УДК 517.968.72
ГРНТИ 27.29.17
https://doi.org/10.47526/2022-3/2524-0080.04

К.И. УСМАНОВ
кандидат физико-математических наук, доцент,
Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави
(Казахстан, Туркестан), E-mail:kairat.usmanov@ayu.edu.kz

УСЛОВИЕ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ.

Аннотация. При рассмотрении нелокальных краевых задач для функционально – дифференциальных уравнении, когда производная от искомой функции содержится в правой части, можно было бы воспользоватся резольвентой интегрального уравнения. Но, как известно резольвенту интегрального уравнения II рода типа Фредгольма, не всегда удается однозначно определить. В некоторых случаях можно воспользоватся свойствами ядра интегро-дифференциального уравнения. В данной работе рассмотрена нелокальная краевая задача для систем интегродифференциальных уравнении с инволюцией, когда ядро интегрального члена содержащее производную имеет частную производную. Используя свойства инволютивного преобразования, задача сводится к исследованию многоточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнении. К данной задаче был применен метод параметризации предложенный профессором Д.Джумабаевым. Вводятся новые параметры, и на основе этих параметров переходим к новым переменным. При переходе к новым переменным получаем начальные условия для исходного уравнения. С помощью данного условия можно определить решение полученной задачи Коши, а также системы линейных уравнений. Применяя теорию Фредгольма для решения полученных систем интегральных уравнении, т.е. однозначную разрешимость исследуемой задачи, сводим к обратимости матрицы, которая зависит от исходных данных. В качестве иллюстрации предложеного метода был продемонстрирован пример.

Ключевые слова: Краевая задача, метод параметризации, параметр, однозначная разрешимость, ядро.

К.И. Усманов
физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент,
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті
(Қазақстан, Түркістан)E-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz

Функционалды-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін локальді емес шеттік есептің бірмәнді шешімділігінің шарттары

Аңдатпа. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін локальді емес шеттік есептерді шығарғанда, ізделінді функцияның туындысы оң жақта орналасқанда, интегралдық теңдеудің резольвентасын қолдануға болады. Бірақ, көбіне Фредгольмнің II типіндегі интегралдық теңдеудің резольвентасын әрқашан анықтау мүмкін емес. Кейбір жағдайларда, интегралдық-дифференциалдық теңдеудің өзегінің қасиеттерін пайдалануға болады. Бұл жұмыста, инволюциялы интегралдық - дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көп нүктелі шеттік есептің, туындысы бар интегралдық мүшесіндегі өзектің дербес туындысы болған жағдай қарастырылады. Инволюциялық түрлендірудің қасиеттерін пайдалана отырып, есеп интегралдық - дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көп нүктелі шекаралық есептерді зерттеуге келтіріледі. Бұл есепке профессор Д.Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісі қолданылады. Жаңа параметрлер енгізіледі және осы параметрлер негізінде біз жаңа айнымалыларға өтеміз. Жаңа айнымалыларға көшу теңдеудің бастапқы шарттарын алуға мүмкіндік береді. Осының негізінде есептің шешімі арнайы Коши есебі және сызықтық теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі. Интегралдық теңдеулерді шешу әдістерін қолдана отырып, бастапқы есептің бірмәнді шешімділігі, бастапқы мәндерге тәуелді матрицаның қайтымдылығына келтіріледі. Ұсынылған әдістің иллюстрациясы ретінде мысал көрсетілді.

Кілт сөздер: Шеттік есеп, параметрлеу әдісі, функционалды – дифференциалдық теңдеулер, параметр, бірмәнді шешімділік, өзек.

