*Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары (математика, физика, информатика сериясы), №3 (22), 2022*

**УДК 517.956.4**
**ГРНТИ 27.31.44**
https://doi.org/10.47526/2022-3/2524-0080.03

**М.Э. БАЛТАБАЕВА[1], Б.Х. ТУРМЕТОВ[2]**
*[1]магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Ясави*
*(Казахстан, Туркестан), E-mail: mastura.baltabayeva@ayu.edu.kz*
*[2]доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави*
*(Казахстан, Туркестан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

# ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ РОБЕНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КРУГЕ

**Аннотация.** В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости дробного аналога задачи Робена для уравнения Лапласа. В качестве граничного оператора рассматривается модифицированный оператор дробного дифференцирования в смысле Адамара. Краевые условия задаются в виде связи различных значений неизвестной функции в окружности. Задача решается с применением метода разложения Фурье. Для различных значений параметров участвующих в граничных операторов доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемой задачи.

**Ключевые слова:** задача Робена, дробный аналог, производная Адамара, инволютивное преобразование, единственность решения, существование решения.

**М.Э. Балтабаева[1], Б.Х. Турметов[2]**
*[1]Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты,*
*(Қазақстан, Түркістан), E-mail: mastura.baltabayeva@ayu.edu.kz*
*[2]физика-математика ғылымдарының докторы, профессор*
*Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті*
*(Қазақстан, Түркістан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

## Инволюциялы бөлшек ретті жылуөткізгіштік теңдеуі үшін кейбір бастапқы-шеттік есептердің шешімділігі туралы

**Аңдатпа.** Бұл жұмыста Лаплас теңдеуі үшін Робен есебінің бөлшек ретті аналогының шешімділігі мәселесі зерттелінеді. Шекаралық оператор ретінде Адамар мағнасындағы модификацияланған бөлшек ретті дифференциалдау операторы қарастырылады. Шеттік шарттар белгісіз функцияның шеңбердегі әртүрлі мәндерінің байланысы түрінде беріледі. Есеп Фурьенің ажырату әдісін қолдану арқылы шешіледі. Шекаралық операторларда қатысатын параметрлердің әртүрлі мәндері үшін қарастырылатын есептің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденеді.

**Кілт сөздер:** Робен есебі, бөлшек аналогы, Адамар туындысы, инволютивтік түрлендіру, шешімнің бірегейлігі, шешімнің бар болуы.

**M.E. Baltabaeva[1], B.Kh. Turmetov[2]**
*[1]master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University*
*(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: mastura.baltabayeva@ayu.edu.kz*
*[2]doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University*
*(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

## On a generalization of the robin problem for the Laplace equation in the circle

**Abstract.** In this paper, we study the solvability of the fractional analogue of the Robin problem for the Laplace equation. A modified fractional differentiation operator in the sense of Hadamard is considered as a boundary operator. Boundary conditions are given in the form of a connection between different values of the unknown function in a circle. The problem is solved using the Fourier expansion method. For various values of the parameters of the boundary operators involved, theorems on the existence and uniqueness of a solution to the problem under study are proved.

**Keywords:** Robin problem, fractional analog, Hadamard derivative, involutive transformation, uniqueness of solution, existence of solution.

### 1. Введение.

Введем следующие обозначения: $\Omega=\left\{x\in R^2:|x|<1\right\}, \partial\Omega=\left\{x\in R^2:|x|<1\right\}$, $r=|x|$, $\delta=r\dfrac{\partial}{\partial r}, \varphi=arctg\left(x_2/x_1\right)$. Далее, для любой гладкой функции $u(r,\varphi)$ рассмотрим операторы

$$J^{\alpha}\left[u\right](r,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^r\left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{u(s,\varphi)}{s}ds,(r,\varphi)\in\Omega,\alpha>0\\ J^0\left[u\right](r,\varphi)=u(r,\varphi),\alpha=0\end{cases},$$

и

$$D^{\alpha}\left[u\right](r,\varphi)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^r\left(\ln\frac{r}{s}\right)^{m-1-\alpha}\left(s\frac{d}{ds}\right)^m\left[u(s,\varphi)\right]\frac{ds}{s},\alpha\in(m-1,m],m\geq 1.$$

Эти операторы были введены в работе Ж.Адамара [1] и в настоящей время называются соответственно интегралом и производной порядка $\alpha$ в смысле Адамара. В дальнейшем введены различные обобщения операторов $J^{\alpha}$ и $D^{\alpha}$ (см. например, [2-4]). Заметим, что свойства и применение операторов $J^{\alpha}$ и $D^{\alpha}$ подробно описаны в работе [5]. Кроме того, к исследованию вопросов разрешимости краевых задач с производными Адамара обращены работы [6-9].

Приведем постановку задачи исследуемой в настоящей работе. С помощью отображений вида

$$S_0x=x, S_1x=\left(-x_1,x_2\right), S_2x=\left(x_1,-x_2\right), S_3x=\left(-x_1,-x_2\right)$$

для любой точки $x=(x_1,x_2)$ пространства $R^2$ сопоставим элементы того же пространства.

Эти отображения в полярной системе координат можно задать следующим образом:

$$S_1x=\left(r\cos(\pi-\varphi),r\sin(\pi-\varphi)\right), S_2x=\left(r\cos(\pi+\varphi),r\sin(\pi+\varphi)\right),$$

$$S_3x=\left(r\cos(2\pi-\varphi),r\sin(2\pi-\varphi)\right).$$

Рассматриваемые отображения обладают свойствами

$$S_j^2 x = x\,,\; S_j^2 x = x,\, j = 1,2,3, S_1 S_2 x = S_3 x, S_1 S_3 x = S_2 x, S_2 S_3 x = S_1 x\;.$$

Известно [10], что для уравнения Лапласа одной из корректно поставленной задачей является третья краевая задача (задача Робена), т.е. задача следующего вида

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega, a\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + bu(x) = g(x), x \in \partial\Omega\,,$$

где $\nu$ - вектор нормали к границе области $\Omega$, $a,b \in R$.

