ӘОЖ 517.968.7
МҒТАР: 27.31.21; 27.31.55
https://doi.org/10.47526/2023-2/2524-0080.03

М.Б. БӨРІХАНОВ[1], С.А. МАМБЕТОВ[2]
[1]PhD, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің аға оқытушысы (Қазақстан, Түркістан қ.), e-mail: meiirkhan.borikhanov@ayu.edu.kz
[2]Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университетінің PhD докторанты (Қазақстан, Алматы қ.), e-mail: samatmambetov09@gmail.com

БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ШАРТТАРЫМЕН БЕРІЛГЕН БӨЛШЕК РЕТТІ СЫЗЫҚТЫ ЖӘНЕ БЕЙСЫЗЫҚТЫ ДИФФУЗИЯ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Андатпа. Бөлшек ретті есептеу дегеніміз – әдеттегі дифференциалдау мен интегралдау операторларын ерікті бүтін емес дәрежеге (ретке) дейін жалпылау. Бұл түсінік классикалық дифференциалдық және интегралдық есептеу әдістері сияқты есептеледі, сонымен қатар Лейбниц пен Ньютон дифференциалдық есептеуді ойлап тапқан кезден бастау алады. Бөлшек ретті есептеу идеясы жалғыз математика саласындағы ғалымдар арасында ғана емес, физиктер мен инженерлер арасында да қызығушылық тудырады.

Максимум принциптері дифференциалдық теңдеулердің шешімдері жайындағы ақпараттарды, олардың айқын формалары туралы мәліметтерге ие болмай-ақ, қол жеткізуге мүмкіндік беретін белгілі әдістерінің бірі болып табылады. Жақын уақытқа дейін максимум принциптері тек қарапайым және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін тұжырымдалған және дәлелденген. Бертін келе бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер есептері қарқынды түрде дамуына байланысты операторлардың максимум қағидасы айтарлықтай айрықша зерттелуде.

Бұл мақалада бөлшек ретті Риман-Лиувилль туындысының максимум қағидасы көмегімен бір өлшемді субдиффузия теңдеуі зерттеледі. Сызықты және бейсызықты уақыт бойынша бөлшек ретті диффузия теңдеулері үшін бастапқы-шеттік есептің жалғыз классикалық шешімі бар екенін және шешім бастапқы және шекаралық шарттарға үздіксіз тәуелді екені дәлелденеді.

Кілт сөздер: субдиффузия теңдеуі, максимум қағидасы, бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу, бейсызықты есеп, Риман-Лиувилль бөлшек ретті туынды.

M.B. Borikhanov[1], S.A. Mambetov[2]
[1]PhD, Senior Lecturer of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkistan), e-mail: meiirkhan.borikhanov@ayu.edu.kz
[2]PhD doctoral student of Al-Farabi Kazakh National University (Kazakhstan, Almaty), e-mail: samatmambetov09@gmail.com

Linear and nonlinear fractional order diffusion equations with initial and bowndary conditions

Abstract. The usual differentiation and integration are expanded to any non-integer order in fractional calculus. The topic predates the development of differential calculus by Leibnitz and Newton and is therefore as old as classical theory. The concept of fractional calculus has generated interest not only among mathematicians but also among physicists and engineers.

This concept is calculated in the same way as the classical methods of differential and integral calculus, and also dates back to the time when Leibniz and Newton invented differential calculus. The idea of calculating fractional order is of interest not only among individual mathematicians, but also among physicists and engineers. The method of upper and lower solutions has been extended to FDEs using these minimum-maximum principles, and various existence results have been established.

In this paper, a one-dimensional subdiffusion equation is investigated using the principle of the maximum of the Riemann-Liouville derivative of fractional order. It is proved that for fractional order diffusion equations in linear and nonlinear time there is a unique classical solution to the initial boundary value problem and that the solution continuously depends on the initial and boundary conditions.

Keywords: sub-diffusion equation, maximum principle, fractional differential equation, nonlinear problem, Riemann-Liouville derivative.

