МАТЕМАТИКА

ӘОЖ 517.954;
МҒТАР 27.31.44
https://doi.org/10.47526/2023-3/2524-0080.01

Б.Х.ТУРМЕТОВ[1], З.Н.БАЙМЕТОВА[2]
[1]*физика-математика ғылымдарының докторы, профессор*
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті
(Қазақстан, Түркістан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2]*Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты,*
(Қазақстан, Түркістан), E-mail: zilola.baimetova@ayu.edu.kz

ЕРЕКШЕЛІГІ БАР ИНТЕГРАЛДЫҚ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ШЕШІМІН ҚҰРУДЫҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа. Бұл жұмыста бөлшек ретті интеграл және туындының жаңа кластары қарастырылады. Бұл операторлар әйгілі Риман-Лиувилл интегралы, туындысы және Капуто туындысының жалпыламалары болып табылады. Мақалада бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық әдісі қарастырылады. Бұл әдіс интегралдық және дифференциалдық операторларға қатысты нормаланған жүйелерді құруға негізделген. Нормаланған жүйені құру алгоритмі төрт қадамда беріледі. Бұл әдіс алдымен тұрақты коэффициентті сызықтық интегралдық теңдеудің шешімін құру үшін қолданылады. Қарастырылатын интегралдық теңдеудің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теорема дәлелденеді. Шешімнің айқын түрі анықталады және ол мультивариантты Миттаг-Леффлер түріндегі функция арқылы өрнектелуі көрсетіледі. Мақаланың кейінгі бөлімдерінде біртекті және біртекті емес бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі табылады. Бұл шешімдер айқын түрде анықталып, олар мультивариантты Миттаг-Леффлер түріндегі функция арқылы өрнектеледі.

Түйін сөздер: бөлшек ретті интеграл, бөлшек туынды, интегралдық теңдеу, дифференциалдық теңдеу, нормаланған жүйе, операторлық әдіс, айқын шешім, Миттаг-Леффлер түріндегі функция.

Б.Х.Турметов[1], З.Н.Байметова[2],
[1]*доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави*
(Казахстан, Туркестан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2]*магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави*
(Казахстан, Туркестан),E-mail: zilola.baimetova@ayu.edu.kz

Об операторном методе построения решения интегральных и дифференциальных уравнений с особеностью

Абстракт. В настоящей работе рассматриваются новые классы дробного интеграла и производной. Данные операторы являются обобщениями известных интегралов и производной Римана-Лиувилля и производной Капуто. В статье рассматривается операторный метод решения интегральных и дифференциальных уравнений дробного порядка. Данный метод основан на построении нормированных систем относительно интегральных и дифференциальных операторов. Алгоритм построения нормированных систем задается в виде четырех шагов. Данный метод сперва применяется для построения решения линейных интегральных уравнений с постоянными коэффициентами. Доказывается теорема о существовании и единственности решения рассматриваемого интегрального уравнения. Решения определяются в явном виде и показывается их представимость через мультивариантных функции типа Миттаг-Леффлера В последующих разделах статьи находятся общее решение однородных и неоднородных дифференциальных уравнений дробного порядка. Эти решения определяются в явном виде и они представляются через мультивариантных функции типа Миттаг-Леффлера.

Ключевые слова: интеграл дробного порядка, дробная производная, интегральное уравнение, дифференциальное уравнение, нормированная система, операторный метод, явное решение, функция типа Миттаг-Леффлера.

B.Kh. Turmetov[1] , Z.N.Baimetova[2]
[1]doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2]master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: zilola.baimetova@ayu.edu.kz

On an operator method for constructing solutions to integral and differential equations with a singularity

Abstract. In this paper, we consider new classes of fractional integral and derivative. These operators are generalizations of well-known integrals and the Riemann-Liouville derivative and the Caputo derivative. The article considers an operator method for solving integral and differential equations of fractional order. This method is based on the construction of normalized systems with respect to integral and differential operators. The algorithm for constructing normalized systems is given in the form of four steps. This method is first used to construct solutions to linear integral equations with constant coefficients. A theorem on the existence and uniqueness of a solution of the considered integral equation is proved. Solutions are defined explicitly and their representability in terms of multivariant functions of the Mittag-Leffler type is shown. These solutions are defined explicitly and they are represented in terms of multivariant functions of the Mittag-Leffler type.

Keywords: fractional order integral, fractional derivative, integral equation, differential equation, normalized system, operator method, explicit solution, Mittag-Leffler type function.

Кіріспе

Бұл жұмыс ерекшелігі бар бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық әдісін зерттеуге арналған.

Табығаттың көптеген физикалық және химиялық процесстерін, экономикалық және әлеуметтік-биологиялық құбылыстарын математикалық моделдеу бөлшек ретті дифференциалдық және интегралдық теңдеулер арқылы сиппаталады. Бөлшек ретті дифференциалдық және интегралдық теңдеулер теориясының 300 жылдық тарихы бар болғанымен, оны шын мәнісінде құру өткен ғасырдың 60 - жылдарынан басталған. Бұл теорияның қалыптасуына Р.Горенфло, Ф.Майнарды, Х.Шристава, А.Килбас, И.Подлубный, Ю.Лучко және басқа ғалымдар үлкен үлес қосқан. Бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулер теориясы және оның қолданысына қатысты мәліметтерді [1-3] әдебиеттерден алуға болады.

Бұл теорияның маңызды мәселерінен біреуі - бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін құру болып табылады. Осы таңда бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін құрудың интегралдық теңдеуге келтіру [4], біртіндеп жуықтап шешу [5], Грин функциясы әдісі [6], Микусинскийдің операторлық әдісі [7,8], Адомайн әдісі [9] сияқты әдістер жасалынған. Осы әдістермен қатар бүтін ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімін құруға арналған Б.Бондаренконың нормаланған жүйеге негізделген әдісіде бар [10]. Бұл әдістің жалпыламасы В.В.Карачиктің [11,12] жұмыстарында және оның бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулерге бейімделген модификациясы [13-17] жұмыстарда еңгізілген.

Бұл аталған әдістерді тұрақты немесе айнымалы коэффициентті бүтін және бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін құруда қолдануға болады. Бірақ, ерекшелігі бар айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулердің шешімін құруда бұл аталған әдістерді тікелей қолдануға болмайды. Бұл жұмыста Б.Бондаренко әдісінің осы түрдегі теңдеулердің шешімін құруда қолданылатын модификациясын жасалынады. Бұл әдісті қолдану нәтижесінде шешімдері айқын түрде құрылатын бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулердің жаңа кластары анықталады, осыған сәйкес арнайы функциялардың жаңа класстары енгізіледі.

