УДК 517.953;
ГРНТИ 27.31.44
https://doi.org/10.47526/2023-3/2524-0080.03

Ф.А.ДАДАБАЕВА[1] , Б.Х.ТУРМЕТОВ[2]
[1]*магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, Туркестан),E-mail:* fazilat007@gmail.com
[2]*доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, Туркестан),* E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Аннотация. В данной работе вводится понятие нелокального бигармонического оператора. При введении этого оператора используются отображения типа инволюции. А именно в дифференциальном выражении этого оператора кроме переменных $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ участвуют также преобразованные аргументы с отображениями вида $S_j x=\left(x_1,...,x_{j-1},p_j-x_j,x_{j+1},...,x_n\right),1\le j\le n$ и их произведения. В n-мерном параллелепипеде для заданного нелокального бигармонического оператора рассматриваются спектральные задачи с краевымы условиями типа Дирихле и Неймана. В явном виде построены собственные функции и собственные значения рассматриваемых задач. При построении этих элементов существенно используются собственные функции и собственные значения классического бигармонического оператора с краевымы условиями типа Дирихле и Неймана. Доказаны теоремы о ортономированности и полноты систем собственных функций рассматриваемых задач. Приведены примеры соответствующии для частных случаев параметров участвующих в рассматриваемых задачах. Кроме того, в двухмерном случае для соответствующего нелокального бигармонического оператора исследованы также спектральные вопросы краевых задач типа Самарского-Ионкина. Найдены собственные и присоединенные функции рассматриваемой задачи и доказаны теоремы о полноте данных систем.

Ключевые слова: Спектральная задача, нелокальный оператор, бигармонический оператор, задача Дирихле, задача Неймана, задача Самарского-Ионкина, собственные функции, собственные значения, присоединенные функции, полнота.

Ф.А.Дадабаева[1] , Б.Х.Турметов[2]
[1]*Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты, (Қазақстан, Түркістан), E-mail:* fazilat007@gmail.com
[2]*физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан), E-mail:* batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Бейлокал бигармониялық операторлар үшін кейбір шеттік есептердің меншікті функциялары және меншікті мәндері туралы

Аңдатпа. Берілген жұмыста бейлокал бигармониялық оператор туралы түсінік енгізіледі. Бұл операторды енгізу кезінде инволюция түріндегі бейнелеулер қолданылады. Дәлірек айтқанда, бұл оператордың дифференциалдық өрнегінде $x=(x_1,x_2,...,x_n)$

айнымалысынан басқа $S_j x = \left(x_1, ..., x_{j-1}, p_j - x_j, x_{j+1}, ..., x_n\right), 1 \le j \le n$ түріндегі бейнелеуі және олардың көбейтіндісі бар түрлендірілген аргументі де қатысады. Берілген бейлокал бигармониялық оператор үшін n-ші ретті параллелепипедте шеттік шарттары Дирихле және Нейман түріндегі спектральді есептер қарастырылады. Қарастырылап отырған есептердің меншікті функциялары мен меншікті мәндері нақты түрде құрастырылған. Бұл элементтерді құру кезінде Дирихле және Нейман түріндегі шеттік шарттары бар классикалық бигармониялық оператордың меншікті функциялары мен меншікті мәндері айтарлықтай қолданылады. Қарастырылып отырған есептерге қатысты параметрлердің дербес жағдайларына сәйкес келетін мысалдар келтірілген. Сонымен қатар, екі өлшемді жағдайда сәйкес бейлокал бигармониялық оператор үшін Самарский-Ионкин типті шеттік есептердің спектрлік мәселелері де зерттелді. Қарастырылып отырған есептің меншікті және қосалқы функциялары табылды және осы жүйелердің толықтығы туралы теоремалар дәлелденді.

Түйін сөздер: Спектральді есеп, бейлокал оператор, бигармониялық оператор, Дирихле есебі, Нейман есебі, Самара-Ионкин есебі, меншікті функциялар, меншікті мәндер, қосалқы функциялар, толымдылық.

F.A.Dadabayeva[1] , B.Kh. Turmetov[2]

[1]master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), E-mail: fazilat007@gmail.com

[2]doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

On eigenfunctions and eigenvalues of some boundary value problems for a nonlocal biharmonic operator

Annotation. In this note, the concept of a nonlocal biharmonic operator is introduced. When introducing this operator, mappings of the type of involution are used. Namely, in the differential expression of this operator, in addition to the variables $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, transformed arguments with mappings of the form $S_j x = \left(x_1, ..., x_{j-1}, p_j - x_j, x_{j+1}, ..., x_n\right), 1 \le j \le n$ and their multiplication also involved. Spectral problems with Dirichlet and Neumann-type boundary conditions are considered in an n-dimensional parallelepiped for a given nonlocal biharmonic operator. The eigenfunctions and eigenvalues of the problems under consideration are explicitly constructed. When constructing these elements, eigenfunctions and eigenvalues of the classical biharmonic operator with Dirichlet and Neumann type boundary conditions are essentially used. Theorems on the orthonomization and completeness of the systems of eigenfunctions of the problems under consideration are proved. Examples of the corresponding parameters for special cases involved in the problems under consideration are given. In addition, in the two-dimensional case for the corresponding nonlocal biharmonic operator, spectral issues of boundary value problems of the Samarsky-Ionkin type are also investigated. The proper and attached functions of the problem under consideration are found and theorems on the completeness of these systems are proved.

Keywords: Spectral problem, nonlocal operator, biharmonic operator, Dirichlet problem, Neumann problem, Samarsky-Ionkin problem, eigenfunctions, eigenvalues, attached functions, completeness.

Введение

Пусть $p_j > 0, j = 1, 2, ..., n$, $\Pi = \left\{x \in R^n : 0 < x_j < p_j\right\}$-параллелепипед, $S_j x = \left(x_1, ..., x_{j-1}, p_j - x_j, x_{j+1}, ..., x_n\right), 1 \le j \le n$. Очевидно, что $S_j^2 = E$. Рассмотрим всевозможные произведение отображений S_j, т.е. $S_{12}=S_1S_2, S_{123}=S_1S_2S_3,...$. Общее количество таких отображений с учетом тождественного отображения $S_0x=x$ равно 2^n. Для нумерации таких отображений воспользуемся двоичной системе счисления. А именно, если i индекс суммирования, то для него в двоичной системе счисления верно равенство $(i_n\ldots i_1)_2\equiv i$, где $i_k=0,1$ при $k=1,\ldots,n$. Тогда можно рассматривать отображения $S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}$. Используя эти отображения введем оператор

$$Lu(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta^2u\left(S_n^{i_n}...S_1^{i_1}x\right),$$

где $a_0,a_1,a_2,a_3\ldots,a_{2^n-1}$ – некоторый набор действительных чисел, Δ^2 - бигармонический оператор, т.е. $\Delta^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^2$.

Отметим, что различные варианты нелокального оператора Лапласа с отображениями вида $S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}$ были рассмотрены в работах [1,2]. В этих работах для соответствующего нелокального уравнения Пуассона исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач. Спектральные вопросы для нелокального оператора Лапласа изучены в работах [3,4]. В двухмерном случае аналогичные исследования проводились в работах [5-8].