В настоящей работе мы рассмторич некоторое обобщение этой задачи для дробных значений граничных операторов.

Пусть $m-1 < \alpha \le m$ и $a_j,\, j = 0,1,2,3$ - действительные числа и $x^* = Sx$, где $S$ один из отображений $S_j,\, j = 1,2,3$. Введем оператор

$$l_a[u](r,\varphi) = a_0 D^\alpha u(x) + a_1 D^\alpha u(x^*) + a_2 u(x) + a_3 u(x^*)$$

и в области $\Omega$ рассмотрим следующую задачу

$$\Delta u\left(r,\varphi\right) = 0, \left(r,\varphi\right) \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$l_a[u]\left(r,\varphi\right)\big|_{r=1} = g\left(\varphi\right), -\pi \le \varphi \le \pi\;. \tag{1.2}$$

Решение этой задачи мы ищем в классе функций $u\left(r,\varphi\right) \in C^2\left(\Omega\right) \cap C\left(\bar{\Omega}\right)$, $D^\alpha\left[u\right](r,\varphi) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяющую условиям (1.1) и (1.2) в классической постановке.

По предположению $J^0\left[u\right](r,\varphi) = u(r,\varphi)$ и поэтому в случае значений $\alpha = 1$ получаем

$$D\left[u\right](r,\varphi)\big|_{r=1} = r\left.\frac{du(r,\varphi)}{dr}\right|_{r=1} = \left.\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \nu}\right|_{r=1}.$$

Тогда при $\alpha = 1, a_0 = 1, a_2 > 0, a_1 = a_3 = 0$, мы получаем классическую задачу Робена, которую мы привели выше.

Рассматриваемая нами задача относится к классу нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского [11], где краевые условия задачи задаются в виде связи значений искомой функции в различных точках границы. Отметим, что аналогичные задачи с отображениями типа инволюции исследовались в работах [12-14].

**2. Свойства интеграла и производной Адамара в классе гладких функций.**

Приведем некоторые известные свойства интеграла $J^\alpha$ и производной $D^\alpha$ доказанные в работе [5].

**Лемма 1**. Если $H_k^{(1)}(r,\varphi) = r^k \cos k\varphi, k = 0,1,...,$ и $H_k^{(2)}(r,\varphi) = r^k \sin k\varphi, k = 1,2,...,$ то имеют место равенства

$$J^{\alpha}\left[H_k^{(j)}\right](r,\varphi)=\frac{H_k^{(j)}(r,\varphi)}{k^{\alpha}},k>0,\ j=1,2, \tag{2.1}$$

$$D^{\alpha}\left[H_k^{(j)}\right](r,\varphi)=k^{\alpha}H_k^{(j)}(r,\varphi),k=0,1,...,\ j=1,2\ . \tag{2.2}$$

**Лемма 2**. Если функция $u(r,\varphi)$ в области $\Omega$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то

1) $D^{\alpha}\left[u\right](r,\varphi)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа в $\Omega$ и выполняется равенство $D^{\alpha}\left[u\right](0)=0$;

2) при выполнении условии $u(0)=0$ функция $J^{\alpha}\left[u\right](r,\varphi)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа в $\Omega$.

**Доказательство**. Пусть в точках области $\Omega$ для функции $u(r,\varphi)$ выполняется равенство $\Delta u(r,\varphi)=0$. Тогда, как известно из утверждении работы [15,стр. 330] она представима в виде ряда

$$u(r,\varphi)=u_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{k,1}H_k^{(1)}(r,\varphi)+u_{k,2}H_k^{(1)}(r,\varphi)\right), \tag{2.3}$$

где $u_0,u_{k,1}$ и $u_{k,2}$ коэффициенты разложения ряда (2.3). При этом ряд в правой части равенства (2.3) для всех $0\le r\le\rho<1,-\pi\le\varphi\le\pi$ сходится абсолютно и равномерно. Причем, если выполняется условие $u(0)=0$, то необходимо выполнение условия $\frac{u_0}{2}=0$.

Далее, если к равенству (2.3) с двух сторон применим оператор $J^{\alpha}$, то в силу равенства (2.1) получаем

$$J^{\alpha}[u](r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}\left(u_{k,1}H_k^{(1)}(r,\varphi)+u_{k,2}H_k^{(1)}(r,\varphi)\right).$$

Очевидно, что коэффициенты полученного ряда в правой части последнего равенства имеет такой же вид как и в представлении ряда (2.3). Так как $k^{-\alpha}\to 0$ при $k\to\infty$, то радиус сходимости этих двух рядов совпадают. Тогда сумма последнего ряда в области $\Omega$ будет удовлетворять уравнению Лапласа. Аналогично, для функции $D^{\alpha}\left[u\right](r,\varphi)$ получаем ряд

$$D^{\alpha}[u](r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{\alpha}r^{k}(u_{k,1}\cos k\varphi+u_{k,2}\sin k\varphi).$$

Сходимость этого ряда и то, что его сумма удовлетворяет уравнению Лапласа доказывается аналогичным образом, как и в первом случае. Лемма доказана.

Непосредственным применением отображений $S_jx,\ j=1,2,3$ и с учетом следующих элементарных равенств

$$\cos k(\pi-\varphi)=(-1)^k\cos k\varphi;\sin k(\pi-\varphi)=-(-1)^k\sin k\varphi;$$

$$\cos k(\pi+\varphi)=(-1)^k\cos k\varphi;\sin k(\pi+\varphi)=(-1)^k\sin k\varphi,$$

$$\cos k(2\pi-\varphi)=\cos k\varphi;\sin k(2\pi-\varphi)=-\sin k\varphi$$

доказывается следующее утверждение

**Лемма 3**. Пусть $H_k^{(1)}(r,\varphi)=r^k\cos k\varphi, k=0,1,\ldots,$ и $H_k^{(2)}(r,\varphi)=r^k\sin k\varphi, k=1,2,\ldots$. Тогда справедливы следующие равенства