K.I. Usmanov
Candidate of physical- mathematical sciences, Associate professor,
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: kairat.usmanov@ayu.edu.kz

A condition for the unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of functional-differential equations

Abstract. When considering non-local boundary value problems for functional-differential equations, when the derivative of the desired function is contained in the right side, one could use the resolvent of the integral equation. But, as is known, the resolvent of an integral equation of the second kind of the Fredholm type cannot always be uniquely determined. In some cases, you can use the properties of the kernel of the integro-differential equation. In this paper, we consider a non-local boundary value problem for systems of integro-differential equations with involution, when the kernel of the integral term containing the derivative has a partial derivative. Using the properties of an involutive transformation, the problem is reduced to the study of a multipoint boundary value problem for systems of integro-differential equations. The parameterization method proposed by Professor D. Dzhumabaev was applied to this problem. New parameters are introduced, and based on these parameters, we pass to new variables. When passing to new variables, we obtain the initial conditions for the initial equation. With the help of this condition, it is possible to determine the solution of the resulting Cauchy problem, as well as the system of linear equations. Applying the Fredholm theory to solve the obtained systems of integral equations, i.e. the unique solvability of the problem under study, we reduce to the reversibility of the matrix, which depends on the initial data. An example was shown as an illustration of the proposed method.

Keywords: parametrization method, parameter, boundary condition, unambiguous solvability, kernel.

Введение

Рассмотрим на $[0,T]$ нелокальную краевую задачу

$$\frac{dx(\mathrm{t})}{dt}+A\cdot\frac{dx(\alpha(t))}{dt}=\int_0^T K_1(t,s)x(s)\,ds+\int_0^T K_2(t,s)\dot{x}(s)\,ds+f(t),\ \mathrm{t}\in[0,T], \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m} B_i x(\theta_i)=d\ , \tag{2}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}<\theta_m=T,$$

здесь $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$ непрерывны матрицы на соответствующих отрезках, $f(t)\in C[0,T]$, $d\in R^n$, A - некоторая постоянная матрица. Здесь $\alpha(t)-$ изменяющий ориентацию гомеоморфизм $\alpha:[0,T]\to[0,T]$ такой, что $\alpha^2(t)=\alpha(\alpha(\mathrm{t}))=\mathrm{t}$. Такой гомеоморфизм, называют инволютивным преобразованием. На отрезке $[0,T]$ в качестве такого преобразования можно рассмотреть гомеоморфизм $\alpha(t)=\mathrm{T}-t$. Свойства инволютивных преобразовании были рассмотрены в работах [1-5].

Применение метода параметризации.

Рассмотрим значения уравнения (1) в точке $t=\alpha(t)$

$$\frac{dx(\alpha(t))}{dt}+A\cdot\frac{dx(t)}{dt}=\int_0^T K_1(\alpha(t),s)x(s)\,ds+\int_0^T K_2(\alpha(t),s)\dot{x}(s)\,ds+f(\alpha(t)).$$

Из системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx(\mathrm{t})}{dt}+A\cdot\dfrac{dx(\alpha(t))}{dt}=\displaystyle\int_0^T K_1(t,s)x(s)\,ds+\int_0^T K_2(t,s)\dot{x}(s)\,ds+f(t),\\ \dfrac{dx(\alpha(t))}{dt}+A\cdot\dfrac{dx(t)}{dt}=\displaystyle\int_0^T K_1(\alpha(t),s)x(s)\,ds+\int_0^T K_2(\alpha(t),s)\dot{x}(s)\,ds+f(\alpha(t)).\end{cases}$$

Умножая второе уравнение на матрицу $-A$ с левой стороны, и складывая уравнения получим

$$\frac{dx}{dt}=\int_0^T\tilde{K}_1(t,s)x(s)ds+\int_0^T\tilde{K}_2(t,s)\dot{x}(s)ds+\tilde{f}(t),\quad \mathrm{t}\in[0,T], \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{m}B_i x(\theta_i)=d\,,\quad d\in R^n, \tag{4}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}<\theta_m=T,$$

где $\tilde{K}_1(t,s)=\left[I-A^2\right]^{-1}\left[K_1(t,s)-A\cdot K_1(\alpha(t),s)\right]$, $\tilde{K}_2(t,s)=\left[I-A^2\right]^{-1}\left[K_2(t,s)-A\cdot K_2(\alpha(t),s)\right]$, $\tilde{f}(t)=\left[I-A^2\right]^{-1}\left[f(t)-A\cdot f(\alpha(t))\right]$.