В настоящей работе аналогичные исследования мы проводим для нелокального аналога бигармонического оператора. Переходим к постановке задач, которые мы будем изучать в настоящей работе. Рассмотрим в области Π следующие задачи:

Задача 1 (Задача типа Дирихле). Найти функцию $u(x)\neq 0$ из класса $u(x)\in C^4\left(\Pi\right)\cap C^2\left(\bar{\Pi}\right)$ и число $\lambda\in\mathbb{R}$ удовлетворяющие условиям

$$Lu(x)=\lambda u(x) \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}u(0,x_2,...,x_n)=u(p_1,x_2,...,x_n)=0, 0\le x_j\le p_j, j=2,...,n,\\ u(x_1,0,...,x_n)=u(x_1,p_2,...,x_n)=0, 0\le x_j\le p_j, j=1,...,n, j\neq 2,\\ \ldots\\ u(x_1,x_2,...,0)=u(x_1,x_2,...,p_n)=0, 0\le x_j\le p_j, j=1,...,n-1\end{gathered}, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}u_{x_1x_1}(0,x_2,...,x_n)=u_{x_1x_1}(p_1,x_2,...,x_n)=0, 0\le x_j\le p_j, j=2,...,n,\\ u_{x_2x_2}(x_1,0,...,x_n)=u_{x_2x_2}(x_1,p_2,...,x_n)=0, 0\le x_j\le p_j, j=1,...,n, j\neq 2,\\ \ldots\\ u_{x_nx_n}(x_1,x_2,...,0)=u_{x_nx_n}(x_1,x_2,...,p_n)=0, 0\le x_j\le p_j, j=1,...,n-1\end{gathered}. \tag{1.3}$$

Задача 2 (Задача типа Неймана). Найти функцию $u(x)\neq 0$ из класса $u(x)\in C^4\left(\Pi\right)\cap C^3\left(\bar{\Pi}\right)$ и число $\lambda\in\mathbb{R}$ удовлетворяющее уравнению (1.1) и условиям

$$\begin{aligned}&u_{x_1}(0,x_2,...,x_n)=u_{x_1}(p_1,x_2,...,x_n)=0, 0\le x_j\le p_j,\ j=2,...,n,\\&u_{x_2}(x_1,0,...,x_n)=u_{x_2}(x_1,p_2,...,x_n)=0, 0\le x_j\le p_j,\ j=1,...,n,\ j\ne 2,\\&\ldots\\&u_{x_2}(x_1,x_2,...,0)=u_{x_2}(x_1,x_2,...,p_n)=0, 0\le x_j\le p_j,\ j=1,...,n-1\end{aligned}, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}&u_{x_1x_1x_1}(0,x_2,...,x_n)=u_{x_1x_1x_1}(p_1,x_2,...,x_n)=0, 0\le x_j\le p_j,\ j=2,...,n,\\&u_{x_2x_2x_2}(x_1,0,...,x_n)=u_{x_2x_2x_2}(x_1,p_2,...,x_n)=0, 0\le x_j\le p_j,\ j=1,...,n,\ j\ne 2,\\&\ldots\\&u_{x_nx_nx_n}(x_1,x_2,...,0)=u_{x_nx_nx_n}(x_1,x_2,...,p_n)=0, 0\le x_j\le p_j,\ j=1,...,n-1\end{aligned}. \tag{1.5}$$

Аналогичные задачи для уравнения четвертого порядка в случае $n=2$ исследовались в работах [9-11].

2. Исследования задачи 1.

Пусть $T_k(t)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}t, k=1,2,...$. Для системы $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ известно следующее утверждение (см.например,[12]).

Лемма 2.1. Система $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ обладают следующими свойствами:

1) система $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $L_2[0,p]$;

2) система $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в пространстве $L_2[0,p]$.

Лемма 2.2. Для элементов системы $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ справедливы следующие равенства:

1) $T_k(p-t)=(-1)^{k+1}T_k(t)$;

2) $T_k^{(4)}(t)=\left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 T_k(t)$.

Доказательство. По определению для $T_k(p-t)$ имеем

$$T_k(p-t)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}(p-t)=\sqrt{\frac{2}{p}}\left[\sin k\pi\cdot\cos\frac{k\pi}{p}t-\cos k\pi\cdot\sin\frac{k\pi}{p}t\right]=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{p}}\cos k\pi\cdot\sin\frac{k\pi}{p}t=-(-1)^k\sqrt{\frac{2}{p}}\cdot\sin\frac{k\pi}{p}t=(-1)^{k+1}T_k(t).$$

Свойство 1) доказано. Далее, так как

$$T_k''(t)=\frac{d^2}{dt^2}\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}t\right)=-\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2\sin\frac{k\pi}{p}t,$$

то для $T_k^{(4)}(t)$ имеем

$$T_k^{(4)}(t) = \frac{d^4}{dt^4}\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}t\right) = -\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\sin\frac{k\pi}{p}t\right) = \sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 \sin\frac{k\pi}{p}t = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 T_k(t).$$

Лемма доказана.

Следствие 2.1. Элементы системы $\{T_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ являются собственными функциями следующей спектральной задачи:

$$y^{(4)}(t) = \mu^2 y(t), 0 < t < p, \tag{2.1}$$

$$y(0) = y(p) = 0, y''(0) = y''(p) = 0. \tag{2.2}$$

Соответствующие собственные значения определяются равенствами

$$\mu_k^2 = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4, \mu_k = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2, k = 1, 2, \ldots .$$

В работе [13] доказана следующее утверждение.

Лемма 2.3. Пусть области $G \subset R^n$ и $D \subset R^m$ ограничены, система функций $\psi_j(y), j = 1, 2, \ldots,$ ортонормально и полна в $L_2(D)$ и при каждом $j = 1, 2, \ldots$ система функций $\varphi_{kj}(x), k = 1, 2, \ldots,$ ортонормально и полна в $L_2(G)$. Тогда система функций

$$h_{kj}(x, y) = \varphi_{kj}(x)\psi_j(y), k, j = 1, 2, \ldots,$$

ортонормально и полна в $L_2(G \times D)$.

Из этой леммы и леммы 2.1 вытекают следующие утверждения.

Следствие 2.2. Если $X_k(x_1) = \sqrt{\frac{2}{p_1}}\sin\frac{k\pi}{p_1}x_1$ и $Y_j(x_2) = \sqrt{\frac{2}{p_2}}\sin\frac{j\pi}{p_2}x_2, k, j = 1, 2, \ldots,$ то система функций

$$u_{kj}(x_1, x_2) = X_k(x_1)Y_j(x_1) \equiv \sqrt{\frac{2}{p_1}}\sin\frac{k\pi}{p_1}x_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{p_2}}\sin\frac{j\pi}{p_2}x_2, k, j = 1, 2, \ldots,$$

ортонормально и полна в $L_2((0, p_1) \times (0, p_2))$.

Следствие 2.3. Система функций

$$u_{k_1 k_2 \ldots k_n}^D(x) = C(n, p_1, \ldots, p_n)\prod_{j=1}^{n}\sin\frac{k_j \pi x_j}{p_j}, k_j \in N, j = 1, 2, \ldots, n,$$

ортонормально и полна в $L_2((0, p_1) \times (0, p_2) \times \ldots \times (0, p_n))$. Здесь $C(n, p_1, \ldots, p_n) = 2^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p_j}}$.

Введем следующие числа $\varepsilon^D_{k_1k_2\dots k_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+\dots+i_nk_n} a_i$, где где $|i|$ означает $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$.