М.Б. Бориханов[1], С.А. Мамбетов[2]

[1]PhD, старший преподаватель Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, г.Туркестан), e-mail: meiirkhan.borikhanov@ayu.edu.kz

[2]PhD докторант Казахского Национального университета имени Аль-Фараби (Казахстан, г. Алматы), e-mail: samatmambetov09@gmail.com

Линейные и нелинейные диффузионные уравнения дробного порядка с начально-краевыми условиями

Аннотация. Дробное исчисление – это обобщение обычного дифференцирования и интегрирования до произвольного нецелого порядка. Это понятие рассчитывается так же, как и классические методы дифференциального и интегрального исчисления, он также восходит к тому времени, когда Лейбниц и Ньютон изобрели дифференциальное исчисление. Идея расчета дробного порядка представляет интерес не только среди отдельных математиков, но и среди физиков и инженеров.

Принципы максимума являются одним из немногих известных методов получения информации о решениях дифференциальных уравнений без какого-либо явного знания самих решений. До недавнего времени принципы максимума формулировались и доказывались только для обычных обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных. В последнее время в связи с развитием задач дифференциальных уравнений дробного порядка метод принципа максимума начал применяться и для анализа дробно-дифференциальных уравнений.

В этой статье исследуется одномерное уравнение субдиффузии с использованием принципа максимума производной Римана-Лиувилля дробного порядка. Доказано, что для уравнений диффузии дробного порядка в линейном и нелинейном времени существует единственное классическое решение исходно-краевой задачи и что решение непрерывно зависит от начальных и граничных условий.

Ключевые слова: уравнение субдиффузии, принцип максимума, дифференциальное уравнение дробного порядка, нелинейная задача, производная Римана-Лиувилля.

Кіріспе

Бұл жұмыста бастапқы-шеттік шарттарымен берілген сызықты және бейсызықты бөлшек ретті диффузиялық теңдеулерін қарастырамыз.

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді зерттеудегі әдістердің бірі максимум және минимум қағидасы. Бұл қағида есептің шешімдері жайындағы ақпараттарды арнайы формалар туралы қажет етпей-ақ алуға мүмкіндік береді. Дәлірек айтқанда, Лучко [1] жұмысында Риман-Лиувилль және Капуто мағынасындағы бөлшек ретті туындылар үшін максимум қағидасын көрсеткен. Максимум қағидасымен ашық шенелген аймақта жалпыланған диффузиялық теңдеудің шешімі бар болса, онда ол жалғыз және бастапқы берілгеннен үздіксіз тәуелді болатындығын көрсетті [2]. Нәтижелер бұдан басқа да уақыт бойынша бөлшек ретті диффузиялық теңдеулердің [2-8] максимум қағидасын дәлелдеуде қолданылған.

Зерттеу әдістері

Бөлшек ретті Риман-Лиувилль туындысының максимум қағидасын негізге алып сызықты және бейсызықты уақыт бойынша бөлшек ретті диффузия теңдеулерін зерттейміз. Осы теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептің жалғыз классикалық шешімі бар екенін және шешім бастапқы және шекаралық шарттарға үздіксіз тәуелді екенін дәлелдейміз. Алдымен бөлшек ретті Риман-Лиувилль туындысының және интегралының анықтамасын берейік.

Анықтама 1 [9, 69 бет]. Берілген $\alpha \in (0,1)$ саны және $f(t) \in L^q(0,T)$ $(1 \le q \le \infty)$ функциясы үшін

$$I_{0|t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \quad t \in (0,T]$$

теңдігі Риман - Лиувилль мағынасындағы сол жақты $I_{0|t}^{\alpha} f(t)$ бөлшек ретті интегралы деп аталады. Мұндағы $\Gamma(\alpha)$ - Эйлер гамма функциясы

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt, \ \alpha > 0.$$

Анықтама 2 [9, 70 бет]. Берілген $0 < \alpha < 1$ және $f(t)$ абсолютті үзіліссіз функция үшін

$$D_{0|t}^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt} I_{0|t}^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\,ds, \quad t \in (0,T]$$

өрнегі Риман - Лиувилль мағынасындағы сол жақты бөлшек ретті туынды деп аталады.