Здесь условие обратимости матрицы $\left[I-A^2\right]$ является существенным. Действительно рассмотрим следующую однородную краевую задачу с инволюцией $a=1$

$$\frac{dx(\mathrm{t})}{dt}+\frac{dx(-t)}{dt}=\int_{-\pi}^{\pi}x(s)\,ds+\int_{-\pi}^{\pi}\dot{x}(s)\,ds,\quad \mathrm{t}\in[-\pi,\pi].$$

$$x(-\pi)-x(\pi)=0.$$

Данная задача имеет решение $x(t)=\cos(kt)$. Получается, что однородная краевая задача имеет множество ненулевых решении. В случае $a=-1$, в качестве не нулевого решения можно взять функцию $x(t)=\sin(kt)$.

Предположим, что $\dfrac{\partial K_2(t,s)}{\partial s}$ непрерывный, тогда

$$\int_0^T \tilde{K}_2(t,s)\dot{x}(s)ds=\tilde{K}_2(t,s)x(s)\Big|_0^T-\int_0^T\frac{\partial\tilde{K}_2(t,s)}{\partial s}x(s)ds=$$

$$=\tilde{K}_2(t,T)x(T)-\tilde{K}_2(t,0)x(0)-\int_0^T\frac{\partial\tilde{K}_2(t,s)}{\partial s}x(s)ds.$$

Тогда уравнение (3), (4) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt}=\int_0^T K(t,s)x(s)ds+K_{20}(t)x(\theta_0)+K_{21}(t)x(\theta_m)+\tilde{f}(t), \tag{5}$$

$$\sum_{i=0}^m B_i x(\theta_i)=d, \quad d\in R^n, \tag{6}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}<\theta_m=T,$$

где

$$K_{20}(t)=-\tilde{K}_2(t,0),$$

$$K_{21}(t)=\tilde{K}_2(t,T),$$

$$\int_0^T K(t,s)x(s)ds=\int_0^T\tilde{K}_1(t,s)x(s)ds-\int_0^T\frac{\partial\tilde{K}_2(t,s)}{\partial s}x(s)ds. \tag{7}$$

К краевой задачи (5), (6) применяем метод параметризации [6-9], для этого берем натуральное число $l\in\mathrm{N}$ и по нему производим разбиение: $[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{m(l+1)}[t_{r-1},t_r)$, где $t_{i(l+1)+j}=t_{i(l+1)}+\dfrac{h_{i+1}}{l}$, $h_i=\theta_i-\theta_{i-1}$, $i=\overline{0,m-1}$, $j=\overline{1,l+1}$. Обозначим $h=\max\{h_1,h_1,\ldots,h_m\}$, $\beta=\max\limits_{t,s\in[0,T]}\|K(t,s)\|$.

Пусть $y_r(t)$, $r=\overline{1,m(l+1)}$ сужение функции $x(t)$ на интервалы $[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,m(l+1)}$, тогда нелокальную краевую задачу (5), (6) можно записать в виде

$$\frac{dy_r}{dt}=\sum_{i=1}^{m(l+1)}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(t,s)y_i(s)ds+K_{20}(t)y_1(t_0)+$$

$$+K_{21}(t)\lim_{t\to T-0}y_{m(l+1)}(t)+\tilde{f}(t),\ [t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,m(l+1)}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} B_i y_{j(l+1)+1}\left(t_{j(l+1)}\right) + B_m \lim_{t\to T-0} y_{m(l+1)}(t) = d\,, \tag{9}$$

$$\lim_{t\to t_p-0} y_p(t) = y_{p+1}\left(t_p\right), \qquad p=\overline{1, m(l+1)-1}, \tag{10}$$

