y ,$$

формуламен анықталады. Бұл жерде $G_{a,b}^1(x,y)$ 1-есептің - Грин функциясы және ол келесі түрде беріледі

$$G_{a,b}^1(x,y)=\frac{a_0G_1(x,y)-a_1G_1(x^*,y)}{a_0^2-a_1^2} .$$

Ары қарай 2-Есепті зерттеуге көшейік. Бұл есеп үшін келесі тұжырым орынды

2-Теорема. 2-Есепте келесі $a_0\neq\pm a_1$, $f(x)\in C^\varepsilon\left(\bar\Omega\right)$, $g_0(x)\in C^{1+\varepsilon}\left(\partial\Omega_+\right)$ және

$g_1(x) \in C^{\varepsilon}\left(\partial\Omega_+\right), 0<\varepsilon<1$ шарттар орындалсын. Онда есептің шешімі бар болуы үшін

$$\int_{\Omega} f(x)dx - (a_0 - a_1)\int_{\partial\Omega_+} g_1(x)dS_x = 0. \tag{12}$$

шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті. Егер есептің шешімі бар болса ол тұрақты дәлдігінде жалғыз және келесі түрде беріледі

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{a,b}^2(x,y) f(y)dy - (a_0 + a_1)\int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial G_{a,b}^2(x,y)}{\partial \nu_y} g_0(y)dS_y +$$

$$+(a_0 - a_1)\int_{\partial\Omega_+} G_{a,b}^2(x,y) g_1(y)dS_y + Const. \tag{13}$$

Бұл жерде $G_{a,b}^2(x,y)$ 2- Есептің Грин функциясы және ол

$$G_{a,b}^2(x,y) = \frac{a_0 G_2(x,y) - a_1 G_2(x^*,y)}{a_0^2 - a_1^2},$$

$$G_2(x,y) = \frac{1}{2}\left[G_D(x,y) - G_D\left(x,y^*\right) + G_N(x,y) + G_N\left(x,y^*\right)\right] + Const$$

формуламен анықталады.

Дәлелдеу. 2 - есептің шешімі бар делік. Бұл шешімді $u(x)$ деп белгійікте, 1 - есептегідей $v(x) = a_0 u(x) + a_1 u(Sx)$ функциясын қарастырайық. (5)-түрдегі шекаралық шарттан, кез-келген $x \in \partial\Omega_+$ нүктелер үшін мынаны аламыз

$$g_0(x) = u(x) + u(Sx) = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 v(x) - a_1 v(Sx)\right] - \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_1 v(x) - a_0 v(Sx)\right] =$$

$$= \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 v(x) - a_1 v(Sx) - a_1 v(x) + a_0 v(Sx)\right] = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[\left(a_0 - a_1\right)v(x) + \left(a_0 - a_1\right)v(Sx)\right] =$$

$$= \frac{1}{a_0 + a_1}\left[v(x) + v(Sx)\right].$$

Сол секілді, (6)-шарттан

$$g_1(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(Sx)}{\partial \nu} = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - a_1\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right] + \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_1\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - a_0\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right] =$$

$$= \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - a_1\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu} + a_1\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - a_0\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right] = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}(a_0 + a_1)\left(\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_0 - a_1}\left(\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right)$$

теңдік келіп шығады.

Әріқарай, бұл жағдайда $v(x)$ функциясы үшін келесі есепті аламыз:

$$-\Delta v(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{14}$$

$$v(x) + v(Sx) = (a_0 + a_1) g_0(x) \equiv h_0(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{15}$$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu} = (a_0 - a_1) g_1(x) \equiv h_1(x), x \in \partial\Omega_+, \tag{16}$$