Теорема 2.1. Пусть для всех $k_j \in N,\ j = 1,2,\dots,n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1k_2\dots k_n} \neq 0$. Тогда система функций $\left\{u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)\right\}_{k_j=1}^{\infty},\ j=1,2,\dots,n$ являются собственными функциями задачи 1. Соответствующие собственные значения определяются равенствами

$$\lambda^D_{k_1k_2\dots k_n} = \varepsilon^D_{k_1k_2\dots k_n}\mu^2_{k_1k_2\dots k_n},\ \mu_{k_1k_2\dots k_n} = \pi^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j^2}{p_j^2}, k_j \in N,\ j=1,2,\dots,n. \tag{2.4}$$

Доказательство. Очевидно, что функции $u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)$ по построению удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3). Проверим выполнение уравнения (1.1). Если к функции $u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)$ применим оператор $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, 1 \le i \le n$, то

$$\frac{\partial^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)}{\partial x_i^2} = C(n, p_1,\dots,p_n) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\sin\frac{k_i\pi x_i}{p_i}\right) =$$

$$= -\left(\frac{k_i\pi}{p_i}\right)^2 C(n, p_1,\dots,p_n) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j} \cdot \left(\sin\frac{k_i\pi x_i}{p_i}\right) = -\left(\frac{k_i\pi}{p_i}\right)^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x).$$

Отсюда приеменяя к этой функции оператор Лапласа получаем

$$\Delta u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x) = -\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i\pi}{p_i}\right)^2\right) u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x).$$

Если к функции $u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)$ применим бигармонический оператор, то из последнего равенства следует

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i\pi}{p_i}\right)^2\right)^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x) = \pi^4\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i^2}{p_i^2}\right)^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x) = \mu^2_{k_1k_2\dots k_n} u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x), \mu_{k_1k_2\dots k_n} = \pi^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i^2}{p_i^2}\right).$$

Отсюда при любом $m \in \{1,2,\dots,n\}$ получаем

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x_1,\dots,x_{m-1},p_m-x_m,x_{m+1},\dots,x_n)=\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x_1,\dots,x_{m-1},p_m-x_m,x_{m+1},\dots,x_n)=$$

$$=\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}C\left(n,p_1,\dots,p_n\right)\sin\frac{k_m\pi(p_m-x_m)}{p_m}\cdot\prod_{j=1,\,j\neq m}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}=$$

$$=\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}C\left(n,p_1,\dots,p_n\right)(-1)^{k_m+1}\sin\frac{k_m x_m}{p_m}\cdot\prod_{j=1,\,j\neq m}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}=\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}C\left(n,p_1,\dots,p_n\right)(-1)^{k_m+1}\prod_{j=1}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}=$$

$$=(-1)^{k_m+1}\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)\,.$$

Пусть теперь $0\le i\le 2^n-1$ или $i=\left(i_n\dots i_2i_1\right)_2$, где $i_m=0$ или $i_m=1$ для всех $1\le m\le n$. Тогда если $i_m=1$, то

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(S_m^{i_m}x)=\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}C\left(n,p_1,\dots,p_n\right)\sin\frac{k_m\pi(p_m-x_m)}{p_m}\cdot\prod_{j=1,\,j\neq m}^{n}\sin\frac{k_j\pi x_j}{p_j}=$$

$$=(-1)^{k_m+1}\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(S_m^{i_m}x)=(-1)^{i_m(k_m+1)}\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)\,. \tag{2.4}$$

Очевидно, что равенство (2.4) верно и для случая $i_m=0$. Отсюда следует, что если i_m и i_j принимают значения 0 или 1, то

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}(S_m^{i_m}S_j^{i_j}x)=(-1)^{i_m(k_m+1)+i_j(k_j+1)}\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)\,.$$

Тогда в общем случае получаем следующее равенство

$$\Delta^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}\left(S_n^{i_n}\dots S_2^{i_2}S_1^{i_1}x\right)=(-1)^{i_1(k_1+1)+i_2(k_2+1)+\dots+i_n(k_n+1)}\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)=$$

$$=(-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+\dots+i_nk_n}\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x).$$

Теперь если применим к функции оператор L, то из предыдущих равенств следует

$$Lu^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta^2 u^D_{k_1k_2\dots k_n}\left(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x\right)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i(-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+\dots+i_nk_n}\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)=$$

$$=\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{|i|+i_1k_1+i_2k_2+\dots+i_nk_n}a_i\right)=\varepsilon^D_{k_1k_2\dots k_n}\mu^2_{k_1k_2\dots k_n}u^D_{k_1k_2\dots k_n}(x)\,.$$

Таким образом, функция $u^D_{k_1k_2...k_n}(x)$ кроме условии (1.2) и (1.3) удовлетворяет и равенству

$$Lu^D_{k_1k_2...k_n}(x) = \lambda^D_{k_1k_2...k_n} u_{k_1k_2...k_n}(x),$$

т.е. уравнению (1.1). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если для некоторого $m_1, m_2, ..., m_n \in N$ выполняется условие

$$\varepsilon^D_{k_1k_2...k_n} = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-1)^{|i|+i_1m_1+i_2m_2+...+i_nm_n} = 0,$$

то число $\lambda = 0$ является бесконечно кратным собственным значением.

Замечание 2.2. Если для всех $k_j \in N,\ j = 1,2,...,n$ выполняются условия $\varepsilon_{k_1k_2...k_n} > 0$, то все собственные значения задачи 1 являются положительными.

Пример 2.1. Пусть $n = 2$. Тогда уравнение (1.1) имеет вид

$$a_0\Delta^2 u(x_1,x_2) + a_1\Delta^2 u(p_1 - x_1, x_2) + a_2\Delta^2 u(x_1, p_2 - x_2) + a_2\Delta^2 u(p_1 - x_1, p_2 - x_2) = \lambda u(x_1,x_2).$$

а краевые условия записываются в виде

$$u(0,x_2) = u(p_1,x_2) = 0, 0 \le x_2 \le p_2; u(x_1,0) = u(x_1,p_2) = 0, 0 \le x_1 \le p_1,$$

$$u_{x_1x_1}(0,x_2) = u_{x_1x_1}(p_1,x_2) = 0, 0 \le x_2 \le p_2; u_{x_2x_2}(x_1,0) = u_{x_2x_2}(x_1,p_2) = 0, 0 \le x_1 \le p_1.$$

Собственные функции этой задаются в виде

$$u^D_{m,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{p_1p_2}} \sin\frac{m\pi x_1}{p_1} \sin\frac{k\pi x_2}{p_2}, m,k = 1,2,...,$$

а соответствующие им собственные значения имеют вид

$$\lambda^D_{m,k} = \varepsilon^D_{m,k}\pi^4 \left(\frac{m^2}{p_1^2} + \frac{k^2}{p_2^2}\right)^2, m,k = 1,2,....,$$

где $\varepsilon^D_{m,k}$ имеет вид

$$\varepsilon^D_{m,k} = a_0 + (-1)^{m+1}a_1 + (-1)^{k+1}a_2 + (-1)^{k+m}a_3.$$

Более точно $\varepsilon^D_{m,k}$ можно записать в виде

$$\varepsilon^D_{(2m-1),(2k-1)} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3;\ \varepsilon^D_{(2m-1),2k} = a_0 + a_1 - a_2 - a_3;$$

$$\varepsilon^D_{2m,(2k-1)} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3;\ \varepsilon^D_{2m,2k} = a_0 - a_1 - a_2 + a_3, m,k = 1,2,....$$

3. Исследования задачи 2.

В этом пункте исследуем задачу 2. На отрезке $[0, p]$ рассмотрим систему функции

$$Y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{p}}, Y_k(t) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi}{p} t, k \in N .$$

Как и в случае системы $T_k(t)$ имеет место следующие утверждения.

Лемма 3.1. Система $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ обладают следующими свойствами:

1) система $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $L_2[0, p]$;

2) система $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $L_2[0, p]$.

Лемма 3.2. Для элементов системы $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ справедливы следующие равенства:

1) $Y_k(p-t) = (-1)^k Y_k(t), k \geq 0$;

2) $Y_k^{(4)}(t) = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t); Y_k^{(4)}(p-t) = (-1)^k \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t)$.