Енді бұл жұмыста қолданылатын интегралдық және дифференциалдық операторлардың анықтамаларды келтірейік. Айталық, $0 < a < b < \infty$, $0 < \alpha, \beta$ нақты сандары берілген болсын. Келесі белгілеулерді еңгіземіз:

$$ {}_aT^{\alpha} f(x) = (x-a)^{1-\alpha} f'(x), \alpha > 0, \quad {}_a^nT^{\alpha} = \underbrace{{}_aT^{\alpha} \cdot {}_aT^{\alpha} \cdot \ldots \cdot {}_aT^{\alpha}}_{n}, n = 1, 2, \ldots . $$

Кез-келген $0 < \alpha, \beta$ үшін

$$ {}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} f(t) \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}, \quad {}_a^0J^{\alpha} f(x) \equiv f(x), \tag{1} $$

және кез-келген $0 < \alpha, n-1 < \beta \le n$ үшін

$$ {}_a^{\beta}D^{\alpha} f(x) = \frac{{}_a^nT^{\alpha}}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{n-\beta-1} f(t) \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}, \tag{2} $$

$$ {}_a^{C\beta}D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{n-\beta-1} {}_a^nT^{\alpha} f(t) \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}, \tag{3} $$

операторларды қарастырайық.

Бұл операторлар алдымен $\alpha = 1$ болған дербес жағдайда 2014 жыл U.N.Katugampola [18] жұмысында еңгізілген және оның кейбір қолданыстары көрсетілген. Жалпы жағдайда бұл операторлар F.Jarad және бірлескен авторлардың [19] жұмысында еңгізілген және осы операторларға қатысты теңдеулер зерттелінген.

(1) – формуламен анықталған операторды $f(x)$ функциясының жалпыланған Риман-Лиувилл мағынасындағы β - ретті интегралы, ал (2) және (3) теңдіктермен анықталған ${}_a^{\beta}D^{\alpha}$ және ${}_a^{C\beta}D^{\alpha}$ операторларын сәйкес түрде жалпыланған Риман-Лиувилл және Капуто мағынасындағы β - ретті туындысы деп атаймыз.

Егер $\alpha=1$ болса ${}_a^{\beta}J^{\alpha}$ операторы Риман-Лиувиллдің β - ретті интегралы, ал ${}_a^{\beta}D^{\alpha}$, ${}_a^{C\beta}D^{\alpha}$ операторлары Риман-Лиувилл және Капутонің β - ретті туындысымен сәйкес келеді.

${}_aT^{\alpha}$ дифференциалдық оператор ${}_aT^{\alpha}=(x-a)^{1-\alpha}\dfrac{d}{dt}$ түрінде беріледі және $0<\alpha$ болғандықтан $x=a$ нүкте бұл оператордың ерекше нүктесі болып табылады. Сол себептен ${}_a^{\beta}D^{\alpha}$, ${}_a^{C\beta}D^{\alpha}$ операторларды ерекшелігі бар бөлшек ретті дифференциалдық операторлар, ал осы операторлар қатысқан теңдеулерді ерекшелігі бар бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер деп атаймыз.

Біз алдағы зерттеуде ${}_a^{\beta}J^{\alpha}$, ${}_a^{\beta}D^{\alpha}$, ${}_a^{C\beta}D^{\alpha}$ операторлары қатысқан интегралдық және дифференциалдық теңдеулерідің шешімін құру әдістерін көрсетеміз.

Бұл әдіс нормаланған жүйелерге негізделген операторлық әдіс деп аталып, оның бастамасы [11] жұмыста баяндалған және бүтін ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімін құруда қолданылған.

[13-17] жұмыстарда бұл әдістің бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімін құруда қолданылатын кейбір модификацияларын жасалған. Бұл жұмыстарда Риман-Лиувил және Капуто туындылары қатысқан бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің айқын шешімдері құрылған. Бұл жұмыстағы зерттеулеріміз осы жұмыстардың жалғасы болып табылады және жалпыланған Риман-Лиувилл және Капуто мағынасындағы операторлар қатысқан бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін айқын түрде табамыз.

2. Тұрақты коэффициентті сызықтық интегралдық теңдеудің шешімін құру

Айталық, m натурал сан, $j=1,2,...,m$ болсын және $a,\lambda_j\in R, 0<\alpha,\beta_j$ нақты сандары берілсін. $x>a$ аймағында келесі есепті қарастырамыз

1-Есеп. $x>a$ аймағында келесі

$$y(x)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,{}_a^{\beta_j}J^{\alpha}y(x)=f(x),x>a \tag{4}$$

интегралдық теңдеудің шешімін табу қажет.

Егер E - бірлік оператор болса және $L_1=E,L_2=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,{}_a^{\beta_j}J^{\alpha}$ белгілеулерді еңгізсек, онда (4) – теңдеу

$$\left(L_1-L_2\right)y(x)=f(x),x>a \tag{5}$$

көрініске келеді.

(5) – теңдеудің шешімін құру үшін нормаланған жүйелерге негізделген операторлық әдісті қолдануға болады. Бұл операторлық әдіс келесі алгоритм бойынша 4 қадамда орындалады:

1-қадам. $L_1y(x)=f(x)$ бір текті емес теңдеудің барлық сызықты тәуелсіз шешімдерін табамыз және оларды $y_{0,s}(x)$ түрінде белгілейміз;

2-қадам. L_1 операторына оң жақтан кері болған, яғни $L_1\cdot L_1^{-1}=E$ теңдікті қанағаттандыратын L_1^{-1} операторын табамыз;

3-қадам. Келесі

$$y_{k,s}(x)=\left(L_1^{-1}\cdot L_2\right)^k y_{0,s}(x), k\geq 1$$

формуламен анықталатын $y_{k,s}(x)$ тізбегін құрамыз;

4-қадам. $y_{k,s}(x)$ тізбек арқылы жазылатын

$$y_s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}y_{k,s}(x)$$

функциялар (4) – теңдеудің шешімдері болатынын тексереміз.

Біздің жағдайда $L_1=E$ - бірлік операторы, ал оған кері болған L_1^{-1} оператор сол бірлік оператордың өзі болады. Белгілеуміз бойынша $L_2=\lambda\cdot {}_a^{\beta}J^{\alpha}$. Сонда (4) интегралдық теңдеуді (5) түрінде қайта жазуға болады. Жоғарыда келтірілген 4 қадаммен орындалатын алгоритмнің бірінші қадамында $L_1y(x)=f(x)$ бір текті емес теңдеудің шешімін табу қажет болатын. Біздің жағдайда $L_1=E$ - бірлік оператор болғандықтан бұл теңдеу үшін

$$L_1y(x)=f(x)\Leftrightarrow y(x)=f(x).$$

Сонымен $L_1y(x)=f(x)$ теңдеудің шешімі $f(x)$ функциясының өзі. Оны $y_0(x)=f(x)$ деп белгілейік. Осы функцияға негізделіп құрылған

$$y_k(x)=\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x), k\geq 1 \tag{6}$$

тізбекті және

$$\sum_{k=0}^{\infty}y_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x) \tag{7}$$

қатарды қарастырамыз. (7) - қатардың қосындысы, яғни $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x)$ функциясы (4) – теңдеудің шешімі болатынын көрсетеміз. Шынында да, осы функцияға L_1-L_2 операторын қолданатын болсақ, онда

$$\left(L_1-L_2\right)y(x)=L_1\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x)-L_2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^{k+1} y_0(x)=$$

$$= f(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k y_0(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^n y_0(x)=f(x).$$

Енді (7) функцияның айқын түрін табайық. Оның үшін (6) тізбекті үйренеміз. $k=1$ болған кезде

$$y_1(x)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha} f(x).$$

Егер $a_1, a_2, ..., a_m$ сандары берілсе жалпыланған биномиал формула бойынша

$$\left(a_1+a_2+...+a_m\right)^k=\sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_m=k\\ k_1\ge 0, k_2\ge 0,...,k_m\ge 0}} C\left(k,k_1,...,k_m\right)a_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_m^{k_m} \tag{8}$$

теңдік орынды. Мұнда $C\left(k,k_1,...,k_m\right)=\dfrac{k!}{k_1!k_2!...k_m!}$.