Егер $f(x) \in C^{\varepsilon}\left(\bar{\Omega}\right)$, $h_0(x) \in C^{1+\varepsilon}\left(\partial\Omega_+\right)$ және $h_1(x) \in C^{\varepsilon}\left(\partial\Omega_+\right)$, $0 < \varepsilon < 1$ болса, онда [2] жұмыста (14)-(16) есептің шешілімді болуы үшін

$$\int_{\Omega} f(x)dx - \int_{\partial\Omega_+} h_1(x) dS_x = 0. \tag{17}$$

шарттың орындалуы қажет және жеткілікті екені көрсетілген. Егер есептің шешімі бар болса, онда ол тұрақты қосылғыш дәлдігінде жалғыз және келесі

$$v(x) = \int_{\Omega} G_2(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial G_2(x,y)}{\partial \nu_y} h_0(y) dS_y + \int_{\partial\Omega_+} G_2(x,y) h_1(y) dS_y + Const. \tag{18}$$

түрде анықталады. Сонымен, 2-есептің шешімі бар болса, онда (17)-шарттың орындалуы қажет екен. $h_0(x)$ және $h_1(x)$ функияларының түрін ескере отырып (17)-шартты (12)-түрде жазуға болады.

Осы есеп үшін кері тұжырымда дұрыс. Егер $f(x)$ және $g_1(x)$ функциялары үшін (12) - шарт орынды болса, онда $f(x)$ және $h_1(x) = (a_0 - a_1) g_1(x)$ функциялары үшін (17)-шартта орынды екені анық. (17)-шарт орындалғанда (14) - (16) есептің шешімі бар және (18)-түрде өрнектеледі. $v(x)$ функциясының мәнін (7)-формуланың оң жағына қою арқылы 1 есептегідей, $u(x)$ функциясы 2 есептегі барлық шарттарды қанағаттандыратынын көрсете аламыз.

Расында, (14) теңдеуді пайдалана отырып $u(x)$ функциясына L операторын қолдану арқылы мынаны аламыз:

$$Lu(x) = \frac{a_0}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0\left(-\Delta\right)v(x) - a_1\left(-\Delta\right)v(Sx)\right] + \frac{a_1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0\left(-\Delta\right)v(Sx) - a_1\left(-\Delta\right)v(x)\right] =$$

$$= \frac{a_0}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 f(x) - a_1 f(Sx)\right] + \frac{a_1}{a_0^2 - a_1^2}\left[a_0 f(Sx) - a_1 f(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left[\left(a_0^2 - a_1^2\right) f(x) - a_0 a_1 f(Sx) + a_0 a_1 f(Sx)\right] = \frac{1}{a_0^2 - a_1^2}\left(a_0^2 - a_1^2\right) f(x) = f(x).$$

Енді шеттік шарттардың орындалуын тексерейік. $x \in \partial\Omega_+$ нүктесі үшін (15)-шарттан мынаны аламыз

$$u(x)+u(Sx)=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0v(x)-a_1v(Sx)\right]+\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0v(Sx)-a_1v(x)\right]=$$

$$=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0v(x)-a_1v(Sx)+a_0v(Sx)-a_1v(x)\right]=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[\left(a_0-a_1\right)v(x)+\left(a_0-a_1\right)v(Sx)\right]=$$

$$=\frac{1}{a_0+a_1}\left[v(x)+v(Sx)\right]=\frac{1}{a_0+a_1}\left(a_0+a_1\right)g_0(x)=g_0(x), x\in\partial\Omega_+ .$$

Осы сияқты, (16)-шарттан

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}-\frac{\partial u(Sx)}{\partial \nu}=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}-a_1\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right]-\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}-a_1\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right]=$$

$$=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}\left[a_0\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}-a_1\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}+a_0\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}-a_1\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right]=\frac{1}{a_0^2-a_1^2}(a_0-a_1)\left(\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}-\frac{\partial v(Sx)}{\partial \nu}\right)=$$

$$=g_1(x), x\in\partial\Omega_+$$

келіп шығады. Теорема дәлелденді.

Осы әдістердің негізінде мына түрдегі спектрлік есепті зерттейміз.

3-Есеп. $C^2\left(\Omega\right)\cup C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ класына тиісті және төмендегі

$$-a_0\Delta u(x)-a_1\Delta u(Sx)=\lambda u(x), x\in\Omega, \tag{17}$$

$$u(x)-(-1)^k u(Sx)=0, x\in\partial\Omega_+, \tag{18}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}+(-1)^k\frac{\partial u(Sx)}{\partial \nu}=0, x\in\partial\Omega_+, \tag{19}$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)\neq 0$ функциясын табу қажет. Мұндағы $k=1,2$, ал λ - спектрлік параметр.