Доказательство. Очевидно, что для функции $Y_0(t)$ имеет место равенство $Y_0(p-t) = (-1)^0 Y_0(t)$. Если $k \geq 1$, то для $Y_k(p-t)$ имеем

$$Y_k(p-t) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi}{p}(p-t) = \sqrt{\frac{2}{p}} \left[\cos k\pi \cdot \cos\frac{k\pi}{p} t - \sin k\pi \cdot \sin\frac{k\pi}{p} t\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{p}} \cos k\pi \cdot \cos\frac{k\pi}{p} t = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{p}} \cdot \cos\frac{k\pi}{p} t = (-1)^k Y_k(t).$$

Свойство 1) доказано. Далее, дифференцируя дважды функцию $Y_k(t)$ получаем

$$Y_k''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi}{p} t\right) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 \cos\frac{k\pi}{p} t .$$

Отсюда для $Y_k^{(4)}(t)$ имеем

$$Y_k^{(4)}(t) = \frac{d^4}{dt^4}\left(\sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi}{p} t\right) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\frac{k\pi}{p} t\right) = \sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 \cos\frac{k\pi}{p} t = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) .$$

Из этого равенства и свойства 1) следует

$$Y_k^{(4)}(p-t) = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(p-t) = (-1)^k \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) .$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. Если выполняются условия $a_0 \pm a_1 \neq 0$, то элементы системы $\{Y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ являются собственными функциями следующей спектральной задачи:

$$a_0 y^{(4)}(t) + a_1 y^{(4)}(p-t) = \lambda y(t), 0 < t < p, \tag{3.1}$$

$$y'(0) = y'(p) = 0, y'''(0) = y'''(p) = 0. \tag{3.2}$$

Соответствующие собственные значения определяются равенствами

$$\lambda_k^N = \varepsilon_k \mu_k^2, \mu_k = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2, k = 0,1,\dots,$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} a_0 + a_1, k = 2m, m = 0,1,\dots \\ a_0 - a_1, k = 2m-1, m = 1,2,\dots \end{cases}.$$

Доказательство. Если воспользуемся свойством 2) функции $Y_k(t)$ из Леммы 3.2, то

$$a_0 Y_k^{(4)}(t) + a_1 Y_k^{(4)}(p-t) = a_0 \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) + a_1 (-1)^k \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) =$$

$$= \left(a_0 + (-1)^k a_1\right) \left(\frac{k\pi}{p}\right)^4 Y_k(t) = \varepsilon_k \mu_k^2 Y_k(t) = \lambda_k^N Y_k(t).$$

Лемма доказана.

Следствие 3.1. Если выполняются условия $a_0 \pm a_1 \neq 0$, то система собственных функции задачи (3.1), (3.2) является ортонормированной и полной в пространстве $L_2[0,p]$.

Пусть $k,m = 0,1,2,\dots$ и

$$u_{00}^N(x_1,x_2) = Y_0(x_1) \cdot Y_0(x_2) \equiv \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2}},$$

$$u_{k0}^N(x_1,x_2) = Y_k(x_1) \cdot Y_0(x_2) \equiv \sqrt{\frac{2}{p_1 p_2}} \cos \frac{k\pi}{p_1} x_1, k \in \mathbb{N},$$

$$u_{0m}^N(x_1,x_2) = Y_0(x_1) \cdot Y_m(x_2) \equiv \sqrt{\frac{2}{p_1 p_2}} \cos \frac{m\pi}{p_2} x_1, m \in \mathbb{N}$$

$$u_{km}^N(x_1,x_2)=Y_k(x_1)\cdot Y_m(x_2)\equiv\frac{2}{\sqrt{p_1p_2}}\cos\frac{k\pi}{p_1}x_2\cos\frac{m\pi}{p_2}x_2,m,k\in N\ .$$

Пусть $m,k\geq 1$. Рассмотрим действие оператора Δ^2 к функции $u_{km}^N(x_1,x_2)$. Имеем

$$\frac{\partial^2 u_{km}^N(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}=-\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2 u_{km}^N(x_1,x_2),\frac{\partial^2 u_{km}^N(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}=-\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2 u_{km}^N(x_1,x_2)\ .$$

Отсюда

$$\Delta u_{km}^N(x_1,x_2)=-\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]u_{km}^N(x_1,x_2),$$

$$\Delta^2 u_{km}^N(x_1,x_2)=\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2 u_{km}^N(x_1,x_2)\ .$$

При преобразовании аргументов имеют место равенства

$$\Delta^2 u_{km}^N(p_1-x_1,x_2)=(-1)^k\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2 u_{km}^N(x_1,x_2)\ ,$$

$$\Delta^2 u_{km}^N(x_1,p_2-x_2)=(-1)^m\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2 u_{km}^N(x_1,x_2)\ ,$$

$$\Delta^2 u_{km}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=(-1)^{k+m}\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2 u_{km}^N(x_1,x_2)\ .$$

Тогда

$$a_0\Delta^2 u_{km}^N(x_1,x_2)+a_1\Delta^2 u_{km}^N(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2 u_{km}^N(x_1,p_2-x_2)+a_3\Delta^2 u_{km}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=$$

$$=\left(a_0+(-1)^k a_1+(-1)^m a_2+(-1)^{k+m}a_3\right)\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2 u_{km}^N(x_1,x_2)\ .$$

Аналогичные равенства справедливы и для функции $u_{k0}^N(x_1,x_2)$ и $u_{0m}^N(x_1,x_2)$. Действительно, по определению оператора Δ^2 имеем

$$\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^2\left(\sqrt{\frac{2}{p_1p_2}}\cos\frac{k\pi}{p_1}x_1\right)=\sqrt{\frac{2}{p_1p_2}}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}\left(\cos\frac{k\pi}{p_1}x_1\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{p_1p_2}}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}\left(\cos\frac{k\pi}{p_1}x_1\right)=\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^4\sqrt{\frac{2}{p_1p_2}}\cos\frac{k\pi}{p_1}x_1=\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^4 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,.$$

Отсюда,

$$\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)=\left(\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right)^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,,$$

$$\Delta^2 u_{k0}^N(p_1-x_1,x_2)=(-1)^k\left(\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right)^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,,$$

$$\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,p_2-x_2)=(-1)^0\left(\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right)^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,,$$

$$\Delta^2 u_{k0}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=(-1)^{k+0}\left(\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right)^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)$$

Тогда

$$a_0\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)+a_1\Delta^2 u_{k0}^N(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2 u_{k0}^N(x_1,p_2-x_2)+a_3\Delta^2 u_{k0}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=$$

$$=\left(a_0+(-1)^k a_1+(-1)^0 a_2+(-1)^{k+0}a_3\right)\left[\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{0\cdot\pi}{p_2}\right)^2\right]^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,,$$

и

$$a_0\Delta^2 u_{0m}^N(x_1,x_2)+a_1\Delta^2 u_{0m}^N(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2 u_{0m}^N(x_1,p_2-x_2)+a_3\Delta^2 u_{0m}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=$$

$$=\left(a_0+(-1)^0 a_1+(-1)^m a_2+(-1)^{0+m}a_3\right)\left[\left(\frac{0\cdot\pi}{p_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2\right]^2 u_{k0}^N(x_1,x_2)\,.$$