Қасиет 1 [9, 74 бет]. Берілген $f(t) \in L^q(0,T)$ $(1 \le q \le \infty)$ функциясы үшін

$$D_{0|t}^{1-\alpha}\left[I_{0|t}^{1-\alpha} f\right](t) = f(t)$$

теңдігі орынды.

Лемма 1 [10]. Айталық $0 < \alpha < 1$ және $f(t) \in C^1[0,T]$ болсын.

а) Егер $t_0 \in [0,T]$ нүктесінде $f(t)$ функциясы өзінің максимум мәнін қабылдаса

$$D_{0|t}^{\alpha} f(t_0) \ge \frac{t_0^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(t_0) \tag{1}$$

бағалауы орындалады.

б) Егер $t_0 \in [0,T]$ нүктесінде $f(t)$ функциясы өзінің минимум мәнін қабылдаса, онда

$$D_{0|t}^{\alpha} f\left(t_0\right) \leq \frac{t_0^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f\left(t_0\right). \tag{2}$$

Талдау мен нәтижелер

Айталық,

$$u_t\left(x,t\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{0|t}^{1-\alpha} u\left(x,t\right) + F\left(x,t\right),\ \left(x,t\right) \in \left(0,a\right) \times \left(0,T\right] = \Omega, \tag{3}$$

бөлшек ретті диффузия теңдеуі үшін

$$\begin{cases} u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right),\ x \in \left[0,a\right], \\ u\left(0,t\right) = \lambda\left(t\right),\ \ u\left(a,t\right) = \mu\left(t\right),\ 0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{4}$$

бастапқы-шеттік есебі берілсін. Мұндағы $F\left(x,t\right)$, $\varphi\left(x\right)$, $\lambda\left(t\right)$, $\mu\left(t\right)$ функциялары үздіксіз және $D_{0|t}^{1-\alpha}\lambda\left(t\right), D_{0|t}^{1-\alpha}\mu\left(t\right) \geq 0, t \in \left[0,T\right]$.

Теорема 1. Айталық, (3) - (4) есебінің шешімі $u\left(x,t\right)$ функциясы болсын делік. Онда кез - келген $\left(x,t\right) \in \bar{\Omega}$ үшін $F\left(x,t\right) \geq 0$ орындалса, сәйкесінше

$$u\left(x,t\right) \geq \min_{\left(x,t\right)\in\bar{\Omega}} \left\{\lambda\left(t\right), \mu\left(t\right), \varphi\left(x\right)\right\},\ \left(x,t\right) \in \bar{\Omega}$$

бағалауы орынды болып табылады.

Дәлелдеуі. Келесі белгілеулерді енгізейік

$$m = \min_{\left(x,t\right)\in\bar{\Omega}} \left\{\lambda\left(t\right), \mu\left(t\right), \varphi\left(x\right)\right\}$$

және

$$\tilde{u}\left(x,t\right) = u\left(x,t\right) - m.$$

Онда бастапқы-шеттік шарт бойынша

$$\begin{cases} \tilde{u}\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right) - m \geq 0,\ x \in \left[0,a\right], \\ \tilde{u}\left(0,t\right) = \lambda\left(t\right) - m \geq 0,\ \tilde{u}\left(a,t\right) = \mu\left(t\right) - m \geq 0,\ t \in \left[0,T\right], \end{cases} \tag{5}$$

теңсіздігіне ие боламыз. Сәйкесінше,

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}\left(x,t\right) = \frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right) \text{ және } \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}\left(x,t\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{0|t}^{1-\alpha} u\left(x,t\right)$$

орынды. Демек, $\tilde{u}(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)+F(x,t),$$

теңдеуін және (5) түрдегі бастапқы-шеттік шарттарды қанағаттандырады.

$\tilde{u}(x,t)<0$ теңсіздігі орынды болатын $(x,t)\in\bar{\Omega}$ нүктесі табылсын делік. Онда, $(x,t)\in\{0,a\}\times[0,T]\bigcup[0,a]\times\{0\}$ облысында $\tilde{u}(x,t)\geq 0$ болғандықтан, $\tilde{u}(x,t)$ функциясы Ω аймағында теріс минимум мәнге ие болатын $(x_0,t_0)\in\Omega$ нүкте бар болады. Онда, лемма 1 негізінде

$$D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x_0,t_0)\leq\frac{t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tilde{u}(x_0,t_0)<0 \tag{6}$$

орынды. Ендігі кезекте $\omega(x,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)$ белгілеуін енгізейік. Егер $t\to 0$ болса, онда $\omega(x,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)\to 0$ қатынас орындалатындығы анық.