(8) – формуланы $\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\ {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k$ өрнекке $k\ge 1$ үшін қолданайық. Оның үшін алдымен келесі лемманы дәлелдейміз.

1 - Лемма. Егер $\alpha,\beta,\gamma>0$ және $f(x)\in L[a,b]$ болса, онда

$${}_a^{\gamma}J^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right)={}_a^{\gamma+\beta}J^{\alpha} f(x) \tag{9}$$

теңдік орынды.

Дәлелдеуі. Интегралдық оператордың анықтамасы бойынша

$${}_a^{\gamma}J^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1}{}_a^{\beta}J^{\alpha} f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)}\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\int_a^t\left(\frac{(t-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\tau)\int_{\tau}^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{(t-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}.$$

Соңғы өрнектегі ішкі интегралды I символымен белгілейік, яғни

$$I=\int_{\tau}^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{(t-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

болсын. Бұл интегралда

$$\xi=\frac{(t-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}$$

түрінде жаңа айнымалды еңгізсек, онда

$$(t-a)^{\alpha}=(\tau-a)^{\alpha}+\left((x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}\right)\xi\,,$$

$$\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\left((x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}\right)d\xi, t=\tau\to\xi=0, t=x\to\xi=1\,,$$

$$\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{(t-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{\alpha^{1-\beta-\gamma}\left((x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}-\left((x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}\right)\xi\right)^{\gamma-1}}{\left((\tau-a)^{\alpha}+\left((x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}\right)\xi-(\tau-a)^{\alpha}\right)^{1-\beta}}\left((x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}\right)d\xi=$$

$$=\frac{\alpha^{1-\beta-\gamma}\left((x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}\right)^{\gamma}\left(1-\xi\right)^{\gamma-1}}{\left((x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}\right)^{1-\beta}\xi^{1-\beta}}d\xi=\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}\left(1-\xi\right)^{\gamma-1}\xi^{\beta-1}d\xi\,.$$

Бұл еептеулерден I интегралы үшін

$$I=\int_0^1\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}\left(1-\xi\right)^{\gamma-1}\xi^{\beta-1}d\xi=$$

$$=\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}\int_0^1\left(1-\xi\right)^{\gamma-1}\xi^{\beta-1}d\xi=\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\gamma)}$$

нәтиже келіп шығады.

Олай болса

$${}_{a}^{\gamma}J^{\alpha}\left({}_{a}^{\beta}J^{\alpha}f(x)\right)=\frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta+\gamma-1}f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}\,.$$

Соңғы өрнек анықтама бойынша $f(x)$ функциясының ${}_{a}^{\beta+\gamma}J^{\alpha}f(x)$ интегралы. Осымен лемма толық дәлелденді.

Осы лемма нәтижесін, яғни (9) – теңдікті ${}_{a}^{\beta_p}J^{\alpha}$ және ${}_{a}^{\beta_q}J^{\alpha}$ операторлары үшін қолдансақ, онда

$${}_{a}^{\beta_p}J^{\alpha}\cdot{}_{a}^{\beta_q}J^{\alpha}={}_{a}^{\beta_p+\beta_q}J^{\alpha}$$

теңдік орынды. Бұдан

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k}C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\, {}_a^{k_1\beta_1}J^{\alpha}\, {}_a^{k_2\beta_2}J^{\alpha}...{}_a^{k_m\beta_m}J^{\alpha}=$$

$$=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k}C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\, {}_a^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m}J^{\alpha}\ .$$

Олай болса, (7) – формуламен анықталған қатар үшін

$$\sum_{k=0}^{\infty}y_k(x)=f(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k=\left(k\to n+1\right)=f(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^{n+1}=$$

$$=f(x)+\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)^k=$$

$$=f(x)+\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, {}_a^{\beta_j}J^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k}C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\, {}_a^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m}J^{\alpha}y_0(x)\right)=$$

$$=f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k}C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\, {}_a^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j}J^{\alpha}y_0(x)\right).$$

Соңғы өрнекте дөңгелек жақша ішіндегі қосындыны зерттейік. Интегралдық оператордың анықтамасы бойынша келесі

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k}C\left(k,k_1,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\, {}_a^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j}J^{\alpha}y_0(x)\ =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k}\frac{C\left(k,k_1,k_2,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}}{\Gamma\left(k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j\right)}\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j-1}f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

$$=\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta_j-1}P\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

теңдік орынды.
Мұнда

$$P\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k}\frac{C\left(k,k_1,k_2,...,k_m\right)\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}}{\Gamma\left(k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m+\beta_j\right)}\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m}$$

Егер [20] жұмыста еңгізілген көп аргументті Миттаг-Леффлер түріндегі

$$E_{(a_1,a_2,...,a_m),b}\left(z_1,z_2,...,z_m\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=k}C\left(k,k_1,k_2,...,k_m\right)\frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}...z_m^{k_m}}{\Gamma\left(b+a_1k_1+a_2k_2+...+a_mk_m\right)}$$

функцияны қолдансақ, онда

$$P(x)=E_{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m),\beta_j}\left(x^{\beta_1},x^{\beta_2},...,x^{\beta_m}\right).$$

Сонымен біз келесі нәтижені алдық.

1- Теорема. Егер $f(x)\in C[a,b]$ болса, онда (4) – теңдеудің шешімі бар, жалғыз және

$$y(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\int_a^x\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta_j-1}P\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

түрінде өрнектеледі. Бұл жерде

$$P\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)=$$

$$=E_{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m),\beta_j}\left(\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta_1},\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta_2},...,\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta_m}\right).$$

1-Салдары. Егер 1-Есепте $\alpha=1$ болса, онда бұл есептің шешімі

$$y(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\int_a^x\left(x-t\right)^{\beta_j-1}E_{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m),\beta_j}\left(\left(x-t\right)^{\beta_1},\left(x-t\right)^{\beta_2},...,\left(x-t\right)^{\beta_m}\right)f(t)dt$$

түрінде өрнектеледі.

Бұл нәтиже [21] жұмыста дәлелденген.

3. Жалпыланған Риман- Лиувилл туындысы қатысқан сызықтық бөлшек ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін құру

Бұл бөлімде біз жалпыланған Риман- Лиувилл туындысы қатысқан бөлшек ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін құру мәселесін қарастырамыз.