$$H_k^{(1)}(S_1x)\equiv H_k^{(1)}(r,\pi-\varphi)=(-1)^k H_k^{(1)}(r,\varphi), \tag{2.4}$$

$$H_k^{(2)}(S_1x)\equiv H_k^{(2)}(r,\pi-\varphi)=-(-1)^k H_k^{(2)}(r,\varphi), \tag{2.5}$$

$$H_k^{(1)}(S_2x)\equiv H_k^{(1)}(r,\pi+\varphi)=(-1)^k H_k^{(1)}(r,\varphi), \tag{2.6}$$

$$H_k^{(2)}(S_2x)\equiv H_k^{(2)}(r,\pi+\varphi)=(-1)^k H_k^{(2)}(r,\varphi), \tag{2.7}$$

$$H_k^{(1)}(S_3x)\equiv H_k^{(1)}(r,2\pi-\varphi)=H_k^{(1)}(r,\varphi), \tag{2.8}$$

$$H_k^{(2)}(S_3x)\equiv H_k^{(2)}(r,2\pi-\varphi)=-H_k^{(2)}(r,\varphi). \tag{2.9}$$

### 3. О единственности решения основной задачи

Докажем единственность решения исследуемой задачи. Предположим, что $x^*=S_1x$ и пусть функция $u(r,\varphi)$ является решением соответствующей однородной задачи (1.1)-(1.2). Положим

$$v(r,\varphi)=a_0D^\alpha u(r,\varphi)+a_1D^\alpha u(r,\pi-\varphi)+a_2u(r,\varphi)+a_3u(r,\pi-\varphi). \tag{3.1}$$

то применяя к этой функции оператор Лапласа, с учетом уравнение (1.1) и первого утверждения леммы 2, получаем

Если воспользуемся уравнением (1.1) и первым утверждением леммы 2, то после применения оператора Лапласа к функции $v(r,\varphi)$ из равенства (3.1) следует

$$\Delta v(r,\varphi)=a_0\Delta D^\alpha u(r,\varphi)+a_1\Delta D^\alpha u(r,\pi-\varphi)+a_2\Delta u(r,\varphi)+a_3\Delta u(r,\pi-\varphi)=0,(r,\varphi)\in\Omega.$$

В добавок к этому равенству из граничного условия (1.2) при однородном граничном условии получаем равенство

$$v(r,\varphi)\big|_{r=1}=a_0D^\alpha u(r,\varphi)+a_1D^\alpha u(r,\pi-\varphi)+a_2u(r,\varphi)+a_3u(r,\pi-\varphi)\big|_{r=1}=0.$$

Итак, если $u(r,\varphi)$ является решением задачи (1.1)-(1.2) в однородном случае, то функция $v(r,\varphi)$ представимая в виде (3.1) будет удовлетворять условиям задачи Дирихле

$$\Delta v(r,\varphi)=0,(r,\varphi)\in\Omega;v(r,\varphi)\big|_{r=1}=0. \tag{3.2}$$

Так как решение задачи (3.2) единственно, то $v(r,\varphi)\equiv 0,(r,\varphi)\in\bar{\Omega}$. Следовательно,

$$a_0 D^\alpha u(r,\varphi)+a_1 D^\alpha u(r,\pi-\varphi)+a_2 u(r,\varphi)+a_3 u(r,\pi-\varphi)\equiv 0,(r,\varphi)\in\bar{\Omega}. \qquad (3.3)$$

Функция $u(r,\varphi)$ является решением уравнения Лапласа в области $\Omega$ и поэтому представима в виде ряда (2.3). Применим к этой функции оператор $l_a[u](r,\varphi)$. Тогда

$$l_a[u](r,\varphi)\equiv a_0 D^\alpha u(r,\varphi)+a_1 D^\alpha u(r,\pi-\varphi)+a_2 u(r,\varphi)+a_3 u(r,\pi-\varphi)=$$

$$=a_0\sum_{k=0}^{\infty}k^\alpha\left[u_{k,1}H_k^{(1)}(r,\varphi)+u_{k,2}H_k^{(2)}(r,\varphi)\right]+a_1\sum_{k=0}^{\infty}k^\alpha\left[u_{k,1}H_k^{(1)}(r,\pi-\varphi)+u_{k,2}H_k^{(2)}(r,\pi-\varphi)\right]+$$

$$+a_2\sum_{k=0}^{\infty}\left[u_{k,1}H_k^{(1)}(r,\varphi)+u_{k,2}H_k^{(2)}(r,\varphi)\right]+a_3\sum_{k=0}^{\infty}\left[u_{k,1}H_k^{(1)}(r,\pi-\varphi)+u_{k,2}H_k^{(2)}(r,\pi-\varphi)\right].$$

Используя свойства (2.4) - (2.9) функций $H_k^{(1)}(r,\varphi)$ и $H_k^{(2)}(r,\varphi)$, имеем

$$l_a[u](r,\varphi)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(a_0+(-1)^k a_1\right)k^\alpha+a_2+(-1)^k a_3\right]u_{k,1}H_k^{(1)}(r,\varphi)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_0-(-1)^k a_1\right)k^\alpha+a_2-(-1)^k a_3\right]u_{k,2}H_k^{(2)}(r,\varphi)=I_1+I_2.$$

Предполагая $a_0\pm a_1\neq 0$ и выделяя четные и нечетные индексы в каждой из сумм $I_1$ и $I_2$, получаем

$$I_1=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(a_0+(-1)^k a_1\right)k^\alpha+a_2+(-1)^k a_3\right]u_{k,1}H_k^{(1)}(r,\varphi)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(a_0+a_1\right)(2m)^\alpha+a_2+a_3\right]u_{2m,1}H_{2m}^{(1)}(r,\varphi)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(a_0-a_1\right)(2m-1)^\alpha+a_2-a_3\right]u_{2m-1,1}H_{2m-1}^{(1)}(r,\varphi)=$$

$$=\left(a_0+a_1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left[(2m)^\alpha+\frac{a_2+a_3}{a_0+a_1}\right]u_{2m,1}H_{2m}^{(1)}(r,\varphi)+$$

$$\left(a_0-a_1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left[(2m+1)^\alpha+\frac{a_2-a_3}{a_0-a_1}\right]u_{2m+1,1}H_{2m+1}^{(1)}(r,\varphi)=$$

$$=\left(a_0+a_1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left[(2m)^{\alpha}+A_{+}\right]u_{2m,1}H_{2m}^{(1)}(r,\varphi)+\left(a_0-a_1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left[(2m+1)^{\alpha}+A_{-}\right]u_{2m+1,1}H_{2m+1}^{(1)}(r,\varphi),$$