Айталық $v_D(x)$ және μ_D

$$-\Delta v_D(x)=\mu_D v_D(x), x\in\Omega; v_D(x)=0, x\in\partial\Omega, \tag{20}$$

Дирихле есебінің меншікті мәні мен меншікті функциясы, ал $v_N(x)$ және μ_N

$$-\Delta v_N(x)=\mu_N v_N(x), x\in\Omega; v_N(x)=0, x\in\partial\Omega. \tag{21}$$

Нейман есебінің меншікті мәні мен меншікті функциясы болсын.

[2] жұмыста келесі тұжырым дәлелденген.

1-Лемма. (20) және (21) есептердің барлық меншікті функциялары

$$v(x)-v(Sx)=0, \tag{22}$$

немесе

$$v(x)+v(Sx)=0, \tag{23}$$

түрдегі симметриялық қасиетке ие.

Осы тұжырымды қолдана отырып біз (17)-(19) спектрлік есепке қатысты келесі негізгі тұжырымды дәлелдей аламыз.

3-Теорема. $k=1$ болсын және $a_0 \neq \pm a_1$ шарт орындалсын. Онда (17)-(19) есебінің меншікті функциялары тек (20)-Дирихле есебінің (22)-симметриялы қасиетке ие және (21)-Нейман есебінің (23)-симметриялы қасиетке ие болған меншікті функцияларынан тұрады. Оларға сәйкес келетін меншікті мәндер келесі

$$\lambda_D=\left(a_0+a_1\right)\mu_D, \lambda_N=\left(a_0-a_1\right)\mu_N .$$

теңдіктер арқылы анықталады.

Дәлелдеу. $v_D(x)$ функциясы (20)-Дирихле есебінің (22) түрдегі симметриялы қасиетке ие болған меншікті функциясы болсын. Онда

$$-a_0\Delta v_D(x)-a_1\Delta v_D(Sx)=a_0\mu_D v_D(x)+a_1\mu_D v_D(Sx)=a_0\mu_D v_D(x)+a_1\mu_D v_D(x)=$$

$$=\left(a_0+a_1\right)\mu_D v_D(x)=\lambda_D v_D(x).$$

Демек, $v_D(x)$ функциясы үшін мына

$$-a_0\Delta v_D(x)-a_1\Delta v_D(Sx)=\lambda_D v_D(x), x\in\partial\Omega_+,$$

$$\frac{\partial v_D(x)}{\partial\nu}-\frac{\partial v_D(Sx)}{\partial\nu}=0, x\in\partial\Omega_+,$$

шарттар орындалады.

Егер $v_N(x)$ функциясы (21) Нейман есебінің (23) симметриялы қасиетке ие болған меншікті функциясы болса, онда

$$-a_0\Delta v_N(x)-a_1\Delta v_N(Sx)=a_0\mu_N v_N(x)+a_1\mu_N v_N(Sx)=a_0\mu_N v_N(x)-a_1\mu_N v_N(x)=$$

$$=\left(a_0-a_1\right)\mu_N v_N(x)=\lambda_N v_N(x).$$

Сонымен, $v_N(x)$ функциясы үшін

$$-a_0\Delta v_N(x)-a_1\Delta v_N(Sx)=\lambda_N v_N(x), x\in\partial\Omega_+,$$

$$\frac{\partial v_N(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial v_N(Sx)}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega_+ .$$

теңдіктер орынды. Теорема дәлелденді.

Осылайша келесі тұжырым дәлелденеді.

4-Теорема. $k = 2$ болсын және $a_0 \neq \pm a_1$ шарт орындалсын. Онда (17)-(19) есептің меншікті функциялары тек (20)-Дирихле есебінің (23)-симметриялы қасиетке ие меншікті функциялары және (21)-Нейман есебінің (22) симметриялы қасиетке ие болған меншікті функцияларынан тұрады. Оларға сәйкес меншікті мәндері

$$\lambda_D = (a_0 - a_1)\mu_D, \lambda_N = (a_0 + a_1)\mu_N .$$

формуламен анықталады.