Демек, $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,0)=0$. Сәйкесінше, $\tilde{u}(x,t)$ функциясының шекаралық мәндері бойынша $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(0,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}\lambda(t)$ және $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(a,t)=D_{0|t}^{1-\alpha}\mu(t)$ орынды. Олай болса, $D_{0|t}^{1-\alpha}\lambda(t)\geq 0, t\in[0,T]$ және $D_{0|t}^{1-\alpha}\mu(t)\geq 0, t\in[0,T]$ болатынын ескерсек, онда $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(0,t)\geq 0$ және $D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(a,t)\geq 0$ болатындығын көреміз.

Бұдан $\omega(x,t)$ функциясы

$$\begin{cases} D_{0|t}^{\alpha}\omega(x,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x,t)+F(x,t), \\ \omega(x,0)=0,\ x\in[0,a], \\ \omega(0,t)\geq 0,\ \omega(a,t)\geq 0,\ 0\leq t\leq T, \end{cases} \tag{7}$$

теңдеуін қанағаттандыратындығы келіп шығады.

Сонымен қатар (6) теңсіздігі арқылы (x_0,t_0) нүктеде $\omega(x_0,t_0)<0$ және Ω аймағының шекарасында $\omega(x,t)\geq 0$ теңсіздігі орынды. Олай болса, $\bar{\Omega}$ аймағында $\omega(x,t)$ функциясының теріс минимум мән қабылдайтын (x_1,t_1) нүктесі табылады.

Лемма 1 көмегімен $D_{0|t}^{\alpha}\omega(x_1,t_1)\leq\dfrac{t_1^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\omega(x_1,t_1)<0$ және $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x_1,t_1)\geq 0$ теңсіздіктеріне ие боламыз. Демек, $\omega(x,t)$ функциясы (x_1,t_1) нүктеде $D_{0|t}^{\alpha}\omega(x_1,t_1)<0$ және $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\omega(x_1,t_1)+F(x_1,t_1)\geq 0$ теңсіздіктерін қанағаттандырады.

Алынған нәтиже қарама - қайшылыққа алып келеді, яғни $\bar{\Omega}$ - да $\tilde{u}(x,t)\geq 0$ орынды болатынын көрсетеді.

Демек, $\bar{\Omega}$ аймағында кез - келген m үшін $u(x,t) \geq m$ орынды болатындығы шығады.

Теорема 2. Айталық, (3)-(4) есептің шешімі $u(x,t)$ функциясы болсын. Онда $(x,t) \in \bar{\Omega}$ үшін $F(x,t) \leq 0$ болса, онда

$$u(x,t) \leq \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}} \{\lambda(t), \mu(t), \varphi(x)\}$$

орынды.

Сәйкесінше, Теорема 1 және Теорема 2 нәтижелерінен келесідей салдарлар шығады.

Салдар 2. Айталық, (3) - (4) есебінің шешімі $u(x,t)$ функциясы болсын. Онда $(x,t) \in \bar{\Omega}$ үшін $F(x,t) \geq 0$ болса, онда кез - келген $(x,t) \in \bar{\Omega}$ үшін $u(x,t) \geq 0$ болады.

Салдар 3. Айталық, (3) - (4) есебінің шешімі $u(x,t)$ функциясы болсын. Онда $(x,t) \in \bar{\Omega}$ үшін $F(x,t) \leq 0$ болса, онда кез - келген $(x,t) \in \bar{\Omega}$ үшін $u(x,t) \leq 0$ орындалады.

(4) Теорема 1 және Теорема 2-ден шығатын қорытынды классикалық жылу өткізгіштік теңдеуіндегі әлсіз максимум қағидасымен ұқсастығы болады. Бұл нәтижелерден (3) - (4) есептің шешімінің жалғыз болатынын дәлелдеуде қолдануға болады.