где обозначено

$$A_{+}=\frac{a_2+a_3}{a_0+a_1},\, A_{-}=\frac{a_2-a_3}{a_0-a_1}.$$

Аналогично,

$$I_2=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_0-(-1)^k a_1\right)k^{\alpha}+a_2-(-1)^k a_3\right]u_{k,2}H_k^{(2)}(r,\varphi)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(a_0+a_1\right)\left(2m-1\right)^{\alpha}+a_2+a_3\right]u_{2m-1,2}H_{2m-1}^{(2)}(r,\varphi)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(a_0-a_1\right)(2m)^{\alpha}+a_2-a_3\right]u_{2m,2}H_{2m}^{(2)}(r,\varphi)=$$

$$=\left(a_0+a_1\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(2m-1\right)^{\alpha}+\frac{a_2+a_3}{a_0+a_1}\right]u_{2m-1,2}H_{2m-1}^{(2)}(r,\varphi)+$$

$$+\left(a_0-a_1\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left[(2m)^{\alpha}+\frac{a_2-a_3}{a_0-a_1}\right]u_{2m,2}H_{2m}^{(2)}(r,\varphi)=$$

$$=\left(a_0+a_1\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(2m-1\right)^{\alpha}+A_{+}\right]u_{2m-1,2}H_{2m-1}^{(2)}(r,\varphi)+\left(a_0-a_1\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left[(2m)^{\alpha}+A_{-}\right]u_{2m,2}H_{2m}^{(2)}(r,\varphi).$$

Исследуем суммы $I_1$ и $I_2$. Так как $l_a[u](r,\varphi)\equiv 0,(r,\varphi)\in\bar{\Omega}$ и $a_0\pm a_1\neq 0$, то при $m\in N$ для $I_1$ и $I_2$ имеют место равенства:

а) для коэффициентов суммы $I_1$ имеем

$$\left[(2m)^{\alpha}+A_{+}\right]u_{2m,1}=0,\left[(2m+1)^{\alpha}+A_{-}\right]u_{2m+1,1}=0, m\geq 0. \tag{3.4}$$

б) для коэффициентов суммы $I_2$ имеем

$$\left[\left(2m-1\right)^{\alpha}+A_{+}\right]u_{2m-1,2}=0,\left[(2m)^{\alpha}+A_{-}\right]u_{2m,2}=0, m\geq 1. \tag{3.5}$$

Заметим, что по предположению $a_j\geq 0,\, j=0,1,2,3$. Тогда $A_{+}\geq 0$, а для $A_{-}$ возможны случаи $A_{-}\geq 0$ или $A_{-}<0$. Поэтому при исследовании единственности решения задачи (1.1) - (1.2) возможны только следующие случаи.

1) если $A_{+}>0, A_{-}>0$, то из равенств (3.4) и (3.5) следует $u_{k,1}=0, k\geq 0, u_{k,2}=0, k\geq 1$.

Тогда $u(r,\varphi)=0$ для всех $(r,\varphi)\in\Omega$ и по непрерывности $u(r,\varphi)=0$ для всех $(r,\varphi)\in\bar{\Omega}$.

2) если $A_+=0$ и $A_-=0$,т.е. $a_2=a_3=0$, то из равенств (3.4) и (3.5) следует

$$\begin{cases}(2m)^\alpha u_{2m,1}=0,(2m+1)^\alpha u_{2m+1,1}=0,m\ge 0\\ (2m)^\alpha u_{2m,2}=0,\left(2m-1\right)^\alpha u_{2m-1,2}=0,m\ge 1\end{cases}. \tag{3.6}$$

Решением системы (3.6) является $m=0$. Соответственно, в этом случае коэффициент $u_0$ может быть отличным от нуля. Следовательно, в случае $a_2=a_3=0$ функция $u(x)=Const$ будет решением однородной задачи (1.1) - (1.2).

3) если в формулах из (3.4) выполняются условия $A_+>0$ и коэффициент $A_-$ отлична от $-(2m-1)^\alpha$ или $-(2m)^\alpha, m\ge 1$, то при всех $k\ge 0$ имеем $k^\alpha+A_+>0$. Следовательно, в этом случае $u_{k,1}=0$ для всех $k\ge 0$. Для этих же $A_+$ и $A_-$ из формул (3.5) имеем $\left(2m-1\right)^\alpha+A_+>0, u_{2m-1,2}=0$, $(2m)^\alpha+A_->0, u_{2m,2}=0$, $m\ge 1$. Поэтому $u(r,\varphi)=0$ для всех $(r,\varphi)\in\bar{\Omega}$.

4) если для некоторого $k\ge 1$ имеет место равенство $k^\alpha+A_-=0$, т.е. $A_-=-k^\alpha$, то в формулах (3.4) или (3.5) соответствующие коэффициенты $u_{k,1}$ могут обращаться в 0. Следовательно, в этих случаях функции вида $u(r,\varphi)=H_k^{(j)}(r,\varphi), j=1,2$ будут решениями однородной задачи (1.1) - (1.2).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть в задаче (1.1)-(1.2) выполняются условия: $a_j\ge 0, j=0,1,2,3$, $a_0\ne a_1$, $A_+=\dfrac{a_2+a_3}{a_0+a_1}, A_-=\dfrac{a_2-a_3}{a_0-a_1}$ и $x^*=(-x_1,x_2)$. Тогда, если решение задачи (1.1)-(1.2) существует, то справедливы следующие утверждения:

1) в случае $a_2=a_3=0\left(A_+=A_-=0\right)$ решение задачи не единственное с точностью до постоянного слагаемого;

2) если $A_+>0$ и $A_-$ отлична от $-k^\alpha, k\ge 1$, то решение задачи единственно;

3) если для некоторого натурального числа $k=k_0\ge 1$ имеет место равенство $A_-=-k_0^\alpha$, то решение задачи единственно с точностью до функции вида $H_{k_0}^{(j)}(r,\varphi), j=1,2$.