Значение функции в левых концах разбиения обозначим через λ_r, т.е. $\lambda_r = y_r\left(t_{r-1}\right), r=\overline{1, m(l+1)}$, $\lambda_{m(l+1)+1} = \lim\limits_{t\to T-0} y_{m(l+1)}(t)$. В $t\in[t_{r-1}, t_r)$ зделаем замену пременных $y_r(t) = v_r(t) + \lambda_r$, $r=\overline{1, m(l+1)}$. Тогда полученную задачу (8) - (10) можно написать в виде

$$\frac{dv_r}{dt} = \sum_{i=1}^{m(l+1)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t,s)\left[v_i(s)+\lambda_i\right] ds + K_{20}(t)\lambda_1 + K_{21}(t)\lambda_{\mathrm{m}(l+1)+1} + \tilde{f}(t), \quad [t_{r-1}, t_r),\ r=\overline{1, m(l+1)}, \tag{11}$$

$$v_s\left(t_{s-1}\right) = 0, \qquad s=\overline{1, m(l+1)}, \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{m} B_i \lambda_{i(l+1)+1} = d\,, \tag{13}$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to t_p-0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \qquad p=\overline{1, m(l+1)}. \tag{14}$$

Используя начальные условия $u_r\left(t_{r-1}\right) = 0$, $r=\overline{1, m(l+1)}$ решение задачи Коши можем записать в виде интегральных уравнении

$$v_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} \sum_{i=1}^{m(l+1)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau,s) v_i(s) ds d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} \sum_{i=1}^{m(l+1)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau,s) ds d\tau \lambda_i + \int_{t_{r-1}}^{t} K_{20}(\tau) d\tau \lambda_1 +$$
$$+ \int_{t_{r-1}}^{t} K_{21}(\tau) d\tau \lambda_{\mathrm{m}(l+1)+1} + \int_{t_{r-1}}^{t} \tilde{f}(\tau) d\tau, \quad t\in[t_{r-1}, t_r). \tag{15}$$

Выберем l_0 так, чтобы $q(l_0) = \beta T \dfrac{h}{l_0} < 1$. Тогда из оценки

$$\left\| \sum_{i=1}^{m(l+1)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t,\tau) \int_{t_{i-1}}^{\tau} v_l(\tau_1) d\tau_1 d\tau \right\| \le \beta T \frac{h}{l_0} \max_{t\in[0,T]} \left\| v_l(t) \right\|, \quad t\in[0,T] \tag{16}$$

следует, что для любого $l \ge l_0$ уравнение (15) имеет единственное решение.

Множество всех l, при котором (15) имеет единственное решение назовем регулярным разбиением и обозначим через Δ_l. Как видно из (16), что данное множество непусто.

Из (15) определив $\lim\limits_{t\to t_s-0} v_s(t)$, $s=\overline{1, m(l+1)}$, подставляя соответствующие им выражения в условия (13) получим систему уравнении, для определения неизвестных параметров λ_r

$$Q(l)\lambda = -F(l) - G(v,l),\ \lambda \in R^{n(m(l+1)+1)}, \tag{17}$$

Из полученной замкнутой системы можно определить пару $(\lambda, u[t])$. Т.е. из системы (17) определим $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_{n(m(l+1)+1)}^{(0)}) \in R^{n(m(l+1)+1)}$, далее подставив в уравнения (15) решим систему интегральных уравнении типа Фредгольма II рода, и т.д.

Из выше сказанных следует

Теорема. Пусть матрица $\left[I - A^2\right]$ обратима. Тогда для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо чтобы матрица $Q_*(l)$ была обратима при всех $l \in \Delta_l$ и достаточно чтобы она была обратима при некотором $l \in \Delta_l$.

Для иллюстрации выше сказаного рассмотрим следуший пример.
На отрезке $[0,1]$ рассмотрим следящую трехточечную краевую задачу

$$\dot{x}(\mathrm{t}) - 2\dot{x}(1-t) = \int_0^1 (3t+1)x(s)\,ds + 3\int_0^1 (t+s)\dot{x}(s)\,ds - 3t - 1, \tag{17}$$

$$x(0) - 2x\left(\frac{1}{2}\right) + x(1) = 0. \tag{18}$$

Рассмотрив значения уравнения (17) в точке $t^* = 1 - t$

$$\dot{x}(1-t) - 2\dot{x}(t) = \int_0^1 (4-3t)x(s)\,ds + 3\int_0^1 (1-t+s)\dot{x}(s)\,ds + 3t - 4, \tag{19}$$