Айталық $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ нақты сандар және $0<\alpha, n-1<\beta\le n, n=1,2,...$ берілсін. $x>a$ аймағында келесі

$$ {}_a^{\beta}D^\alpha y(x)-a_{n-1}\cdot {}_a^{\beta-1}D^\alpha y(x)-...-a_1\cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^\alpha y(x)-a_0y(x)=0 \qquad (10)$$

теңдеуді қарастырайық.

Бұл теңдеудің шешімін құру үшін s параметрдің $s=\beta-j, 1\le j\le n$ мәндеріне сәйкес келетін келесі

$$f_{k,s}(x)=\frac{x^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)},k\geq 0 \tag{11}$$

функцияларлардың жүйесін қарастырамыз.

Бұл жүйенің қасиеттерін зерттеу үшін алдымен келесі тұжырымды дәлелдейміз.

2-Лемма. Егер $f(x)=(x-a)^{\alpha\mu},\mu>n-1$ болса, онда

$$\left({}_a^\beta D^\alpha (t-a)^{\alpha\mu}\right)(x)=\alpha^\beta\frac{\Gamma\left(\mu+1\right)}{\Gamma\left(\mu+1-\beta\right)}(x-a)^{\alpha(\mu-\beta)},\mu>n-1, \tag{12}$$

Дәлеледуі. Егер $\beta=n$ - бүтін сан болса, онда ${}_a^\beta D^\alpha f(x)={}_a^n T^\alpha$. Сол себептен $s>n-1$ үшін

$${}_a^n T^\alpha (x-a)^{\alpha\mu}={}_a^{n-1}T^\alpha\left((x-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dx}(t-a)^{\alpha\mu}\right)=\alpha\mu\cdot{}_a^{n-1}T^\alpha\left((x-a)^{\alpha\mu-\alpha}\right)=$$

$$=...=\alpha\mu\cdot\alpha(\mu-1)\cdot...\cdot\alpha(\mu-n+1)(x-a)^{\alpha(\mu-n)}=\alpha^n\mu\cdot(\mu-1)\cdot...\cdot(\mu-n+1)(x-a)^{\alpha(\mu-n)}=$$

$$=\alpha^n\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-n)}(x-a)^{\alpha(\mu-n)}.$$

Айталық, $n-1<\beta<n,n=1,2,...$болсын. Онда ${}_a^\beta D^\alpha$ операторының анықтамасы бойынша

$${}_a^\beta D^\alpha f(x)={}_a^n T^\alpha\left({}_a^{n-\beta}J^\alpha (t-a)^{\alpha\mu}\right)(x)={}_a^n T^\alpha\left(\frac{1}{\alpha^{n-\beta}}\frac{\Gamma\left(\mu+1\right)}{\Gamma\left(\mu+1+n-\beta\right)}(x-a)^{\alpha(\mu+n-\beta)}\right)=$$

$$={}_a^n T^\alpha\left(\frac{1}{\alpha^{n-\beta}}\frac{\Gamma\left(\mu+1\right)}{\Gamma\left(\mu+1+n-\beta\right)}(x-a)^{\alpha(\mu+n-\beta)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha^{n-\beta}}\frac{\Gamma\left(\mu+1\right)\alpha^n(\mu+n-\beta)...(\mu+1-\beta)}{\Gamma\left(\mu+1+n-\beta\right)}(x-a)^{\alpha(\mu-\beta)}=\alpha^\beta\frac{\Gamma\left(\mu+1\right)}{\Gamma\left(\mu+1-\beta\right)}(x-a)^{\alpha(\mu-\beta)}.$$

(12) – теңдік дәлелденді.

3-Лемма. Егер $0<\alpha,n-1<\beta\leq n,n=1,2,...$ және s параметр $s=\beta-j,1\leq j\leq n$ мәндерді қабылдаса, онда (11) формуламен анықталған $f_{k,s}(x)$ функциялар жүйесі үшін $x>a$ облысында

$${}_a^\beta D^\alpha f_{0,s}(x)=0,\ {}_a^\beta D^\alpha f_{k,s}(x)=f_{k-1,s}(x),$$

теңдіктер орындалады.

Дәлелдеуі. Егер $s\in\left\{\beta-1,\beta-2,...,\beta-n\right\}$ болса ${}_a^\beta D^\alpha f_{0,s}(x)=0$ теңдігі болатынын көрсету қиын емес. Енді ${}_{a}^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x) = f_{k-1,s}(x)$ теңдікті дәлелдейік. ${}_{a}^{\beta}D^{\alpha}$ операторының анықтамасы бойынша

$$ {}_{a}^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x) = {}_{a}^{n}T^{\alpha}\left[{}_{a}^{n-\beta}J^{\alpha} f_{k,s}(x)\right] = {}_{a}^{n}T^{\alpha}\left[{}_{a}^{n-\beta}J^{\alpha} \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right]. $$

Тік жақша ішіндегі өрнекті зерттейік:

$$ {}_{a}^{n-\beta}J^{\alpha} \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)} = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_{a}^{x}\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-\beta-1} \frac{(t-a)^{\alpha(\beta k+s)}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta-1)+\alpha\beta k+\alpha s+\alpha}}{\alpha^{n-\beta}\Gamma(n-\beta)}\int_{a}^{x}\left(1-\xi\right)^{n-\beta-1}\ \xi^{\beta k+s}d\xi = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{n-\beta}\Gamma(n-\beta)}\frac{\Gamma(n-\beta)\Gamma(\beta k+s+1)}{\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)} = \frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{n}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)}. $$

Бұдан

$$ {}_{a}^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x) = {}_{a}^{n}T^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)}\right] = $$

$$ = {}_{a}^{n-1}T^{\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)}\right] = $$

$$ = {}_{a}^{n-1}T^{\alpha}\left[\frac{\left(\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s\right)(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s-\alpha}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)}\right] = \ldots = $$

$$ = \frac{\left(\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s\right)\ldots\left(\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s-(n-1)\alpha\right)(x-a)^{\alpha(n-\beta)+\alpha\beta k+\alpha s-n\alpha}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)} = $$

$$ = \frac{\alpha^{n}\left(\beta k+s+n-\beta\right)\ldots\left(\beta k+s+1-\beta\right)(x-a)^{\alpha\beta(k-1)+\alpha s}}{\alpha^{n-\beta+k\beta}\Gamma(\beta k+s+1+n-\beta)} = $$

$$ = \frac{(x-a)^{\alpha\beta(k-1)+\alpha s}}{\alpha^{(k-1)\beta}\Gamma\left(\beta(k-1)+s+1-\beta\right)} = f_{k-1,s}(x). $$

Лемма дәлелденді.

4 - Лемма. Егер $0<\alpha, n-1<\beta\le n, n=1,2,\ldots$ және s параметр $s=\beta-j, 1\le j\le n$ мәндерді қабылдаса, онда (11) формуламен анықталған $f_{k,s}(x)$ функциялар жүйесі үшін $x>a$ облысында

$$ {}_a^{\beta}D^{\alpha}\ {}_a^{\beta-m}D^{\alpha} f_{k,s}(x) = {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\ {}_a^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x), m=1,2,...,n-1 \qquad (13) $$

теңдіктер орындалады.