В частности, при любых $a_0,a_1,a_2,a_3\in R$ для функции $u_{00}^N(x_1,x_2)$ получаем

$$a_0\Delta^2 u_{00}^N(x_1,x_2)+a_1\Delta^2 u_{00}^N(p_1-x_1,x_2)+a_2\Delta^2 u_{00}^N(x_1,p_2-x_2)+a_3\Delta^2 u_{00}^N(p_1-x_1,p_2-x_2)=$$

$$= 0 \cdot u_{00}^N(x_1, x_2).$$

Если введем обозначение $\varepsilon_{km}^N = a_0 + (-1)^k a_1 + (-1)^m a_2 + (-1)^{k+m} a_3$, то для всех $i, j \ge 0$ имеют место равенства

$$\varepsilon_{2i2j}^N = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \varepsilon_{2i(2j+1)}^N = a_0 + a_1 - a_2 - a_3;$$

$$\varepsilon_{(2i+1)2j}^N = a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \varepsilon_{(2i+1)(2j+1)}^N = a_0 - a_1 - a_2 - a_3.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.4. Если выполняются условия $\varepsilon_{km}^N \ne 0$, то элементы системы $\left\{u_{km}^N(x_1, x_2)\right\}_{k,m=0}^{\infty}$ являются собственными функциями следующей спектральной задачи:

$$a_0\Delta^2 u(x_1, x_2) + a_1\Delta^2 u(p_1 - x_1, x_2) + a_2\Delta^2 u(x_1, p_2 - x_2) + a_3\Delta^2 u(p_1 - x_1 x_1, p_2 - x_2) =$$

$$= \lambda u(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in (0, p_1) \times (0, p_2), \qquad (3.3)$$

$$u_{x_1}(0, x_2) = u_{x_1}(p_1, x_2) = 0, 0 \le x_2 \le p_2, u_{x_2}(x_1, 0) = u_{x_2}(x_1, p_2) = 0, 0 \le x_1 \le p_1, \qquad (3.4)$$

$$u_{x_1x_1x_1}(0, x_2) = u_{x_1x_1x_1}(p_1, x_2) = 0, 0 \le x_2 \le p_2, u_{x_2x_2x_2}(x_1, 0) = u_{x_2x_2x_2}(x_1, p_2) = 0, 0 \le x_1 \le p_1. \qquad (3.5)$$

Соответствующие им собственные значения определяются равенствами

$$\lambda_{km}^N = \lambda_{km}^N \mu_{km}^2, \mu_{km} = \left(\frac{k\pi}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{p_2}\right)^2, k, m = 0, 1, \dots.$$

Следствие 3.2. Если выполняются условия $\varepsilon_{km}^N \ne 0$, то система собственных функции задачи (3.3)-(3.5) является ортонормированной и полной в пространстве $L_2[0, p]$.

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть в задаче 2 коэффициенты a_i такие, что для всех $k_j \in \{N \cup 0\}, j = 1, 2, \dots, n$ выполняются условия $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{|i| + i_1 k_1 + i_2 k_2 + \dots + i_n k_n} a_i \ne 0$. Тогда собственные функции задачи 2 определяются равенствами

$$u_{k_1 k_2 \dots k_n}^N(x) = Y_{k_1}(x_1) \cdot Y_{k_2}(x_2) \cdot \dots \cdot Y_{k_n}(x_n), k_j \in \{N \cup 0\}, j = 1, 2, \dots,$$

а соответствующие им собственные значения имеют вид

$$\lambda_{k_1 k_2 \dots k_n}^N = \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}^N \mu_{k_1 k_2 \dots k_n}^2, \mu_{k_1 k_2 \dots k_n} = \pi^2 \sum_{j=1}^n \frac{k_j^2}{p_j^2}, k_j \in \{N \cup 0\}, j = 1, 2, \dots, n,$$

где $\varepsilon^N_{k_1k_2\ldots k_n}=\sum\limits_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n}a_i$.

Доказательство. Легко видеть, что функции $u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ удовлетворяют условиям (1.4) и (1.5). Покажем, что данная функция удовлетворяет и уравнению (1.1). Если к функции $u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ применим оператор $\frac{\partial^2}{\partial x_q^2},1\le q\le n$, то

$$\frac{\partial^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)}{\partial x_q^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_q^2}\left(Y_{k_1}(x_1)\cdot Y_{k_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n)\right)=-\left(\frac{k_q\pi}{p_q}\right)^2 Y_{k_1}(x_q)\cdot Y_{k_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n).$$

Отсюда приеменяя к этой функции оператор Лапласа получаем

$$\Delta u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=-\left(\sum_{q=1}^n\left(\frac{k_q\pi}{p_q}\right)^2\right)u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Из последнего равенства следует

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\left(\sum_{q=1}^n\left(\frac{k_q\pi}{p_q}\right)^2\right)^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\pi^4\left(\sum_{q=1}^n\frac{k_q^2}{p_q^2}\right)^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x),\mu_{k_1k_2\ldots k_n}=\pi^2\left(\sum_{i=1}^n\frac{k_i^2}{p_i^2}\right).$$

Отсюда при любом $m\in\{1,2,\ldots,n\}$ получаем

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x_1,\ldots,x_{m-1},p_m-x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)=\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x_1,\ldots,x_{m-1},p_m-x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)=$$

$$=\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}Y_{k_m}(p_m-x_m)\cdot Y_{k_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot Y_{k_{m-1}}(x_{m-1})\cdot Y_{k_{m+1}}(x_{m+1})\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n)=$$

$$=(-1)^{k_m}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}Y_{k_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot Y_{k_{m-1}}(x_{m-1})\cdot Y_{k_m}(x_m)\cdot Y_{k_{m+1}}(x_{m+1})\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n)=$$

$$=(-1)^{k_m}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Пусть теперь $0\le i\le 2^n-1$ или $i=(i_n\ldots i_2i_1)_2$, где $i_m=0$ или $i_m=1$ для всех $1\le m\le n$. Тогда если $i_m=1$, то

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(S_m^{i_m}x)=\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}Y_{k_m}(p_m-x_m)\cdot Y_{k_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot Y_{k_{m-1}}(x_{m-1})\cdot Y_{k_{m+1}}(x_{m+1})\cdot\ldots\cdot Y_{k_n}(x_n)=$$

$$(-1)^{k_m}\,\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)\,.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(S_m^{i_m}x)=(-1)^{i_mk_m}\,\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)\,. \tag{3.6}$$

Очевидно, что равенство (3.6) верно и для случая $i_m=0$. Отсюда следует, что если i_m и i_j принимают значения 0 или 1, то

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(S_m^{i_m}S_j^{i_j}x)=(-1)^{i_mk_m+i_jk_j}\,\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x_1,x_2)\,.$$

Тогда в общем случае получаем следующее равенство

$$\Delta^2 u^N_{k_1k_2\ldots k_n}\left(S_n^{i_n}\ldots S_2^{i_2}S_1^{i_1}x\right)=(-1)^{i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n}\,\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)\,.$$

Теперь если применим к функции оператор L, то из предыдущих равенств следует

$$Lu^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta^2u^N_{k_1k_2\ldots k_n}\left(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x\right)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i(-1)^{|i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n}\,\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=$$

$$=\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{i_1k_1+i_2k_2+\ldots+i_nk_n}a_i\right)=\varepsilon^N_{k_1k_2\ldots k_n}\mu^2_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\lambda^N_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)\,.$$

Таким образом, функция $u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ кроме условии (1.4) и (1.5) удовлетворяет и равенству

$$Lu^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)=\lambda^N_{k_1k_2\ldots k_n}u^N_{k_1k_2\ldots k_n}(x)\,,$$

т.е. уравнению (1.1). Теорема доказана.

4.Исследование задачи типа Самарского – Ионкина.