Рассмотрим совместно системы уравнений (17), (19)

$$\begin{cases} \dot{x}(\mathrm{t}) - 2\dot{x}(1-t) = \int_0^1 (3t+1)x(s)\,ds + 3\int_0^1 (t+s)\dot{x}(s)\,ds - 3t - 1, \\ \dot{x}(1-t) - 2\dot{x}(t) = \int_0^1 (4-3t)x(s)\,ds + 3\int_0^1 (1-t+s)\dot{x}(s)\,ds + 3t - 4. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение на 2 и складывая с первым уравнением поучим

$$\dot{x}(t) = \int_0^1 (t-3)x(s)\,ds + 3\int_0^1 (t-3s-2)\dot{x}(s)\,ds - t + 3. \tag{20}$$

Интегрируем второй интеграл по частям

$$\int_0^1 (t-3s-2)\dot{x}(s)\,ds = (t-3s-2)x(s)\Big|_0^1 + 3\int_0^1 x(s)\,ds = (t-5)x(1) - (t-2)x(0) + 3\int_0^1 x(s)\,ds\ .(21)$$

Подставляя (21) в (20) получим, и группируя соответствующие члены, краевую задачу (17),

(18) можно записать в виде

$$\dot{x}(t)=\int_0^1 tx(s)ds+(t-5)x(1)-(t-2)x(0)-t+3, \tag{21}$$

$$x(0)-2x\left(\frac{1}{2}\right)+x(1)=0. \tag{22}$$

Отрезок $[0,1)$ разобем на две части $[0,1)=\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},1\right)$. Сужение функции $x(t)$ на интервал $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ обозначим через $x_1(t)$, а на интервал $\left[\frac{1}{2},1\right)$ через $x_2(t)$. Тогда краевую задачу (21), (22) можно записать в виде

$$\dot{x}_1(t)=\int_0^{1/2} tx_1(s)ds+\int_{1/2}^1 tx_2(s)ds+(t-5)\lim_{t\to 1}x_2(t)-(t-2)x_1(0)-t+3, \quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \tag{23}$$

$$\dot{x}_2(t)=\int_0^{1/2} tx_1(s)ds+\int_{1/2}^1 tx_2(s)ds+(t-5)\lim_{t\to 1}x_2(t)-(t-2)x_1(0)-t+3, \quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right), \tag{24}$$

$$x_1(0)-2x_2\left(\frac{1}{2}\right)+\lim_{t\to 1}x_2(t)=0, \tag{25}$$

$$\lim_{t\to 1/2}x_1(t)=x_2\left(\frac{1}{2}\right). \tag{26}$$

Введя параметры $\lambda_1=x_1(0), \quad \lambda_2=x_1(1/2), \quad \lambda_3=\lim_{t\to 1}x_2(t)$ и выполним замену $x_r(t)=u_r(t)+\lambda_r$, $r=\overline{1,2}$. Тогда краевую задачу (23) - (26) можно записат в виде

$$\dot{u}_1(t)=t\int_0^{1/2} u_1(s)ds+t\int_{1/2}^1 u_2(s)ds-\left(\frac{t}{2}-2\right)\lambda_1+\frac{t}{2}\lambda_2+(t-5)\lambda_3-t+3, \quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \tag{27}$$

$$u_1(0)=0\ , \tag{28}$$

$$\dot{u}_2(t)=t\int_0^{1/2} u_1(s)ds+t\int_{1/2}^1 u_2(s)ds-\left(\frac{t}{2}-2\right)\lambda_1+\frac{t}{2}\lambda_2+(t-5)\lambda_3-t+3, \quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right), \tag{29}$$

$$u_2\left(\frac{1}{2}\right)=0, \tag{30}$$

$$\lambda_1-2\lambda_2\left(\frac{1}{2}\right)+\lambda_3=0, \tag{31}$$

$$\lambda_1+\lim_{t\to 1/2}u_1(t)=\lambda_2, \tag{32}$$

$$\lambda_2+\lim_{t\to 1}u_2(t)=\lambda_3, \tag{33}$$

Рассмотрим отдельно задачи Коши (27) – (30), они эквивалентны следуюшим интегральным уравнениям