Дәлелдеуі. $\beta_m = \beta - m, m=1,2,...,n$ деп белгілейікте (13)-теңдіктің сол жағын есептейік. Егер ${}_a^{\beta-m}D^{\alpha} f_{k,s}(x) \neq 0$ болса, онда сол жақтағы өрнек үшін

$$ {}_a^{\beta}D^{\alpha}\ {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\left[\frac{x^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right] = {}_a^{\beta}D^{\alpha}\left[\alpha^{\beta-m}\frac{\Gamma(\beta k+s+1)}{\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m)}\frac{x^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha(\beta-m)}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right] = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta+m-\beta}\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m)}\ {}_a^{\beta}D^{\alpha}\left[(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha(\beta-m)}\right] = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta+m-\beta}\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m)}\alpha^{\beta}\frac{\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m)}{\Gamma(\beta k+s+1-\beta+m-\beta)}(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha(\beta-m)-\alpha\beta} = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta+m-2\beta}}\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha(\beta-m)-\alpha\beta}}{\Gamma\left(\beta k+s+1-(\beta-m)-\beta\right)}. $$

Осы сияқты ${}_a^{\beta}D^{\alpha} f_{k,s}(x) \neq 0$ болса, онда оң жақтағы өрнек үшін

$$ {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\ {}_a^{\beta}D^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right] = {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\left[\alpha^{\beta}\frac{\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}{\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta\right)}\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha\beta}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right] = $$

$$ = \alpha^{\beta}\frac{\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}{\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta\right)}\frac{1}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\ {}_a^{\beta-m}D^{\alpha}\left[(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha\beta}\right] = $$

$$ = \frac{1}{\alpha^{k\beta-\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta\right)}\alpha^{\beta-m}\frac{\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta\right)}{\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta-\beta+m\right)}(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha\beta-\beta+m} = $$

$$ = \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s-\alpha\beta-\beta+m}}{\alpha^{k\beta+m-2\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1-\beta-\beta+m\right)}. $$

Демек, осы жағдайда (13) теңдік орынды. Қалған жағдайлар осы сияқты тексеріледі. Лемма дәлелденді.

Енді келесі

$$ y_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + ... + a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0\right)^k \frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)} \qquad (14) $$

түрде берілген n функцияларды қарастырайық. Мұндағы $s = \beta - j, 1 \le j \le n$.

Алдымен (14) формуламен анықталған $y_s(x)$ функциялары (10) – теңдеудің шешімі болатынын көрсетейік. Егер бұл функцияға операторын қолдансақ, онда (14) теңдіктер және

4-Лемманың нәтижесі бойынша

$$ {}_a^\beta D^\alpha y_s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^\alpha+\ldots+a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^\alpha-a_0\right)^k\ {}_a^\beta D^\alpha\left[\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}\right]= $$

$$ =\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^\alpha+\ldots+a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^\alpha-a_0\right)^k\frac{(x-a)^{\alpha\beta(k-1)+\alpha s}}{\alpha^{(k-1)\beta}\Gamma\left(\beta(k-1)+s+1\right)}= $$

$$ =\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^\alpha+\ldots+a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^\alpha-a_0\right)^k\frac{(x-a)^{\alpha\beta(k-1)+\alpha s}}{\alpha^{(k-1)\beta}\Gamma\left(\beta(k-1)+s+1\right)}= $$

$$ =\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^\alpha+\ldots+a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^\alpha-a_0\right)^{k+1}\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}= $$

$$ =\left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^\alpha+\ldots+a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^\alpha-a_0\right)y_s(x)\,. $$

Сонымен

$$ {}_a^\beta D^\alpha y_s(x)=\left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^\alpha+\ldots+a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^\alpha-a_0\right)y_s(x)\,. $$

Ал бұл теңдік (10) теңдеумен пара-пар.

Енді $\left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^\alpha+\ldots+a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^\alpha-a_0\right)^k$ түрдегі операторларды жалпыланған биномиал формуладан пайдаланып ықшамдаймыз. Егер $\beta-j=\beta_j, 1\le j\le n$ деп белгілесек, онда жалпыланған биномиал формула бойынша

$$ \left(a_{n-1}\cdot\ {}_a^{\beta-1}D^\alpha+\ldots+a_1\cdot\ {}_a^{\beta-(n-1)}D^\alpha-a_0\right)^k\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}= $$

$$ =\sum_{k_0+\ldots+k_{n-1}=k}\frac{k!}{k_0!\cdot\ldots\cdot k_{n-1}!}a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}^{k_{n-1}}\ {}_a^{k_1\beta_1}D^\alpha\cdot\ldots\cdot{}_a^{k_{n-1}\beta_{n-1}}D^\alpha\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}= $$

$$ =\sum_{k_0+\ldots+k_{n-1}=k}\frac{k!}{k_0!\cdot\ldots\cdot k_{n-1}!}a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}^{k_{n-1}}\ {}_a^{k_1\beta_1+\ldots+k_{n-1}\beta_{n-1}}D^\alpha\frac{(x-a)^{\alpha\beta k+\alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k+s+1\right)}= $$

$$ =\sum_{k_0+\ldots+k_{n-1}=k}\frac{k!}{k_0!\cdot\ldots\cdot k_{n-1}!}a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}^{k_{n-1}}\frac{(x-a)^{\alpha\beta k-\alpha k_1\beta_1-\ldots-\alpha k_{n-1}\beta_{n-1}+\alpha s}}{\alpha^{k\beta-(k_1\beta_1+\ldots+k_{n-1}\beta_{n-1})}\Gamma\left(\beta k+s+1-k_1\beta_1-\ldots-k_{n-1}\beta_{n-1}\right)} $$

Бұл нәтижені (14) формулаға қойсақ

$$ y_s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_0+\ldots+k_{n-1}=k}\frac{k!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_1!}a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}^{k_{n-1}}\frac{(x-a)^{\alpha\beta k-\alpha k_1\beta_1-\ldots-\alpha k_{n-1}\beta_{n-1}+\alpha s}}{\alpha^{k\beta-(k_1\beta_1+\ldots+k_{n-1}\beta_{n-1})}\Gamma\left(\beta k+s+1-k_1\beta_1-\ldots-k_{n-1}\beta_{n-1}\right)}\,. $$

Белгілеуіміз бойынша $\beta_j = \beta - j$, $\alpha\beta k = \alpha\left(\beta k_0 + \beta k_1 + ... + \beta k_{n-1}\right)$
және

$$\alpha\beta k - \alpha k_1\beta_1 - ... - \alpha k_{n-1}\beta_{n-1} = \alpha\left(\beta k_0 + (\beta - \beta_1)k_1 + ... + (\beta - \beta_{n-1})k_{n-1}\right) =$$

$$= \alpha\left(\beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}\right).$$