## 4. О существовании решения основной задачи

Далее, переходим к исследованию существования решения основной задачи. Для этого сначала мы рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\Delta w(r,\varphi)=0,(r,\varphi)\in\Omega, D^\alpha w(1,\varphi)+cw(1,\varphi)=h(\varphi),-\pi<\varphi\le\pi\ . \tag{4.1}$$

В работе [15] доказано следующее утверждение.

**Лемма 4**. Пусть $c\ge 0$ и функция $h(\varphi)$ является периодической и непрерывной на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тогда справедливы следующие утверждения

1) если $c>0$, то существует единственно решение задачи (4.1);

2) если $c=0$, то задача (4.1) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется

условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)d\theta = 0 . \tag{4.2}$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательства этого утверждения проводится сведением исследуемой задачи к интегральному уравнению Фредгольма.

Исследуем задачу (4.1) в случае $c<0$. Предположим, что $w(x)$ является решением задачи (4.1) и $z(x)=D^{\alpha}w(x)$. Тогда для функции $z(x)$ получаем задачу

$$\Delta z(x) = 0, x \in \Omega, \tag{4.3}$$

$$z(x) + cJ^{\alpha}[z](x) = h(x), x \in \partial\Omega , \tag{4.4}$$

$$z(0) = 0 . \tag{4.5}$$

Сначала исследуем единственность решения задачи (4.3) - (4.5).

**Лемма 5**. Пусть $c<0$ и решение задачи существует. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $c<0$ и $c \neq -k^{-\alpha}, k \geq 1$, то решение задачи единственно;

2) если для некоторого $k=k_0$ имеет место неравенство $c \neq -k_0^{-\alpha}, k_0 \geq 1$, то функции $H_k^{(1)}(r,\varphi)$ и $H_k^{(2)}(r,\varphi)$ будут решениями однородной задачи.

**Доказательство**. Пусть $h(x)=0$. Если $z(x)$ гармоническая функция, то функции $z(x)$ и $J^{\alpha}[z](x)$ также являются гармоническими в $\Omega$. Следовательно, функция $z(x)+cJ^{\alpha}[z](x)$ является гармонической и удовлетворяет однородному условию Дирихле. В силу единственности решения задачи Дирихле имеем, $z(x)+cJ^{\alpha}[z](x) \equiv 0, x \in \bar{\Omega}$. Представим функцию $z(x)$ в виде ряда

$$z(r,\varphi) = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(z_{k,1}H_k^{(1)}(r,\varphi) + z_{k,2}H_k^{(2)}(r,\varphi)\right), \tag{4.6}$$

Заметим, что если выполняется условие (4.5), то необходимо выполнение равенства $z_0=0$. Тогда к ряду (4.6) можно применит оператор $J^{\alpha}$. Действуя этим оператором к ряду (4.6) имеем,

$$J^{\alpha}[z](r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\left(z_{k,1}H_k^{(1)}(r,\varphi) + z_{k,2}H_k^{(1)}(r,\varphi)\right).$$

Следовательно,

$$z(r,\varphi) + cJ^{\alpha}[z](r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{-\alpha}+c\right)\left(z_{k,1}H_k^{(1)}(r,\varphi) + z_{k,2}H_k^{(1)}(r,\varphi)\right) \equiv 0, (r,\varphi) \in \Omega .$$

Возможны всего два случая:

1) если $c<0$ и $c \neq -k^{-\alpha}, k \geq 1$, то $z_{k,1} = z_{k,2} = 0$ для всех $k \geq 1$ и тогда $z(r,\varphi) \equiv 0, (r,\varphi) \in \bar{\Omega}$

2) если для некоторого $k = k_0$ и $c \neq -k_0^{-\alpha}, k_0 \geq 1$, то коэффициенты $z_{k_0,1}$ и $z_{k_0,2}$ могут не обращаться в нуль для всех $k \geq 1$ и тогда функции $H_{k_0}^{(1)}(r,\varphi)$ и $H_{k_0}^{(2)}(r,\varphi)$ будут решениями однородной задачи (4.3) - (4.5). Лемма доказана.

Далее, исследуем существования решения (4.3) - (4.5). Пусть $h(x)$ непрерывная функция и

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{1-|x|^2}{|x-y|^2} - 1 \right] \mu(y) dS_y,$$

где $\mu(y)$ - неизвестная функция. Очевидно, что для функции $v(x)$ выполняется условие $v(0)=0$, $v(x)\big|_{\partial\Omega} = \mu(x)$ и она является гармонической в $\Omega$. Тогда можно рассмотреть функцию $z(x) = J^{\alpha}[v](x)$. Функция $z(x)$ удовлетворяет условиям (4.3) и (4.5). Подставляя функцию $z(x) = J^{\alpha}[v](x)$ в условие (4.4), имеем

$$z(x) + cJ^{\alpha}[v](x)\big|_{\partial\Omega} = \mu(x) + c\int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \ln\frac{1}{\tau} \right)^{\alpha-1} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1-|\tau x|^2}{|\tau x - y|^2} - 1 \right) \mu(y) dS_y \right] \frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \mu(x) + c\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \ln\frac{1}{\tau} \right)^{\alpha-1} \left[ \int_{\partial\Omega} \left( \frac{1-\tau^2}{|\tau x - y|^2} - 1 \right) \right] \frac{d\tau}{\tau} \mu(y) dS_y =$$

$$= \mu(x) + c\int_{\partial\Omega} P_{\alpha}(x,y) \mu(y) dS_y = h(x)$$

где функция $P_{\alpha}(x,y)$ определяется равенством

$$P_{\alpha}(x,y) = \frac{1}{\pi\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left( \ln\frac{1}{\tau} \right)^{\alpha-1} \left[ \frac{1-\tau^2}{|\tau x - y|^2} - 1 \right] \frac{d\tau}{\tau}.$$