Пусть a_0,a_1 некоторые действительные числа. Введем оператор

$$L_2u(x_1,x_2)=a_0\Delta^2u(x_1,x_2)+a_1\Delta^2u(1-x_1,x_2)\,.$$

Рассмотрим в области $\Pi_2=(0,1)\times(0,1)$ следующую задачу

Задача 3 (Задача типа Самарского-Ионкина). Найти функцию $u(x)\neq 0$ из класса $u(x)\in C^4\left(\Pi\right)\cap C^3\left(\bar{\Pi}\right)$ и число $\lambda\in\mathbb{C}$ удовлетворяющие условиям

$$L_2u(x_1,x_2)=\lambda u(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in\Pi_2\,, \tag{4.1}$$

$$u(0,x_2)=u_{x_1x_1}(0,x_2)=0,u_{x_1}(0,x_2)=u_{x_1}(1,x_2),u_{x_1x_1x_1}(0,x_2)=u_{x_1x_1x_1}(1,x_2),0\le x_2\le 1\,, \tag{4.2}$$

$$u(x_1,0)=u(x_1,1)=u_{x_2x_2}(x_1,0)=u_{x_2x_2}(x_1,1)=0, 0\le x_1\le 1. \tag{4.3}$$

Сначала находим сопряженную задачу. Пусть $u(x_1,x_2)$ является решением задачи (4.1)-(4.3), а $v(x_1,x_2)$ пока произвольная достаточна гладкая функция. Рассмотрим выражение

$$\left(\Delta^2 u,v\right)=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^4}\right)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 .$$

Сперва рассмотрим интеграл

$$I_1=\int_0^1\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}v(x_1,x_2)dx_1 .$$

Интегрируя по частям этот интеграл, с учетом краевых условий (4.2) и (4.3) получаем

$$I_1=\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}v(x_1,x_2)\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=1}-\int_0^1\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}dx_1=$$

$$=u_{x_1x_1x_1}(1,x_2)v(1,x_2)-u_{x_1x_1x_1}(0,x_2)v(0,x_2)-\int_0^1\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}dx_1=$$

$$=u_{x_1x_1x_1}(1,x_2)\left[v(1,x_2)-v(0,x_2)\right]-\int_0^1\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}dx_1 .$$

Если теперь положим $v(1,x_2)=v(0,x_2)$, то

$$I_1=-\int_0^1\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}dx_1=-\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\Bigg|_{x_1=0}^{x_1=1}+\int_0^1\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}dx_1=$$

$$=v_{x_1}(0,x_2)u_{x_1x_1}(0,x_2)-v_{x_1}(1,x_2)u_{x_1x_1}(1,x_2)+\int_0^1\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}dx_1 .$$

В последнем выражении считаем $v_{x_1}(1,x_2)=0$. Тогда с учетом условия $u_{x_1x_1}(0,x_2)=0$ получаем

$$I_1=\int_0^1\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}dx_1=\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Bigg|-\int_0^1\frac{\partial^3 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1=$$

$$=u_{x_1}(1,x_2)v_{x_1x_1}(1,x_2)-u_{x_1}(0,x_2)v_{x_1x_1}(0,x_2)-\int_0^1\frac{\partial^3 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1=$$

$$= u_{x_1}(1,x_2)\underbrace{\left[v_{x_1x_1}(1,x_2) - v_{x_1x_1}(0,x_2)\right]}_{0} - \int_0^1 \frac{\partial^3 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^3}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1 =$$

$$= v_{x_1x_1x_1}(0,x_2)\underbrace{u(0,x_2)}_{0} - \underbrace{v_{x_1x_1x_1}(1,x_2)}_{0}u(1,x_2) + \int_0^1 \frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}u(x_1,x_2)dx_1 .$$

Таким образом, если функция $v(x_1,x_2)\in C^4\left(\overline{\Pi}_2\right)$ и удовлетворяет условиям

$$v(0,x_2) = v(1,x_2), v_{x_1x_1}(0,x_2) = v_{x_1x_1}(1,x_2), v_{x_1}(1,x_2) = 0, v_{x_1x_1x_1}(1,x_2) = 0, 0 \le x_2 \le 1, \quad (4.4)$$

то справедливо равенство

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}v(x_1,x_2)dx_1 = \int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^4}dx_1 .$$

Аналогично исследуется интеграл

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^4}v(x_1,x_2)dx_2 .$$

А именно,

$$I_2 = u_{x_2x_2x_2}(x_1,1)\underbrace{v(x_1,1)}_{0} - u_{x_2x_2x_2}(x_1,0)\underbrace{v(x_1,0)}_{0} - \int_0^1 \frac{\partial^3 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^3}v_{x_2}(x_1,x_2)dx_2 =$$

$$= \underbrace{u_{x_2x_2}(x_1,0)}_{0}v_{x_2}(x_1,0) - \underbrace{u_{x_2x_2}(x_1,1)}_{0}v_{x_2}(x_1,1) + \int_0^1 \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}v_{x_2x_2}(x_1,x_2)dx_2 =$$

$$= u_{x_2}(x_1,1)\underbrace{v_{x_2x_2}(x_1,1)}_{0} - u_{x_2}(x_1,0)\underbrace{v_{x_2x_2}(x_1,0)}_{0} - \int_0^1 \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}v_{x_2x_2x_2}(x_1,x_2)dx_2$$

$$= \underbrace{u(x_1,0)}_{0}v_{x_2x_2x_2}(x_1,0) - \underbrace{u(x_1,1)}_{0}v_{x_2x_2x_2}(x_1,1) + \int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_2^4}dx_2 = \int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_2^4}dx_2.$$

Итак, если функция $v(x_1,x_2)$ к дополнению к условиям (4.4) удовлетворяет и условиям

$$v(x_1,0) = v(x_1,1) = v_{x_2x_2}(x_1,0) = v_{x_2x_2}(x_1,1) = 0, 0 \le x_1 \le 1, \quad (4.5)$$

то справедливо равенство

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^4} v(x_1,x_2)dx_2 = \int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_2^4}dx_2 .$$

Наконец при выполнении условий (4.4) и (4.5) для интеграла

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} v(x_1,x_2)dx_1 dx_2$$

получаем

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_{x_2x_2}(x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = -\int_0^1 \int_0^1 u_{x_2x_2}(x_1,x_2)v_{x_1x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 u(x_1,x_2)\frac{\partial^4 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}dx_1dx_2 .$$

Следовательно, при выполнении условий (4.4) и (4.5) имеет место равенство

$$\left(\Delta^2 u, v\right) = \int_0^1 \int_0^1 \Delta^2 u(x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 u(x_1,x_2)\Delta^2 v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \left(u, \Delta^2 v\right). \quad (4.6)$$

Заметим, что

$$\int_0^1 \Delta^2 u(1-x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1 = \left(1-x_1=\xi\right) = \int_0^1 \Delta^2 u(\xi,x_2)v(1-\xi,x_2)d\xi .$$

Тогда из равенства (4.6) вытекает

$$\int_0^1 \int_0^1 \Delta^2 u(1-x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 u(x_1,x_2)\Delta^2 v(1-x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \int_0^1 L_2 u(x_1,x_2)v(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 u(x_1,x_2)L_2 v(x_1,x_2)dx_1dx_2 .$$

Таким образом, сопряженная задача определяется с условиями

$$L_2 v(x_1,x_2) = \lambda v(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in \Pi_2, \quad (4.7)$$

$$v(0,x_2) = v(1,x_2), v_{x_1x_1}(0,x_2) = v_{x_1x_1}(1,x_2), v_{x_1}(1,x_2) = 0, v_{x_1x_1x_1}(1,x_2) = 0, 0 \le x_2 \le 1, \quad (4.8)$$

$$v(x_1,0) = v(x_1,1) = v_{x_2x_2}(x_1,0) = v_{x_2x_2}(x_1,1) = 0, 0 \le x_1 \le 1. \quad (4.9)$$