Осы теңдіктерді ескерсек, онда

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_0+...+k_{n-1}=k} \frac{k!}{k_1! \cdot ... \cdot k_1!} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_{n-1}^{k_{n-1}} \frac{x^{\alpha\beta k_0 + \alpha k_1 + ... + \alpha(n-1)k_{n-1} + \alpha s}}{\alpha^{k\beta - (k_1\beta_1 + ... + k_{n-1}\beta_{n-1})}\Gamma\left(s + 1 + \beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_0+...+k_{n-1}=k} \frac{k!}{k_1! \cdot ... \cdot k_1!} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_{n-1}^{k_{n-1}} \frac{(x-a)^{\alpha(\beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}) + \alpha s}}{\alpha^{\beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}}\Gamma\left(s + 1 + \beta k_0 + k_1 + ... + (n-1)k_{n-1}\right)}.$$

Егер

$$E_{(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m), b}(z_1, z_2, ..., z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+...+k_m=k} \frac{k!}{k_1! \cdot ... \cdot k_m!} \frac{z_1^{k_1} \cdot ... \cdot z_m^{k_m}}{\Gamma(b + \mu_1 k_1 + ... + \mu_m k_m)}$$

түріндегі көп индексті Миттаг-Леффлер функциясын ескерсек, онда $y_s(x)$ функциясын осы функция арқылы келесі

$$y_s(x) = (x-a)^{\alpha s} E_{(\beta, 1, ..., n-1), s+1}\left(a_0 \frac{(x-a)^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}}, a_1 \frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha}, ..., a_{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha(n-1)}}{\alpha^{n-1}}\right).$$

түрде өрнектелетінін көрсетуге болады

Сонымен келесі теорема дәлеледенді.

2-Теорема. Айталық $0 < \alpha, n-1 < \beta \le n, n = 1, 2, ..., s = \beta - j, 1 \le j \le n$ болсын. Онда

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1}D^{\alpha} + ... + a_1 \cdot {}_a^{\beta-(n-1)}D^{\alpha} - a_0\right)^k \frac{(x-a)^{\alpha\beta k + \alpha s}}{\alpha^{k\beta}\Gamma\left(\beta k + s + 1\right)}$$

түріндегі функциялар (10) – теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдері болады.

Бұл функциялар көп индексті Миттаг-Леффлер функциясы арқылы

$$y_s(x) = (x-a)^{\alpha s} E_{(\beta, 1, ..., n-1), s+1}\left(a_0 \frac{(x-a)^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}}, a_1 \frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha}, ..., a_{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha(n-1)}}{\alpha^{n-1}}\right)$$

түрде өрнектеледі.

Ескерту. Егер (10) – теңдеуде $\alpha = 1, a = 0$ болса бұл теңдеудің шешімі

$$y_s(x) = x^s E_{(\beta, 1, ..., n-1), s+1}\left(a_0 x^{\beta}, a_1 x, ..., a_{n-1} x^{n-1}\right)$$

көрініске келеді. Бұл нәтиже [13] жұмыста алынған.

4. Жалпыланған Риман- Лиувилл туындысы қатысқан сызықтық бөлшек ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін құру

Бұл бөлімде біз жалпыланған Капуто операторы қатысқан, бір текті емес теңдеудің шешімін құру мәселесін қарастырамыз.

Айталық $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ нақты сандар және $0<\alpha, n-1<\beta\le n, n=1,2,...$ берілсін. $x>a$ аймағында келесі

$$ {}_a^{C\beta}D^{\alpha} y(x) - a_{n-1}\cdot {}_a^{C\beta-1}D^{\alpha} y(x) - ... - a_1\cdot {}_a^{C\beta-(n-1)}D^{\alpha} y(x) - a_0 y(x) = f(x) \quad (15)$$

теңдеуді қарастырайық.

(15)-теңдеудің шешімін құруды біз тек қана бір текті емес жағдай үшін қарастырамыз, себебі бір текті теңдеудің шешімін 3 – бөлімде көрсетілген әдіс бойынша құруға болады.

Риман-Лиувилл операторы қатысқан теңдеудегі сияқты келесі теорема орынды.

3-Теорема. Айталық $0<\alpha, n-1<\beta\le n, n=1,2,..., s=j, 0\le j\le n-1$ және $f(x)=0$ болсын. Онда

$$ y_s(x) = (x-a)^{\alpha s} E_{(\beta,1,...,n-1),s+1}\left(a_0 \frac{(x-a)^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}}, a_1 \frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha}, ..., a_{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha(n-1)}}{\alpha^{n-1}} \right)$$

түріндегі функциялар (15) – теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдері болады.

Енді (15) – теңдеуді бір текті емес жағдайда қарастырамыз.

Алдымен бөлшек ретті интеграл және туындыға қатысты келесі лемманы дәлелдейміз.

5 - Лемма. Айтайлық, $n-1<\beta\le n, n=1,2,...$ және $f(x)\in C[a,b]$ болсын. Онда кез-келген $0<\gamma\le\beta$ үшін

$$ {}_a^{C\gamma}D^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{\beta-\gamma}J^{\alpha} f(x) \quad (16)$$

теңдік орынды.

Дәлелдеуі. Алдымен $\gamma=k$ бүтін сан болған жағдайды қарастырайық. Егер осы жағдайда $k=1$ болса, онда берілген операторлардың анықтамасы бойынша

$$ {}_a^{C1}D^{\alpha}\left({}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x)\right) = {}_a^{1}T^{\alpha}\ {}_a^{\beta}J^{\alpha} f(x) = \left((x-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}\right) =$$

$$ = (x-a)^{1-\alpha}\left(\frac{\beta(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-2} f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}\right) =$$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\beta-1)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-2} f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}} = {}_a^{\beta-1}J^{\alpha} f(x).$$

Жалпы жағдайда кез келген k натурал саны үшін операторлардың анықтамасы бойынша

$$ {}^{Ck}_{a}D^{\alpha}\left({}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x)\right)={}^{k}_{a}T^{\alpha}\;{}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x)=\left((x-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dx}\right)^{k}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{a}^{x}\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}\right)= $$

$$ =\frac{1}{\Gamma(\beta-k)}\int_{a}^{x}\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-k-1}f(\tau)\frac{d\tau}{(\tau-a)^{1-\alpha}}={}^{\beta-k}_{a}J^{\alpha}f(x). $$

Осылайша біз ${}^{k}_{a}T^{\alpha}\;{}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x)={}^{\beta-k}_{a}J^{\alpha}f(x)$ теңдігін дәлелдедік. $\gamma=k=\beta$ дербес жағдайда ${}^{k}_{a}T^{\alpha}\;{}^{k}_{a}J^{\alpha}f(x)={}^{0}_{a}J^{\alpha}f(x)=f(x)$ теңдік орынды. Егер $k-1<\gamma\le k<\beta$ болса, онда дифференциалдық және интегралдық операторлардың анықтамалары, сондай-ақ (9) теңдікті ескере отырып, келесі нәтижеге ие боламыз

$$ {}^{C\gamma}_{a}D^{\alpha}\left({}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x)\right)={}^{k}_{a}T^{\alpha}\;{}^{k-\gamma}_{a}J^{\alpha}\left({}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x)\right)={}^{k}_{a}T^{\alpha}\;{}^{\beta+k-\gamma}_{a}J^{\alpha}f(x)={}^{\beta-\gamma}_{a}J^{\alpha}f(x). $$

Осы сияқты

$$ {}^{C\beta}_{a}D^{\alpha}\left({}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x)\right)={}^{n}_{a}T^{\alpha}\;{}^{n-\beta}_{a}J^{\alpha}\left({}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x)\right)={}^{n}_{a}T^{\alpha}\;{}^{n}_{a}J^{\alpha}f(x)=f(x). $$

Лемма дәлелденді.