Теорема 3. Егер (3) - (4) есептердің шешімі бар болса, онда ол жалғыз.

Дәлелдеуі. Бізде, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ функциялары үшін (3) - (4) есептерінің шешімдері болсын. Олай болса, $u_1(x,t) - u_2(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_1(x,t) - u_2(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial x^2} D_{0|t}^{1-\alpha}\left(u_1(x,t) - u_2(x,t)\right)$$

теңдеуін және (4) шарттарды қанағаттандырады.

Олай болса, Теорема 1 және Теорема 2 негізінде $\bar{\Omega}$ аймағында $u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0$ болатынын көреміз. Онда, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. Демек, (3) - (4) есептердің шешімі жалғыз болады.

Олай болса, Теорема 1 және Теорема 2 нәтижелерінен (3) - (4) есебінің шешімі бастапқы функциядан үздіксіз тәуелді болатынын көреміз.

Теорема 4. Айталық (3) - (4) есебінің $\varphi(x)$ және $\bar{\varphi}(x)$ бастапқы шарттарына сәйкес келетін шешімдері $u(x,t)$ және $\bar{u}(x,t)$ функциялары болсын. Онда

$$\max_{x\in[0,a]} \{|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)|\} \leq \delta$$

болса, онда

$$|u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \leq \delta$$

орынды.

Дәлелдеуі. $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \bar{u}(x,t)$ функциясы

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x^2}D_{0|t}^{1-\alpha}\tilde{u}(x,t)$$

теңдеуін, $\tilde{u}(x,0)=\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)$ Коши-Дирихле есебін қанағаттандырады. Олай болса Теорема 1 және Теорема 2 негізінде келесідей нәтижені аламыз

$$\left|\tilde{u}(x,t)\right|\le\max_{[0,a]}\left\{\left|\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)\right|\right\}.$$

Келесі кезекте бейсызықты диффузия теңдеуі үшін

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x^2}D_{0|t}^{1-\alpha}u(x,t)+F(x,t,u),\ (x,t)\in(0,a)\times(0,T]=\Omega \tag{8}$$

$$\begin{cases}u(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,a),\\ u(0,t)=u(a,t)=0,\ 0<t\le T,\end{cases} \tag{9}$$

Коши-Дирихле шарттарымен берілген есебін қарастырамыз. Бұл жердегі $F(x,t,u)$ тегіс функция.

Теорема 5. Айталық (8) - (9) есептің шешімі бар және $F(x,t,u)$ функциясы u бойынша өспейтін функция болсын, онда сәйкесінше (8) - (9) есептің шешімі жалғыз.

Дәлелдеуі. Айталық $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары (8) - (9) есебінің шешімдері болсын. Онда, $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ функциясы келесі есепті қанағаттандырады:

$$\begin{cases}v_t(x,t)-\frac{\partial}{\partial x^2}D_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)=F(x,t,u_1)-F(x,t,u_2),\ (x,t)\in\Omega,\\ v(x,0)=0,\ 0<x<a,\\ v(0,t)=v(a,t)=0,\ t\in(0,T]\end{cases}$$

Классикалық түрдегі орта мән теоремасы бойынша

$$F(x,t,u_2)-F(x,t,u_1)=\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)(u_2-u_1)=-\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)v(x,t),$$

теңдігі орынды. Мұндағы $(u^*)=(1-\mu)u_1+\mu u_2,\ 0\le\mu\le 1.$ Сәйкесінше,

$$v_t(x,t)-\frac{\partial}{\partial x^2}D_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)=-\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)v(x,t)$$

болады. Келесі кезекте, $v(x,t)$ функциясы нөлден өзгеше болсын делік. Демек, Ω

облысында $v(x,t)$ функциясы оң максимум (теріс минимум) мәнге ие болады деген сөз. Теорема шарты бойынша $F(x,t,u)$ өспейтін функция, сонымен қатар $v(x,t)$ функциясы $(x_0,t_0)\in\Omega$ нүктесінде оң максимумға ие және $\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)\le 0$ екенін ескерсек, онда $-\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)v(x_0,t_0)\ge 0$ теңсіздігіне қол жеткіземіз. Сәйкесәнше $v_t(x_0,t_0)-\frac{\partial}{\partial x^2}D_{0|t}^{1-\alpha}v(x_0,t_0)\ge 0$ орынды болады. Демек, Теорема 1 және Теорема 2 нәтижесі бойынша $u_1(x,t)=u_2(x,t)$. Дәлелдеу қажеті де осы болатын.