Таким образом, относительно неизвестной функции $\mu(y)$ мы получили интегральное уравнение

$$\mu(x) + c\int_{\partial\Omega} P_{\alpha}(x,y) \mu(y) dS_y = h(x). \tag{4.7}$$

Если $x, y \in \partial\Omega$, то для $|\tau x - y|^2$ имеем

$$|\tau x - y|^2 = |\tau x|^2 - 2(\tau x, y) + |y|^2 = |\tau|^2 - 2(x, \tau y) + 1 = |\tau y|^2 - 2(\tau y, x) + |x|^2 = |\tau y - x|^2.$$

Отсюда получаем, что функция $P_\alpha(x,y)$ симметрична по $x$ и $y$, т.е. ядро интегрального уравнения (4.7) является симметричным. В работе [9] доказано, что $P_\alpha(x,y)$ при $x,y\in\partial\Omega$ обладает свойством полярного ядра. Тогда для интегрального уравнения (4.7) справедливы альтернативы Фредгольма. Так как при выполнение условии 1) леммы 5 однородная задача соответствующая к (4.7) имеет только нулевое решение, то соответствующее союзное однородное интегральное уравнение также имеет только нулевое решение. Тогда в силу теоремы Фредгольма для любого $h(x)\in C(\partial\Omega)$ решение интегрального уравнения (4.7) существует, единственно и принадлежит классу $C(\partial\Omega)$. Если выполняется условии 2) леммы 5, то однородная задача, соответствующая к (4.7) имеет не нулевые решения, а именно функции вида $H_{k_0}^{(1)}(r,\varphi)$ и $H_{k_0}^{(2)}(r,\varphi)$. Тогда в силу теоремы Фредгольма для существования решения неоднородного уравнения (4.7) необходимо и достаточно выполнения условия ортогональности

$$\int_{\partial\Omega} h(x)H_{k_0}^{(j)}(x)dS_y = 0,\ j=1,2\,.$$

Сформулируем основное утверждение относительно задачи (1.1)-(1.2).

**Теорема 2.** Пусть в задаче (1.1)-(1.2) $g(\varphi)$ непрерывная, $2\pi$ периодическая функция, $x^*=Sx$, где $S$ один из отображений $S_j,\ j=1,2,3$, коэффициенты $a_j$, удовлетворяют условиям $a_j\ge 0,\ j=0,1,2,3$, $a_0\ne a_1$ и $A_+=\dfrac{a_2+a_3}{a_0+a_1}, A_-=\dfrac{a_2-a_3}{a_0-a_1}$. Тогда

1) если $a_2=a_3=0\left(A_+=A_-=0\right)$, то для разрешимости задачи (1.1)-(1.2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)d\varphi = 0\,. \tag{4.8}$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого;

2) если $A_+>0$ и $A_-$ отлична от $-k^\alpha, k\ge 1$, то решение задачи существует и единственно;

3) если для некоторого $k=k_0\ge 1$ имеет место равенство $A_-=-k_0^\alpha$, то для разрешимости задачи (1.1)-(1.2) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)H_{k_0}^{(j)}(r,\varphi)d\varphi = 0,\ j=1,2\,.$$

Решении задачи будет единственным с точностью до функции вида $H_{k_0}^{(j)}(r,\varphi),\ j=1,2$.

**Доказательство**. Пусть $x^*=S_1x$ и $u(r,\varphi)$ - решение задачи (1.1) - (1.2). Обозначим

$$v(r,\varphi)=a_0D^\alpha u(r,\varphi)+a_1D^\alpha u(r,\pi-\varphi)+a_2u(r,\varphi)+a_3u(r,\pi-\varphi)\,. \tag{4.9}$$

Легко показать, что функция $v(r,\varphi)$ будет решением следующей задачи Дирихле

$$\Delta v(r,\varphi)=0,(r,\varphi)\in\Omega, v(1,\varphi)=g(\varphi),-\pi<\varphi\le\pi \quad . \qquad (4.10)$$

Для любого $g(\varphi)\in C[-\pi,\pi]$ решение задачи (4.10) существует и единственно. Из равенства (4.9) после замены точек $(r,\varphi)$ на $(r,\pi-\varphi)$ следует

$$v(r,\pi-\varphi)=a_0D^\alpha u(r,\pi-\varphi)+a_1D^\alpha u(r,\varphi)+a_2u(r,\pi-\varphi)+a_3u(r,\varphi). \qquad (4.11)$$

Отсюда

$$v(r,\varphi)+v(r,\pi-\varphi)=a_0D^\alpha\left[u(r,\varphi)+u(r,\pi-\varphi)\right]+a_1D^\alpha\left[u(r,\varphi)+u(r,\pi-\varphi)\right]+$$

$$+a_2\left[u(r,\varphi)+u(r,\pi-\varphi)\right]+a_3\left[u(r,\varphi)+u(r,\pi-\varphi)\right]=$$

$$=\left(a_0+a_1\right)D^\alpha\left[u(r,\varphi)+u(r,\pi-\varphi)\right]+\left(a_2+a_3\right)\left[u(r,\varphi)+u(r,\pi-\varphi)\right].$$

Если обозначим $u^+(r,\varphi)=u(r,\varphi)+u(r,\pi-\varphi)$, то для этой функции получаем задачу

$$\Delta u^+(r,\varphi)=0,(r,\varphi)\in\Omega, D^\alpha u^+(1,\varphi)+A_+u^+(1,\varphi)=g^+(\varphi),-\pi<\varphi\le\pi, \qquad (4.12)$$

где $g^+(\varphi)=\dfrac{1}{a_0+a_1}\left[g(\varphi)+g(\pi-\varphi)\right]$.