$$u_1(t)=\frac{t^2}{2}\int_0^{1/2}u_1(s)ds+\frac{t^2}{2}\int_{1/2}^{1}u_2(s)ds-\left(\frac{t^2}{4}-2t\right)\lambda_1+\frac{t^2}{4}\lambda_2+\left(\frac{t^2}{2}-5t\right)\lambda_3-$$
$$-\frac{t^2}{2}+3t,\quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \tag{34}$$

$$u_2(t)=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{8}\right)\int_0^{1/2}u_1(s)ds+\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{8}\right)\int_{1/2}^{1}u_2(s)ds-\left(\frac{t^2}{4}-2t+\frac{15}{16}\right)\lambda_1+$$
$$+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{1}{16}\right)\lambda_2+\left(\frac{t^2}{2}-5t+\frac{19}{8}\right)\lambda_3-\frac{t^2}{2}+3t-\frac{11}{8},\quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right). \tag{35}$$

Интегрируем обе части первое уравнение $\left[0,\frac{1}{2}\right)$, а второе соответственнопо на $\left[\frac{1}{2},1\right)$. Тогда

$$\int_0^{1/2}u_1(s)ds=\frac{1}{48}\int_0^{1/2}u_1(s)ds+\frac{1}{48}\int_{1/2}^{1}u_2(s)ds+\frac{23}{96}\lambda_1+\frac{1}{96}\lambda_2-\frac{29}{63}\lambda_3+\frac{17}{48}, \tag{36}$$

$$\int_{1/2}^{1}u_2(s)ds=\frac{1}{12}\int_0^{1/2}u_1(s)ds+\frac{1}{12}\int_{1/2}^{1}u_2(s)ds+\frac{5}{24}\lambda_1+\frac{1}{24}\lambda_2-\frac{13}{24}\lambda_3+\frac{7}{24}. \tag{37}$$

Введем обозначение

$$k_1=\int_0^{1/2}u_1(s)ds,\qquad k_2=\int_{1/2}^{1}u_2(s)ds$$

Тогда (36), (37) можно записат в виде

$$k_1=\frac{1}{48}k_1+\frac{1}{48}k_2+\frac{23}{96}\lambda_1+\frac{1}{96}\lambda_2-\frac{29}{63}\lambda_3+\frac{17}{48},$$
$$k_2=\frac{1}{12}k_1+\frac{1}{12}k_2+\frac{5}{24}\lambda_1+\frac{1}{24}\lambda_2-\frac{13}{24}\lambda_3+\frac{7}{24}.$$

или

$$\frac{47}{48}k_1-\frac{1}{48}k_2=\frac{23}{96}\lambda_1+\frac{1}{96}\lambda_2-\frac{29}{63}\lambda_3+\frac{17}{48}, \tag{38}$$

$$-\frac{1}{12}k_1+\frac{11}{12}k_2=\frac{5}{24}\lambda_1+\frac{1}{24}\lambda_2-\frac{13}{24}\lambda_3+\frac{7}{24}. \tag{39}$$

Матрица соответсвующая правой части уравнени (38), (39)

$$A=\begin{pmatrix}\frac{47}{48} & -\frac{1}{48}\\ -\frac{1}{12} & \frac{11}{12}\end{pmatrix}$$

обратима и

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{44}{43} & \frac{1}{43}\\ \frac{4}{43} & \frac{47}{43}\end{pmatrix}.$$

Это означает что Δ_1 является регулярным разбиение для (34), (35). Подставляя соответсвующие выражения для $k_1,\ \ k_2$ в правую часть (34), (35), получим

$$u_1(t)=2t\lambda_1+\frac{12}{43}t^2\lambda_2-\left(\frac{6}{43}t^2+5t\right)\lambda_3-\frac{6}{43}t^2+3t,\qquad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\tag{40}$$

$$u_2(t)=\left(2t-1\right)\lambda_1+\left(\frac{12}{43}t^2-\frac{3}{43}\right)\lambda_2-\left(\frac{6}{43}t^2+5t-\frac{109}{43}\right)\lambda_3-\frac{6}{43}t^2+3t-\frac{63}{43},\quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right).\tag{41}$$