2 – Салдары. *Айтайлық,* $n-1<\beta\le n, n=1,2,...,0<\gamma<\beta,$ *және* $f(x)\in C[a,b]$ *болсын. Онда*

$$ {}^{\beta}_{a}J^{\alpha}\left({}^{C\gamma}_{a}D^{\alpha}\left({}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x)\right)\right)={}^{C\gamma}_{a}D^{\alpha}\left({}^{2\beta}_{a}J^{\alpha}f(x)\right)={}^{2\beta-\gamma}_{a}J^{\alpha}f(x) \tag{17} $$

теңдіктері орынды.

Егер $L_1={}^{C\beta}_{a}D^{\alpha}, L_2=a_{n-1}\cdot{}^{C\beta-1}_{a}D^{\alpha}y(x)+...+a_1\cdot{}^{C\beta-(n-1)}_{a}D^{\alpha}y(x)+a_0$ деп белгілесек, онда (15)- теңдеуді $\left(L_1-L_2\right)y(x)=f(x)$ түрінде жазуға болады. Ары қарай осы операторларға қатысты f нормаланған жүйе құрамыз.

6 - Лемма. Егер $L_1={}^{C\beta}_{a}D^{\alpha},\; L_2=a_{n-1}\cdot{}^{C\beta-1}_{a}D^{\alpha}+a_{n-2}\cdot{}^{C\beta-2}_{a}D^{\alpha}+...+a_1\cdot{}^{C\beta-(n-1)}_{a}D^{\alpha}+a_0$ және $f_0(x)={}^{\beta}_{a}J^{\alpha}f(x), f(x)\in C[a,b]$ болса, онда

$$ f_k(x)=\left({}^{\beta}_{a}J^{\alpha}\cdot L_2\right)^{k}f_0(x), k\ge 1 $$

функциялар жүйесі $\left(L_1,L_2\right)$ операторларға қатысты f нормаланған жүйе болады, яғни

$$ L_1f_0(x)=f(x), L_1f_k(x)=L_2f_{k-1}(x), k\ge 1 \tag{18} $$

теңдіктер орынды.

Дәлелдеуі. $L_1 f_0(x) = f(x)$ теңдігі (16) – формуладан келіп шығады. Айталық, $k \ge 1$ және $g(x) = L_2 \left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)^{k-1} f_0(x)$ болсын. Онда

$$L_1 f_k(x) = L_1 \left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)^k f_0(x) = L_1 \left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)\left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)^{k-1} f_0(x) = L_1 \, {}_a^\beta J^\alpha g(x) = g(x) =$$

$$= L_2 \left({}_a^\beta J^\alpha \cdot L_2 \right)^{k-1} f_0(x) = L_2 f_{k-1}(x).$$

Лемма дәлелденді.

3 – Салдары. Егер $f_0(x) = {}_a^\beta J^\alpha f(x),\ f(x) \in C[a,b]$ болса, онда

$$y_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \left({}_a^\beta J^\alpha \cdot \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1} D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)} D^\alpha + a_0 \right) \right)^k f_0(x) \quad (19)$$

қатар қосындысы (15)-теңдеудің дербес шешімі болады.

Дәлелдеуі. $f_k(x)$ жүйе үшін (18) теңдіктер орынды. Олай болса

$$\left(L_1 - L_2 \right) y_f(x) = L_1 f_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} L_1 f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) =$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} L_2 f_{k-1}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} L_2 f_k(x) = f(x).$$

Салдары дәлелденді.

Енді $f_k(x)$ жүйенің айқын түрін құрамыз. Егер $k = 1$ болса, онда (16) және (17) теңдіктерден

$$f_1(x) = \left({}_a^\beta J^\alpha \cdot \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1} D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)} D^\alpha + a_0 \right) \right) f_0(x) =$$

$$= \left(\left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1} D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)} D^\alpha + a_0 \right) \right) {}_a^{2\beta} J^\alpha f(x) =$$

$$\left(a_{n-1} \cdot {}_a^{\beta-1} J^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{\beta+n-1} J^\alpha + a_0 \cdot {}_a^{2\beta} J^\alpha \right) f(x).$$

Жалпы жағдайда

$$f_k(x) = \left({}_a^\beta J^\alpha \cdot \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1} D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)} D^\alpha + a_0 \right) \right)^k f_0(x) =$$

$$= \left(a_{n-1} \cdot {}_a^{C\beta-1} D^\alpha + \ldots + a_1 \cdot {}_a^{C\beta-(n-1)} D^\alpha + a_0 \right)^k {}_a^{(k+1)\beta} J^\alpha f(x) =$$

$$= \left(\sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_{n-1} = k} C(k; k_0, \ldots, k_{n-1}) a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_{n-1}^{k_{n-1}} \, {}_a^{C\, k_1(\beta-n+1)+\ldots+k_{n-1}(\beta-1)} D^\alpha \right) {}_a^{(k+1)\beta} J^\alpha f(x) =$$

$$= \sum_{k_0+k_1+...+k_{n-1}=k} C(k;k_0,...,k_{n-1}) a_0^{k_0} a_1^{k_1} ... a_{n-1}^{k_{n-1}}\, {}_a^{(k+1)\beta-k_1(\beta-n+1)-...-k_{n-1}(\beta-1)}J^{\alpha} f(x) =$$

$$= \sum_{k_0+k_1+...+k_{n-1}=k} C(k;k_0,...,k_{n-1}) a_0^{k_0} a_1^{k_1} ... a_{n-1}^{k_{n-1}}\, {}_a^{\beta+\beta k_0+(n-1)k_1+...+k_{n-1}}J^{\alpha} f(x) .$$

Бұл есептеулер нәтижесінде (19) формуламен анықталған $y_f(x)$ функциясы үшін келесі өрнекті аламыз

$$y_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_0+k_1+...+k_{n-1}=k} C(k;k_0,...,k_{n-1}) a_0^{k_0} a_1^{k_1} ... a_{n-1}^{k_{n-1}}\, {}_a^{\beta+\beta k_0+(n+1)k_1+...+k_{n-1}}J^{\alpha} f(x) =$$

$$= \int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} P\left((x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha} \right) f(t) \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} .$$

Мұндағы

$$P\left((x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha} \right) =$$

$$E_{(\beta,n-1,...,1),\beta}\left(a_0 \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta}, a_1 \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{n-1}, ..., a_{n-1} \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha} \right) \right).$$

Сонымен келесі теореманы дәлелдедік.