Аналогично, для $v(r,\varphi)-v(r,\pi-\varphi)$ имеем

$$v(r,\varphi)-v(r,\pi-\varphi)=\left(a_0-a_1\right)D^\alpha\left[u(r,\varphi)-u(r,\pi-\varphi)\right]+\left(a_2-a_3\right)\left[u(r,\varphi)-u(r,\pi-\varphi)\right]$$

Тогда для функции $u^-(r,\varphi)=u(r,\varphi)-u(r,\pi-\varphi)$ получаем задачу

$$\Delta u^-(r,\varphi)=0,(r,\varphi)\in\Omega, D^\alpha u^-(1,\varphi)+A_-u^-(1,\varphi)=g^-(\varphi),-\pi<\varphi\le\pi, \qquad (4.13)$$

где

$$g^-(\varphi)=\frac{1}{a_0-a_1}\left[g(\varphi)-g(\pi-\varphi)\right], a_0-a_1\ne0.$$

Итак, мы показали, что функции $u^+(r,\varphi)$ и $u^-(r,\varphi)$ удовлетворяют условиям задачи (4.1) с постоянной $c=A_+$ и $c=A_-$. Если $A_+=A_-=0$, то по утверждению леммы 4 для разрешимости задач (4.12) и (4.13) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{-\pi}^{\pi}g^+(\varphi)d\varphi=0, \int_{-\pi}^{\pi}g^-(\varphi)d\varphi=0.$$

Имеет место равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\pi-\varphi)d\varphi = \int_{-\pi}^{0} g(\pi-\varphi)d\varphi + \int_{0}^{\pi} g(\pi-\varphi)d\varphi .$$

Так как $g(\varphi)$ периодическая функция, то для первого интеграла в последнем выражении имеем

$$\int_{-\pi}^{0} g(\pi-\varphi)d\varphi = \int_{-2\pi}^{-\pi} g(-\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{0} g(\varphi+2\pi)d\varphi = \int_{-\pi}^{0} g(\varphi)d\varphi$$

А для второго интеграла получаем

$$\int_{0}^{\pi} g(\pi-\varphi)d\varphi = \int_{0}^{\pi} g(\theta)d\theta .$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{-}(\varphi)d\varphi = \frac{1}{a_0-a_1}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(\varphi)-g(\pi-\varphi)\right]d\varphi = \frac{1}{a_0-a_1}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(\varphi)-g(\varphi)\right]d\varphi = 0 .$$

Значит, условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{-}(\varphi)d\varphi = 0$$

всегда выполняется. А условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{+}(\varphi)d\varphi = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)d\varphi = 0 .$$

Таким образом, если $A_{+} = 0$, то решение задачи (4.12) существует тогда и только тогда, когда выполняется условие (4.8). Если $A_{-} = 0$, то решение задачи (4.13) существует для любой функции $g(\varphi)$. Так как $u(r,\varphi) = \frac{1}{2}\left[u^{+}(r,\varphi)+u^{-}(r,\varphi)\right]$, то при выполнении условии (4.8) решение задачи (1.1) - (1.2) существует.

Если $A_{+} > 0$ и $A_{-} < 0$ и $A_{-} \neq -k^{-\alpha}$, то из утверждений лемм 4 и 5 следует, что решение задач (4.12) и (4.13) существует для любой непрерывной функции $g(\varphi)$.

Если $A_{-} < 0$ и для некоторого $k = k_0$ выполняется равенство $A_{-} = -k_0^{-\alpha}$, то из утверждении леммы 5 следует, что решение задачи (4.13) существует тогда и только тогда когда выполняется условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{-}(\varphi)H_{k_0}^{(j)}(r,\varphi)d\varphi = 0,\ j=1,2\,.$$

Исследуем это условие для случая $j=1$. Используя представление функции $g^{-}(\varphi)$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{-}(\varphi)H_{k_0}^{(1)}(r,\varphi)d\varphi = \frac{r^{k_0}}{a_0-a_1}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(\varphi)-g(\pi-\varphi)\right]\cos k_0\varphi d\varphi\,.$$

Далее,

$$\int_{-\pi}^{0} g(\pi-\varphi)\cos k_0\varphi d\varphi = \int_{-2\pi}^{-\pi} g(-\theta)\cos k_0\left(\pi+\theta\right)d\theta = \int_{-\pi}^{0} g(\varphi+2\pi)\cos k_0\left(\pi-\varphi-2\pi\right)d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} g(\varphi)\cos k_0\left(\pi-\varphi\right)d\varphi = (-1)^{k_0}\int_{-\pi}^{0} g(\varphi)\cos k_0\varphi d\varphi\,,$$

$$\int_{0}^{\pi} g(\pi-\varphi)\cos k_0\varphi d\varphi = \int_{0}^{\pi} g(\theta)\cos k_0(\pi-\theta)d\theta = (-1)^{k_0}\int_{0}^{\pi} g(\theta)\cos k_0\theta d\theta$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(\varphi)-g(\pi-\varphi)\right]\cos k_0\varphi d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\cos k_0\varphi d\varphi - (-1)^{k_0}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\cos k_0\varphi d\varphi =$$

$$=\left(1-(-1)^{k_0}\right)\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\cos k_0\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, k_0 = 2m \\ 2\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\cos k_0\varphi d\varphi, k_0 = 2m \end{cases}.$$

Аналогично,

$$\int_{-\pi}^{0} g(\pi-\varphi)\sin k_0\varphi d\varphi = \int_{-2\pi}^{-\pi} g(-\theta)\sin k_0\left(\pi+\theta\right)d\theta = \int_{-\pi}^{0} g(\varphi+2\pi)\sin k_0\left(\pi-\varphi-2\pi\right)d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} g(\varphi)\sin k_0\left(\pi-\varphi\right)d\varphi = -(-1)^{k_0}\int_{-\pi}^{0} g(\varphi)\sin k_0\varphi d\varphi\,,$$

$$\int_{0}^{\pi} g(\pi-\varphi)\sin k_0\varphi d\varphi = \int_{0}^{\pi} g(\theta)\sin k_0(\pi-\theta)d\theta = -(-1)^{k_0}\int_{0}^{\pi} g(\theta)\sin k_0\theta d\theta$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(\varphi)-g(\pi-\varphi)\right]\sin k_0\varphi d\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}g(\varphi)\sin k_0\varphi d\varphi+(-1)^{k_0}\int_{-\pi}^{\pi}g(\varphi)\sin k_0\varphi d\varphi=$$

$$=\left(1+(-1)^{k_0}\right)\int_{-\pi}^{\pi}g(\varphi)\sin k_0\varphi d\varphi=\begin{cases}0, k_0=2m-1\\ 2\int_{-\pi}^{\pi}g(\varphi)\sin k_0\varphi d\varphi, k_0=2m\end{cases}.$$