В (40), (41) переходя к пределу $\lim\limits_{t\to1/2}u_1\left(t\right),\ \lim\limits_{t\to1}u_2\left(t\right)$ и подставляя полученные выражения в краевые условия (32), (33), получим систему для определения параметров $\lambda_1,\ \ \lambda_2,\ \ \lambda_3$

$$\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0,\\ 2\lambda_1-\frac{40}{43}\lambda_2-\frac{109}{43}\lambda_3=-\frac{63}{43},\\ \lambda_1+\frac{52}{43}\lambda_2-\frac{155}{43}\lambda_3=-\frac{60}{43}.\end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -\frac{40}{43} & -\frac{109}{43}\\ 1 & \frac{52}{43} & -\frac{155}{43}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{63}{43}\\ -\frac{60}{43}\end{pmatrix}.$$

Матрица соответсвующая правой части уравнения обратима и

$$Q_*^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{46}{3} & -\frac{43}{3} & \frac{43}{3} \\ \frac{67}{6} & -11 & \frac{65}{6} \\ 8 & -\frac{23}{3} & \frac{22}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда из системы определим $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda = 1_3$. Подставляя полученны значения $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda = 1_3$ в (40), (41) получим $u_1(t) = 0, \quad u_2(t) = 0$. Така как, $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$, $r = \overline{1,2}$ и $\lambda_3 = \lim_{t \to 1} x_2(t)$, то $x(t) = 1$.

Из теоремы следует, что многоточечная краевая задача (17), (18) имеет единственное решение и $x(t) = 1$.

Заключение

В данной работе метод параметризации был применен для решения многоточечной краевой задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений с инволютивными преобразованиями. Введение параметров и удачная замена переменных разбивает задачу на две части: задачу Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений и систему линейных уравнений относительно введенных параметров. Применяя теорию интегральных уравнений, решение задачи сводится к обратимости матрицы, зависящей от исходных данных. Тем самым, установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи. Эффективность и точность метода продемонстрирована на наглядном примере. В дальнейшем предполагается применение метода параметризации к многоточечным краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнении с дробными производными.

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан. AP09259137

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach. Amsterdam, Warszawa,1973.
2. Wiener J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations. World Sci., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993.
3. Karapetyants N.K., Samko S.G. Equations with involution operators and their applications // Rostov-n / D. Publishing house of RSU -1988. 188 p.
4. Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Properties in Lp of root functions for a nonlocal problem with involution// Turk J Math. – 2019. - V.43. – P.393 - 401.

5. Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution// Differential Equation. -.2012. -Vol.48, No.8. -P.1112 - 1118.
6. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics. -1989. -Vol.29, No. 1.- P.34-46.
7. Dzhumabaev D.S. A method for solving a linear boundary value problem for an integro-differential equation // Jrn. Comp. Mat. and Mat. Phys., 2010. V. 50. No. 7. Pp. 1209-1221.
8. D. S. Dzhumabaev, “On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 294:2 (2016), 342-357
9. Dulat Dzhumabaev, “Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations”, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 41:4 (2018), 1439-1462

REFERENCES

10. Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach. Amsterdam, Warszawa,1973.
11. Wiener J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations. World Sci., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993.
12. Karapetyants N.K., Samko S.G. Equations with involution operators and their applications // Rostov-n / D. Publishing house of RSU -1988. 188 p.
13. Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Properties in Lp of root functions for a nonlocal problem with involution// Turk J Math. – 2019. - V.43. – P.393 - 401.
14. Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution// Differential Equation. -.2012. - Vol.48, No.8. -P.1112 - 1118.
15. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics. -1989. -Vol.29, No. 1.- P.34-46.
16. Dzhumabaev D.S. A method for solving a linear boundary value problem for an integro-differential equation // Jrn. Comp. Mat. and Mat. Phys., 2010. V. 50. No. 7. Pp. 1209-1221.
17. D. S. Dzhumabaev, “On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 294:2 (2016), 342-357
18. Dulat Dzhumabaev, “Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations”, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, 41:4 (2018), 1439-1462