Қорытынды

Бұл жұмыста эллипс тектес теңдеулердің инволюциялы аналогтары үшін қисынды қойылған есептердің жаңа кластары айқындалды.

Доңгелек аймақтарда периодты және антипериодты шарттармен берілген шеттік есептердің қисынды қойылым шарттары анықталды.

Периодты шеттік есептің шешімділік шарттары класикалық Дирихле есебінің шарттарына сәйкес келетіні анықталды.

Антипериодты шеттік есептің шешімділік шарттары класикалық Нейман есебінің шарттарына сәйкес келетіні көрсетілді.

Периодты және антипериодты шеттік есептердің Грин функцияларын құру әдістері жасалынды.

Периодты және антипериодты шеттік есептердің шешімдерінің интегралдық кейіптемесі табылды.

Периодты және антипериодты шеттік есептердің меншікті мәндері және меншікті функциясы табылды.

Меншікті функциялар жүйесінің толымдылық шарттары анықталды.

Алдағы зерттеулерде бұл жұмыста қарастырылған есептерді жоғарғы ретті эллипс тектес теңдеулердің инволюциялы аналогтары үшін қарастыру жоспарланады.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті грантымен (грант № AP19677926) қолдау тапты.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument//Commentarii Mathematici Helvetici/ – 1974. – V.17. – P. 451– 457.

2. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball// Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – Vol.3, No.1. – P.143 – 146.

3. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50, No. 2. – P. 268 – 273. https://doi.org/10.1134/S0012266114020153.

4. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation// Novi sad journal of mathematics.– 2020.– Vol. 50, No. 1. – P.67 - 88. http://doi.org/10.30755/NSJOM.08942.

5. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On a nonlocal boundary value problem for the Laplace operator, which is a multidimensional generalisation of the Samarskii-Ionkin problem // News of the Khoja Akhmet Yassawi KazakhTurkish international university. Mathematics, physics, computer science. – 2018. – Vol. 1, №1(4). – P. 81–83.

6. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. Direct and inverse problems for the Poisson equation with equality of flows on a part of the boundary // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 64, №5. – P. 777-791. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1517340

7. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On boundary value problem of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20, №1. – P. 84–94.

8. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On boundary value problem of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2022.– Vol. 67, № 2 – P. 369–383. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1828377

9. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol. 2014, No. 157. – P. 1–14.

10. Sadybekov M.A., Yessirkegenov N.A. On a generalised SamarskiiIonkin type problem for the Poisson equation // Kazakh Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 17, No. 1. – P. 115–116.

11. Turmetov B.Kh., Koshanova M., Usmanov K. About solvability of some boundary value problems for Poisson equation in the ball conditions // Filomat. – 2018. – Vol. 32, No. 3. – P. 939-946.https://doi:10.2298/FIL1803939K

12. Turmetov B.Kh. Generalization of the Robin Problem for the Laplace Equation // Differential Equations.– 2019. – Vol. 55, No. 9. – P. 1134–1142. https://doi.org/10.1134/S0012266119090027

13. Yessirkegenov N. Spectral properties of the generalized Samarskii Ionkin type problems // Filomat. – 2018. – Vol. 32, No. 3. – P. 1019–1024. https://doi:10.2298/FIL1803019Y

14. Kal'menov T.S., Iskakova U.A. A criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation // Dokl Math. – 2007. – Vol. 75, No. 3. – P. 370-373. https://doi.org/10.1134/S1064562407030118

15. Kal'menov T.S., Iskakova U.A. A method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation // Dokl Math. – 2008. – Vol. 78, No. 3. – P. 874-876. https:// doi: 10.1134/S1064562408060185

16. Yarka U., Fedushko S., Vesely P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation//Mathematics. – 2020. – Vol.8, No.2108. – P.1–13. https://doi.org/10.3390/math8122108

17. Karachik V., Sarsenbi A., Turmetov B. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation// Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43, No. 3. – P. 1604 – 1625. https:// doi: 10.3906/mat-1901-71

18. Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution//Symmetry. – 2021. – Vol.13, No.1781.– P. 1 – 20. https:// doi.org/10.3390/sym13101781

19. Турметов Б. Х., Карачик В. В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией// Вестн. Удмуртск.ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2021. – Т. 31, No. 4. – С. 651 – 667. https://doi.org/10.35634/vm210409

20. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. Учебник. – 2-е изд., перераб. и дополненное. — М.: Наука, 1976, – 296 с.

21. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2016. – Vol. 61, № 1. – P.104–123. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1064402

REFERENCES

1. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument//Commentarii Mathematici Helvetici/ – 1974. – V.17. – P. 451– 457.

2. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball// Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – Vol.3, No.1. – P.143 – 146.

3. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50, No. 2. – P. 268 – 273. https://doi.org/10.1134/S0012266114020153.

4. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation// Novi sad journal of mathematics.– 2020.– Vol. 50, No. 1. – P.67 - 88. http://doi.org/10.30755/NSJOM.08942.

5. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On a nonlocal boundary value problem for the Laplace operator, which is a multidimensional generalisation of the Samarskii-Ionkin problem // News of the Khoja

Akhmet Yassawi KazakhTurkish international university. Mathematics, physics, computer science. – 2018. – Vol. 1, №1(4). – P. 81–83.

6. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. Direct and inverse problems for the Poisson equation with equality of flows on a part of the boundary // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 64, №5. – P. 777-791. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1517340

7. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On boundary value problem of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20, №1. – P. 84–94.

8. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On boundary value problem of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2022.– Vol. 67, № 2 – P. 369–383. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1828377

9. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol. 2014, No. 157. – P. 1–14.

10. Sadybekov M.A., Yessirkegenov N.A. On a generalised SamarskiiIonkin type problem for the Poisson equation // Kazakh Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 17, No. 1. – P. 115–116.

11. Turmetov B.Kh., Koshanova M., Usmanov K. About solvability of some boundary value problems for Poisson equation in the ball conditions // Filomat. – 2018. – Vol. 32, No. 3. – P. 939-946.https://doi:10.2298/FIL1803939K

12. Turmetov B.Kh. Generalization of the Robin Problem for the Laplace Equation // Differential Equations.– 2019. – Vol. 55, No. 9. – P. 1134–1142. https://doi.org/10.1134/S0012266119090027

13. Yessirkegenov N. Spectral properties of the generalized Samarskii Ionkin type problems // Filomat. – 2018. – Vol. 32, No. 3. – P. 1019–1024. https://doi:10.2298/FIL1803019Y

14. Kal’menov T.S., Iskakova U.A. A criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation // Dokl Math. – 2007. – Vol. 75, No. 3. – P. 370-373. https://doi.org/10.1134/S1064562407030118

15. Kal’menov T.S., Iskakova U.A. A method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation // Dokl Math. – 2008. – Vol. 78, No. 3. – P. 874-876. https:// doi: 10.1134/S1064562408060185

16. Yarka U., Fedushko S., Vesely P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation//Mathematics. – 2020. – Vol.8, No.2108. – P.1–13. https://doi.org/10.3390/math8122108

17. Karachik V., Sarsenbi A., Turmetov B. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation// Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43, No. 3. – P. 1604 – 1625. https:// doi: 10.3906/mat-1901-71

18. Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution//Symmetry. – 2021. – Vol.13, No.1781.– P. 1 – 20. https:// doi.org/10.3390/sym13101781

19. Turmetov B. Kh., Karachik V. V. On the solvability of Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution// Vestn. Udmurt University. Mat. Fur. Computer. Sciences. – 2021. – T. 31, No. 4. – C. 651 – 667.https://doi.org/10.35634/vm210409

20. Bitsadze A.V. Equations of mathematical physics. Textbook. - 2nd ed., revised. and supplemented. – M.: Наука, 1976, – 296 с.

21. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.. Representation of Green’s function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2016. – Vol. 61, № 1. – P.104–123. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1064402