Таким образом, если выполняются условия 3) Теоремы, то решение задачи существует. Для остальных отображений $x^*=S_j x, j=2,3$ задача исследуется аналогичным образом. Теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы 2 в случае $\alpha=1$ совпадает с результатами работы [16].

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP09259074 ).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard J. Essai sur létude des fonctions données par leur développement de Taylor // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1892. – Vol. 8. – P. 101 – 186.

2. Butzer P.L. , Kilbas A.A., Trujillo J.J. Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – Vol.269. – P.387-400.

3. Jarad F., Baleanu D., Abdeljawad A. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives // Advances in Difference Equations. – 2012. – Vol.2012, No.142. – P.1 – 8.

4. Kilbas A.A. Hadamard-type fractional calculus // Journal of the Korean Mathematical Society. – 2001. – Vol.38. – P.1191 – 1204 .

5. Kilbas A.A., Srivastava H.M, Trujillo J.J.Theory and applications of fractional differential equations.Elsevier, Amsterdam, 2006.

6. Arioua Y., Benhamidouche N. Boundary value problem for Caputo-Hadamard fractional differential equations //Surveys in Mathematics and its Applications. – 2017. – Vol.12. – P.103 – 115.

7. Boutiara A., Benbachir M., Guerbati K. Boundary value problem for nonlinear Caputo-Hadamard fractional differential equation with Hadamard fractional integral and anti-periodic conditions // Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics. – 2021. – Vol. 36, No. 4. – P.735 – 748.

8.Turmetov B.Kh. On the solvability of some boundary value problems for the inhomogeneous polyharmonic equation with boundary operators of the Hadamard type // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. P. 333–344.

9.Turmetov B.Kh., Koshanova M., Usmanov K. About solvability of some boundary value problems for Poisson equation in the ball conditions // Filomat . – 2018. –V. 32, No.3. – P. 939-946.

10. Evans LC. Partial differential equations. Vol. 19, Graduate studies in mathematics. Providence(RI): American Mathematical Society; 1998. 668 p.

11. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. – 1969. – Т.185, № 4. – С.739 – 740.

12. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentat. Math. – 1974. – V.17. – P.451 – 457.

13. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the

Poisson equation // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2020. – V. 50, No. 1. – P. 67 – 88.

14. Turmetov B. Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2022. – P. 1 – 15.

15. Turmetov B.Kh., Nazarova K.Dz. On a generalization of the Neumann problem for the Laplace equation// Mathematische Nachrichten. – 2020. – V. 293,No. 1. – P.169 – 177.

16. Turmetov B.Kh Generalization of the Robin Problem for the Laplace Equation // Differential equations. – 2019.– V.55, № 9. – P. 1134 – 1142.

**REFERENCES**

1. Hadamard J. Essai sur létude des fonctions données par leur développement de Taylor // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1892. – Vol. 8. – P. 101 – 186.

2. Butzer P.L. , Kilbas A.A., Trujillo J.J. Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – Vol.269. – P.387-400.

3. Jarad F., Baleanu D., Abdeljawad A. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives // Advances in Difference Equations. – 2012. – Vol.2012, No.142. – P.1 – 8.

4. Kilbas A.A. Hadamard-type fractional calculus // Journal of the Korean Mathematical Society. – 2001. – Vol.38. – P.1191 – 1204 .

5. Kilbas A.A., Srivastava H.M, Trujillo J.J.Theory and applications of fractional differential equations.Elsevier, Amsterdam, 2006.

6. Arioua Y., Benhamidouche N. Boundary value problem for Caputo-Hadamard fractional differential equations //Surveys in Mathematics and its Applications. – 2017. – Vol.12. – P.103 – 115.

7. Boutiara A., Benbachir M., Guerbati K. Boundary value problem for nonlinear Caputo-Hadamard fractional differential equation with Hadamard fractional integral and anti-periodic conditions // Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics. – 2021. – Vol. 36, No. 4. – P.735 – 748.

8.Turmetov B.Kh. On the solvability of some boundary value problems for the inhomogeneous polyharmonic equation with boundary operators of the Hadamard type // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. P. 333–344.

9.Turmetov B.Kh., Koshanova M., Usmanov K. About solvability of some boundary value problems for Poisson equation in the ball conditions // Filomat . – 2018. –V. 32, No.3. – P. 939-946.

10. Evans LC. Partial differential equations. Vol. 19, Graduate studies in mathematics. Providence(RI): American Mathematical Society; 1998. 668 p.

11. Bisadze A.V., Samarskii A.A. O nekotoryh prosteishih obobsheniah lineinyh ellipticheskih kraevyh zadach [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary value problems] // Doklady AN SSSR. – 1969. – T.185, № 4. – C.739 – 740.

12. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentat. Math. – 1974. – V.17. – P.451 – 457.

13. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2020. – V. 50, No. 1. – P. 67 – 88.

14. Turmetov B. Kh., Karachik V.V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2022. – P. 1 – 15.

15. Turmetov B.Kh., Nazarova K.Dz. On a generalization of the Neumann problem for the Laplace equation// Mathematische Nachrichten. – 2020. – V. 293,No. 1. – P.169 – 177.

16. Turmetov B.Kh Generalization of the Robin Problem for the Laplace Equation // Differential equations. – 2019.– V.55, № 9. – P. 1134 – 1142