Теперь находим собственные и присоединенные функции задач (4.1)- (4.3) и (4.7)- (4.9). Для этого приведем некоторые известные факты. Рассмотрим следующую одномерную спектральную задачу

$$v''(t)+\mu v(t), 0<t<1, v(0)=0, v'(0)=v'(1) \tag{4.10}$$

В работе [14] показана, что задача (4.10) является несамосопряженной и сопряженной к ней будет задача

$$w''(t)+\nu w(t)=0, 0<t<1, w'(0)=0, w(0)=w(1) \tag{4.11}$$

Собственные значения и собственные функции задачи (4.10) имеют вид

$$\mu_k=(2\pi k)^2, k\ge 0, v_0(t)=t, v_k(t)=\sin(2\pi kt), k\ge 1.$$

Как показано в работе [14] собственные функции $v_k(t)$ при $k\ge 1$ попарно не ортогональны к функции $v_0(t)$ и их система не полна в $L_2(0,1)$. Их можно пополнять до полной системы присоединенными функциями задачи (4.4). Ими являются функции

$$\tilde{v}_k(t)=t\cos(2\pi kt), k=1,2,\dots.$$

Систему собственных и присоединенных функций переобозначим следующим образом:

$$v_0(t)=t, v_{2k-1}(t)=t\cos(2\pi kt), v_{2k}(t)=\sin(2\pi kt), k\ge 1. \tag{4.12}$$

Систему собственных и присоединенных функций сопряженной задачи (4.11) запишем следующим образом:

$$w_0(t)=2, w_{2k-1}(t)=4\cos(2\pi kt), v_{2k}(t)=4(1-t)\sin(2\pi kt), k\ge 1. \tag{4.13}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1 [14]. Для систем функций $\{v_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{w_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ справедливы следующие утверждения:

1) последовательности функций (4.12) и (4.13) образуют биортогональную на интервале $(0,1)$ систему функций, т.е. справедливы равенства

$$\int_0^1 v_i(t)w_j(t)dt=\begin{cases}1, i=j\\0, i\ne j\end{cases}.$$

2) последовательности функций (4.12) и (4.13) образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Пусть теперь $y_k(t)=\sqrt{2}\sin k\pi t$. Рассмотрим системы:

$$V_{0k}(x_1,x_2)=y_k(x_2), V_{(2m-1)k}(x_1,x_2)=v_{2m-1}(x_1)\cdot y_k(x_2), V_{2mk}(x_1,x_2)=v_{2m}(x_1)\cdot y_k(x_2), \tag{4.14}$$

$$W_{0k}(x_1,x_2)=w_0(x_1)\cdot y_k(x_2), W_{(2m-1)k}(x_1,x_2)=w_{2m-1}(x_1)\cdot y_k(x_2),$$
$$W_{2mk}(x_1,x_2)=w_{2m}(x_1)\cdot y_k(x_2). \qquad (4.15)$$

Легко показать, что система (4.14) удовлетворяет условиям (4.2) и (4.3), а система (4.15) условиям (4.8) и (4.9).

В работе [15] доказано следующее утверждение.

Лемма 4.2 [15]. Для систем функций $\{V_{mk}(x_1,x_2)\}_{m,k=0}^{\infty}$ и $\{W_{mk}(x_1,x_2)\}_{m,k=0}^{\infty}$ справедливы следующие утверждения:

1) последовательности функций (4.14) и (4.15) образуют биортогональную на множестве $(0,1)\times(0,1)$ систему функций, т.е. справедливы равенства: $(V_{km},W_{ij})=1$ если $k=i, m=j$, иначе $(V_{km},W_{ij})=0$, где $k,i=1,2,...,m, j=0,1,...,$ и

$$(V_{km},V_{ij})=\int_0^1\int_0^1 V_{km}(x_1,x_2)V_{ij}(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

2) последовательности функций (4.14) и (4.15) образуют базис в пространстве $L_2[(0,1)\times(0,1)]$.

Далее, исследуем некоторые дополнительные свойства систем (4.14) и (4.15).

Лемма 4.3. Система функции $\{V_{mk}(x_1,x_2)\}_{m,k=0}^{\infty}$ удовлетворяет следуюшим равенствам

$$\Delta^2 V_{0k}(x_1,x_2)=(k\pi)^4 V_{0k}(x_1,x_2), \qquad (4.16)$$

$$\Delta^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2)=\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2), \qquad (4.17)$$

$$\Delta^2 V_{2nk}(x)=\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]^2 V_{2nk}(x)-4(2\pi n)\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]V_{(2n-1)k}(x). \qquad (4.18)$$

Доказательство. Для функции $V_{0k}(x)$ имеем

$$\Delta^2 V_{0k}(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right)\sqrt{2}\sin(k\pi x_2)=(k\pi)^4\sqrt{2}\sin(k\pi x_2)=(k\pi)^4 V_{0k}(x).$$

Аналогично для функции $V_{(2n-1)k}(x)$ получаем

$$\Delta^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2)=v_{(2n-1)}^{(4)}(x_1)y_k(x_2)+2v''_{(2n-1)}(x_1)y''_k(x_2)+v_{(2n-1)}(x_1)y_k^{(4)}(x_2)=$$

$$=\left[(2\pi n)^4+2(2\pi n)^2(k\pi)^2+(k\pi)^4\right]v_{(2n-1)}(x_1)y_k(x_2)=$$

$$=\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]^2 v_{(2n-1)}(x_1)y_k(x_2)=\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2).$$

И наконец для $V_{2nk}(x_1,x_2)$ имеем

$$\Delta^2 V_{2nk}(x_1,x_2)=v_{2n}^{(4)}(x_1)y_k(x_2)+2v_{2n}''(x_1)y_k''(x_2)+v_{2n}(x)y_k^{(4)}(x_2)=$$

$$=\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]^2 v_{2n}(x_1)y_k(x_2)-4(2\pi n)\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]v_{2n-1}(x_1)y_k(x_2)=$$

$$=\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]^2 V_{2nk}(x)-4(2\pi n)\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]V_{(2n-1)k}(x).$$

Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.4. Система функции $\left\{V_{nk}(x_1,x_2)\right\}_{n,k=0}^{\infty}$ удовлетворяет следуюшим равенствам

$$L_2V_{0k}(x)=\varepsilon_{k,2}(k\pi)^4V_{0k}(x), \tag{4.19}$$

$$L_2V_{(2n-1)k}(x)=\varepsilon_{k,2}\left[\left(2\pi n\right)^2+\left(k\pi\right)^2\right]^2 V_{(2n-1)k}(x), \tag{4.20}$$

$$L_2V_{2nk}(x)=\varepsilon_{k,2}\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]^2 V_{2nk}(x)-4(2\pi n)\varepsilon_{k,2}\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]V_{(2n-1)k}(x), \tag{4.21}$$

где обозначено $\varepsilon_{k,2}=a_0+(-1)^{k+1}a_1$.

Доказательство. Так как $y_k(1-x_2)=(-1)^{k+1}y_k(x_2)$, то из равенств (4.16), (4.17) и (4.18) следуют

$$\Delta^2V_{0k}(x_1,1-x_2)=(-1)^{k+1}(k\pi)^4V_{0k}(x_1,x_2),$$

$$\Delta^2V_{(2n-1)k}(x_1,1-x_2)=(-1)^{k+1}\left[\left(2\pi n\right)^2+\left(k\pi\right)^2\right]^2 V_{(2n-1)k}(x_1,x_2),$$

$$\Delta^2V_{2nk}(x_1,1-x_2)=(-1)^{k+1}\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]^2 V_{2nk}(x_1,x_2)-$$
$$-4(2\pi n)(-1)^{k+1}\left[(2\pi n)^2+(k\pi)^2\right]V_{(2n-1)k}(x_1,x_2).$$

Отсюда получаем выполнение равенств (4.19), (4.20) и (4.21). Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.5. Система функции $\left\{W_{nk}(x_1,x_2)\right\}_{n,k=0}^{\infty}$ удовлетворяет следуюшим равенствам

$$L_2W_{0k}(x_1,x_2)=\varepsilon_{k,2}(k\pi)^4W_{0k}(x_1,x_2),$$

$$L_2W_{(2n-1)k}(x)=\varepsilon_{k,2}\left[(2\pi n)^2+(k\pi y)^2\right]^2 W_{(2n-1)k}(x)-\varepsilon_{k,2}4(2\pi n)\left[(2\pi n)^2+(k\pi y)^2\right]W_{2nk}(x),$$

$$L_2W_{2nk}(x)=\varepsilon_{k,2}\left[\left(2\pi n\right)^2+\left(k\pi\right)^2\right]^2 W_{2nk}(x).$$

Теперь приведем основное утверждение относительно задачи (4.1)-(4.3).