4-Теорема. Айталық, $0<\alpha, n-1<\beta \le n, n=1,2,..., s=j, 0 \le j \le n-1$ және $f(x) \in C[a,b]$ болсын. Онда (15) – теңдеудің жалпы шешімі

$$y_s(x) = \sum_{s=0}^{n-1} C_s (x-a)^{\alpha s} E_{(\beta,1,...,n-1),s+1}\left(a_0 \frac{(x-a)^{\alpha\beta}}{\alpha^{\beta}}, a_1 \frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha}, ..., a_{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha(n-1)}}{\alpha^{n-1}} \right) +$$

$$= \int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (\tau-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} P\left((x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha} \right) f(t) \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}}$$

түрде өрнектеледі. Мұндағы C_s кез-келген тұрақтылар.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетінің № AP09259137 грантымен қолдау тапты.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 2: Fractional Differential Equations. Edited by J. A. Tenreiro Machado. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. –527 p.
2. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 4: Applications in Physics, Part A. Edited by V. E. Tarasov. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 314 p.

3. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A. Edited by D. Baeanu, A. M. Lopes. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 259 p.
4. Pskhu A.V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order// Sb. Math., – 2011. – – Vol.202, No. 4. – P.571–582.
5. Kilbas A. A. Новые направления в теории дробных интегральных и дифференциальных уравнений// Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147. – С.72–106.
6. Мажгихова М.Г.Обобщенная задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом с производной Джрбашяна – Нерсесяна//Доклады АМАН. – 2022. – Vol. 22, No.4. – P.11 – 17.
7. Al-Refai M., Luchko Y. The General Fractional Integrals and Derivatives on a Finite Interval. Mathematics. – 2023. – Vol.11, No.1031. – P.1 – 13.
8. Tarasov V.E. Scale-Invariant General Fractional Calculus: Mellin Convolution Operators// Fractal and Fractional. – 2023. – Vol.7, No.481. – P.1 – 25.
9. Saleh M. H., Mohamed D.Sh., Ahmed M.H., Marjan M.K. System of Linear Fractional Integro-Differential Equations by using Adomian Decomposition Method//International Journal of Computer Applications. – 2015. – Vol.121, No.24. – P.1 – 11.
10. Бондаренко Б. А. Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях. - Ташкент : Фан, 1984. - 183 с.
11. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications// Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – Vol.287, No.2. – P. 577–592.
12. Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2012. – Vol.52. – P. 219–234.
13. Ashurov P., Cabada A., Turmetov B. Operator method for construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2016. – Vol.19, No.1. – P. 229–252.
14. Shinaliyev K., Turmetov B., Umarov S.A fractional operator algorithm method for construction of solutions of fractional order differential equations//Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2012. – Vol.15, No.2. – P. 267–281.
15. Turmetov B. Kh. On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order //Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2018. – No. 25. – P.1–14.
16. Turmetov B.K., Usmanov K.I., Nazarova K.Z. On the Operator Method for Solving Linear Integro-Differential Equations with Fractional Conformable Derivatives// Fractal Fractional. – 2021. – Vol.5, No.109. – P.1 – 21.
17. Turmetov B. On Certain Operator Method for Solving Differential Equations// Filomat. – 2017. – Vol.31. – P.4275–4286.
18. Katugampola U.N. A new approach to generalized fractional derivatives//Bull. Math. Anal. Appl. – 2014. – Vol.6. -- P. 1-15.
19. Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D. On a new class of fractional operators // Advances in Difference Equations. – 2017. – Vol.2017, No.247. – P.1 –16.
20. Hadid S.B., Luchko Y. An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order// Panamerican Mathematical Journal. – 1996. – Vol.6. – P. 57-73.
21. Gorenflo R., Luchko Y. Operationl method for solving generalized Abel integral equation of second kind // Integral Transforms and Special Functions. – 1997. – Vol.5, No.1-2. – P.47 – 58.

REFERENCES

1. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 2: Fractional Differential Equations. Edited by J. A. Tenreiro Machado. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. –527 p.
2. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 4: Applications in Physics, Part A. Edited by V. E. Tarasov. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 314 p.
3. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A. Edited by D. Baeanu, A. M. Lopes. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. – 259 p.
4. Pskhu A.V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order// Sb. Math., – 2011. – – Vol.202, No. 4. – P.571–582.
5. Kilbas A. A. Новые направления в теории дробных интегральных и дифференциальных уравнений// Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147. – С.72–106.
6. Мажгихова М.Г.Обобщенная задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом с производной Джрбашяна – Нерсесяна//Доклады АМАН. – 2022. – Vol. 22, No.4. – P.11 – 17.
7. Al-Refai M., Luchko Y. The General Fractional Integrals and Derivatives on a Finite Interval. Mathematics. – 2023. – Vol.11, No.1031. – P.1 – 13.
8. Tarasov V.E. Scale-Invariant General Fractional Calculus: Mellin Convolution Operators// Fractal and Fractional. – 2023. – Vol.7, No.481. – P.1 – 25.
9. Saleh M. H., Mohamed D.Sh., Ahmed M.H., Marjan M.K. System of Linear Fractional Integro-Differential Equations by using Adomian Decomposition Method//International Journal of Computer Applications. – 2015. – Vol.121, No.24. – P.1 – 11.
10. Бондаренко Б. А. Операторные алгоритмы в дифференциальных уравнениях. - Ташкент : Фан, 1984. - 183 с.
11. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications// Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2003. – Vol.287, No.2. – P. 577–592.
12. Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2012. – Vol.52. – P. 219–234.
13. Ashurov P., Cabada A., Turmetov B. Operator method for construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2016. – Vol.19, No.1. – P. 229–252.
14. Shinaliyev K., Turmetov B., Umarov S.A fractional operator algorithm method for construction of solutions of fractional order differential equations//Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2012. – Vol.15, No.2. – P. 267–281.
15. Turmetov B. Kh. On a method for constructing a solution of integro-differential equations of fractional order //Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2018. – No. 25. – P.1–14.
16. Turmetov B.K., Usmanov K.I., Nazarova K.Z. On the Operator Method for Solving Linear Integro-Differential Equations with Fractional Conformable Derivatives// Fractal Fractional. – 2021. – Vol.5, No.109. – P.1 – 21.
17. Turmetov B. On Certain Operator Method for Solving Differential Equations// Filomat. – 2017. – Vol.31. – P.4275–4286.

18. Katugampola U.N. A new approach to generalized fractional derivatives//Bull. Math. Anal. Appl. – 2014. – Vol.6. -- P. 1-15.
19. Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D. On a new class of fractional operators // Advances in Difference Equations. – 2017. – Vol.2017, No.247. – P.1 –16.
20. Hadid S.B., Luchko Y. An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order// Panamerican Mathematical Journal. – 1996. – Vol.6. – P. 57-73.
21. Gorenflo R., Luchko Y. Operationl method for solving generalized Abel integral equation of second kind // Integral Transforms and Special Functions. – 1997. – Vol.5, No.1-2. – P.47 – 58.