Теорема 6. (8) - (9) есептің $u_1(x,0)=\varphi_1(x)$ және $u_2(x,0)=\varphi_2(x)$ бастапқы шарттарына сәйкес келетін шешімдері $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функциялары болсын. $F(x,t,u)$ функциясы u бойынша өспейтін болса, онда келесі бағалауға ие боламыз

$$\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{\bar{\Omega}}\le\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\|_{[0,a]}.$$

Дәлелдеуі. Ең алдымен, $v(x,t)$ функциясын $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ түрінде енгізейік. Олай болса $v(x,t)$ функциясы

$$\begin{cases} v_t(x,t)-\frac{\partial}{\partial x^2}D_{0|t}^{1-\alpha}v(x,t)=-\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)v,\ (x,t)\in\Omega, \\ v(x,0)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x),\ 0\le x\le a, \\ v(0,t)=v(a,t)=0,\ t\in(0,T] \end{cases}$$

есебінің шешімі болып табылады. Мұндағы $M=\|g_1(x)-g_2(x)\|_{[0,a]}$ болсын және Теорема 6 нәтижесін кері жориық. Демек, $\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{\bar{\Omega}}\nleq M$ болуы керек. Олай болса, v функциясы $(x_0,t_0)\in\Omega$ нүктеде $v(x_0,t_0)=M_1>M$ орындалатын оң максимум мәнін немесе $(x_0,t_0)\in\Omega$ нүктеде $v(x_0,t_0)=M_2<-M$ орындалатын теріс минимум мәнін қабылдайды. Мұндағы $v(x_0,t_0)=M_1>M$ болатын болса, v функциясының бастапқы - шеттік шарттарын қолдансақ, онда $(x_0,t_0)=\Omega$ болады. Демек, Теорема 1 және Теорема 2-ні пайдаланып $\|v(x,t)\|\le M$ теңсіздігін аламыз.

Қорытынды

Бұл мақалада бөлшек ретті Риман-Лиувилль туындысының максимум қағидасын негізге алып сызықты және бейсызықты уақыт бойынша бөлшек ретті диффузия теңдеулері зерттелді. Осы теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептің жалғыз классикалық шешімі бар екенін және шешім бастапқы және шекаралық шарттарға үздіксіз тәуелді екені дәлелденді.

Келесі кезекте басқа да бөлшек ретті операторлар үшін максимум қағидасын қолдана отырып сызықты және бейсызықты теудеулерді зерттеу болжануда.

REFERENCES

1. Luchko Y. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2009. – Vol. 251. – P. – 218–222.
2. Luchko Y. Some uniqueness and existence results for the initial boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation // Computers and Mathematics with Applications. – 2010. – Vol. 59. – P. – 1766–1772.
3. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2011. – Vol. 274. – P. – 528–548.
4. Luchko Y. Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2009. – Vol. 12, No. 4. – P. – 409–422.
5. Al-Refai M., Luchko Y. Maximum principle for the multi-term time-fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivatives // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – Vol. 257. – P. – 40–51.
6. Chan C.Y., Liu H.T. A maximum principle for fractional diffusion equations // Quarterly of Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 74, No. 2. – P. – 421–427.
7. Kirane M., Torebek B. T. Extremum principle for the Hadamard derivatives and its application to nonlinear fractional partial differential equations // Fractional Calculus and Applied Analysis. -2019. – Vol. 22, No. 2. – P. – 258–278.
8. Luchko Y., Yamamoto M. On the maximum principle for a time-fractional diffusion equation // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2017. – Vol. 20, No. 5. – P. – 1121–1145.
9. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam, London and New York: North-Holland Mathematical Studies, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, 2006. – 522 p.
10. Al-Refai M., Luchko Y. Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivative and its applications // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2014. – Vol. 17, No.2. – P. – 483–498.