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия $a_0 \pm a_1 > 0$. Тогда относительно задачи (4.1)-(4.3) справедливы следующие утверждения:

1) задача (4.1)-(4.3) является несамосопряженной, сопряженным к ней является задача (4.4)-(4.6);

2) собственными функциями задачи (4.1)-(4.3) являются функции $V_{0k}(x_1,x_2), V_{(2n-1)k}(x_1,x_2), n=1,2,\ldots$. Соответствующие им собственные значения определяются равенствами

$$\lambda_{0k} = \varepsilon_{k,2}(k\pi)^4, \lambda_{(2n-1)k} = \varepsilon_{k,2}\left[\left(2\pi n\right)^2 + \left(k\pi\right)^2\right]^2, n=1,2,\ldots,k=0,1,\ldots;$$

3) присоединенные функции задачи (4.1)-(4.3) можно выбрать в виде $V_{2nk}(x_1,x_2), n=1,2,\ldots$;

4) система собственных и присоединенных функций задач (4.1)-(4.3) и (4.4)-(4.6) являются попарно ортогональными;

5) система собственных и присоединенных функций задачи (4.1)-(4.3) образуют базис в пространстве $L_2[(0,1)\times(0,1)]$;

6) система собственных и присоединенных функций сопряженной задачи (4.4)-(4.6) образуют базис в пространстве $L_2[(0,1)\times(0,1)]$.

Доказательство этой теоремы вытекает из утверждений Лемм 4.2,4.4 и 4.5.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP19677926).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation// Turkish journal of mathematics. – 2019. – Vol.43, No.3. – P.1604 – 1625. doi:10.3906/mat-1901-71
2. Турметов Б.Х., Карачик В. В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2021. – Т.31, № 4. – Р. 651 – 667. DOI: 10.35634/vm210409.
3. Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution // Symmetry. – 2021. – Vol.13, No. 1781. – P. 1 – 20. https://doi.org/ 10.3390/ sym13101781.
4. Turmetov B.Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball// Complex Variables Elliptic Equation. – 2023. – Vol.68, No.7. – P. 1204–1218. DOI: 10.1080/17476933.2022.2040021.
5. Yarka U., Fedushko S., Vesely P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation// Mathematics. – 2020. – Vol.8, No.2108. – P. 1 – 13. doi:10.3390/math8122108.
6. Turmetov B.K., Kadirkulov B.J. On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol.43, No.1. – P. 249 – 262. doi.org/10.1134/S1995080222040217.
7. Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж. О разрешимости некоторых краевых задач для дробного аналога нелокального уравнения Лапласа// Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2022. –

Т.211. – С.14 – 28. DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-14-28.

8. Турметов Б., Шалхар А. О спектральных вопросах некоторых краевых задач для нелокального оператора Лапласа в прямоугольнике// Известия Международного казахско-турецкого университета имени Х.А. Ясави. Серия Математика, Физика, Информатика. – 2022. No.1. – P. 79 – 96.
9. Aziz S., Malik S.A. Identification of an unknown source term for a time fractional fourth-order parabolic equation// Electronic journal of differential equations. – 2016. – 2016, No.293.– P.1–20.
10. Kerbal S., Kadirkulov B.J., Kirane M. Direct and Inverse Problems for a Samarskii-Ionkin Type Problem for a Two-Dimensional Fractional Parabolic Equation// Progress in Fractional Differentiation and Applications. – 2018. –Vol. 4, No.3. –P.147–160. doi:10.18576/pfda/040301.
11. Muratbekova, M., Kadirkulov B., Koshanova M., Turmetov B. On Solvability of Some Inverse Problems for a Fractional Parabolic Equation with a Nonlocal Biharmonic Operator// Fractal and Fractional. – 2023. – Vol.7, No.404. – P.1–18. https://doi.org/10.3390/fractalfract7050404.
12. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. Учебное пособие для вузов.М:, «Высшая школа». 1977. 431 с.
13. Владимиров В.С.Уравнения математической физики. М:, Наука, 1988. 512с.
14. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием//Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т.13, № 2 –С.294 – 304.
15. Ионкин Н.И., Морозова В. А. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями//Дифференциальные уравнения. – 2000, – Т.36, № 7, – С. 884–888. DOI:https://doi.org/10.1007/BF02754498.

REFERENCES

1. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation// Turkish journal of mathematics. – 2019. – Vol.43, No.3. – P.1604 – 1625. doi:10.3906/mat-1901-71
2. Turmetov B. Kh., Karachik V. V. On the solvability of Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution// Vestnik Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science. – 2021. – T. 31, № 4. – P. 651 – 667. DOI: 10.35634/vm210409. [In Russian].
3. Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution // Symmetry. – 2021. – Vol.13, No. 1781. – P. 1 – 20. https://doi.org/ 10.3390/ sym13101781.
4. Turmetov B.Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball// Complex Variables Elliptic Equation. – 2023. – Vol.68, No.7. – P. 1204–1218. DOI: 10.1080/17476933.2022.2040021.
5. Yarka U., Fedushko S., Vesely P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation// Mathematics. – 2020. – Vol.8, No.2108. – P. 1 – 13. doi:10.3390/math8122108.
6. Turmetov B.K., Kadirkulov B.J. On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution// Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol.43, No.1. – P. 249 – 262. doi.org/10.1134/S1995080222040217.
7. Turmetov B.Kh., Kadirkulov B.Zh. On the solvability of some boundary value problems for the fractional analogue of the nonlocal Laplace equation // Results of science and technology. The series «Modern Mathematics and its applications. Thematic reviews». –

2022. – Т.211. – P.14 – 28. DOI: https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-14-28. [In Russian].

8. Turmetov B., Shalkhar A. On spectral questions of some boundary value problems for a non-local Laplace operator in a rectangle // Proceedings of the International Kazakh-Turkish University named after H.A. Yasavi. Series Mathematics, Physics, Computer Science.– 2022. No.1. – P. 79 – 96. [In Russian].
9. Aziz S., Malik S.A. Identification of an unknown source term for a time fractional fourth-order parabolic equation// Electronic journal of differential equations. – 2016. – 2016, No.293.– P.1–20.
10. Kerbal S., Kadirkulov B.J., Kirane M. Direct and Inverse Problems for a Samarskii-Ionkin Type Problem for a Two-Dimensional Fractional Parabolic Equation// Progress in Fractional Differentiation and Applications. – 2018. –Vol. 4, No.3. –P.147–160. doi:10.18576/pfda/040301.
11. Muratbekova, M., Kadirkulov B., Koshanova M., Turmetov B. On Solvability of Some Inverse Problems for a Fractional Parabolic Equation with a Nonlocal Biharmonic Operator// Fractal and Fractional. – 2023. – Vol.7, No.404. – P.1–18. https://doi.org/10.3390/fractalfract7050404.
12. Mikhlin S. G. Linear partial differential equations. Study guide for universities.M:, «High School ». 1977. 431 p. [In Russian].
13. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. M:, The science, 1988. 512p. [In Russian].
14. Ionkin N.I. Solution of one boundary value problem of the theory of thermal conductivity with a non-classical boundary condition // Differential equations. – 1977. – T.13, № 2 – P.294 – 304. [In Russian].
15. Ionkin N.I., Morozova V. A. Two-dimensional heat equation with non-local boundary conditions // Differential equations. –2000, –T.36, №7, –P. 884–888. DOI:https://doi.org/10.1007/BF02754498. [In Russian].