УДК 517.956.4
ГРНТИ 27.31.44
https://doi.org/10.47526/2022-3/2524-0080.02

Х.А. МУРАТОВ[1], Б.Х. ТУРМЕТОВ[2]
[1]*магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжа Ахмета Ясави*
(Казахстан, Туркестан), E-mail: 87078220202h@gmail.com
[2]*доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави*
(Казахстан, Туркестан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

О СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Аннотация. В данной работе рассматриваются новые классы дифференциальных уравнений дробного порядка, связанные с производными Адамара. Эти уравнения обобщают известное уравнение теплопроводности для дробного показателя производной по времени. Для рассматриваемых уравнений изучены смешанные задачи с краевыми условиями Дирихле и Неймана. Для решения этих задач применяется метод Фурье. Получены две вспомогательные задачи относительно обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка и обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией. Изучены спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией. Для основных задач доказаны теоремы о существовании и единственности решений.

Ключевые слова: смешанная задача, дробная производная, инволюция, оператор Адамара, нелокальное уравнение, уравнение теплопроводности, условие Дирихле, условие Неймана.

Х.А. Муратов[1], Б.Х. Турметов[2]
[1]*Қожа Ахмет атындағы халықаралық қазақ-түрік университетінің магистранты, (Қазақстан, Туркістан)E-mail: 87078220202h@gmail.com*
[2]*физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті*
(Қазақстан, Туркістан)E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Инволюциялы бөлшек ретті теңдеуі үшін аралас есептер туралы

Аңдатпа. Бұл жұмыста бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің Адамар туындысымен байланысты жаңа кластары қарастырылады. Бұл теңдеулер әйгілі жылуөткізгіштік теңдеуінің уақыт бойынша туындының бөлшек көрсеткіштеріне жалпыламасы болып табылады. Қарастырылатын теңдеулер үшін Дирихле және Нейман шеттік шарттарымен берілген аралас есептер зерттелінген. Бұл есептерді шешу үшін Фурье әдісі қолданылады. Бөлшек ретті жай дифференциалдық теңдеулер және инволюциялы жай дифференциалдық теңдеулерге қатысты екі көмекші есептер алынған. Инволюциялы жай дифференциалдық операторлардың спектрлік қасиеттері зерттелінеді. Негізгі есептер үшін шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденген.

Кілт сөздер: аралас есеп, бөлшек туынды, инволюция, бейлокал теңдеу, Адамар операторы, жылу өткізгіштік теңдеуі, Дирихле шарты, Нейман шарты.

Kh.A. Muratov[1], B.Kh. Turmetov[2]
[1]*master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University*
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: 87078220202h@gmail.com

[2]*doctor of physical and mathematical sciences, professor*
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
(Kazakhstan, Turkistan), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

On mixed problems for a class of fractional order equations with involution

Abstract. In this paper, we consider new classes of differential equations of fractional order related to Hadamard derivatives. These equations generalize the well-known heat conduction equation for the fractional exponent of the time derivative. For the equations under consideration, mixed problems with Dirichlet and Neumann boundary conditions are studied. The Fourier method is used to solve these problems. Two auxiliary problems are obtained for ordinary differential equations of fractional order and ordinary differential equations with involution. The spectral properties of ordinary differential operators with involution are studied. For the main problems, theorems on the existence and uniqueness of solutions are proved.

Keywords: mixed task,fractional derivative,involution, nonlocal equation, Hadamard operator, heat conduction equation, Dirichlet condition, the Neumann condition.

Введение

Обозначим $Q=\{(t,x):0<t<T,0<x<p\}$, где p,T положительные действительные числа. Известно, что для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},(t,x)\in Q$$

основными начально-краевыми задачами являются задачи с граничными условиями Дирихле, Неймана и Робена. Все эти задачи считаются классическими и подробно описаны в учебниках по уравнениям математической физики (см.например, [1-3]).

Данная работа посвящена к исследованию смешанной задачи для уравнения дробного порядка с производными Адамара. Рассматриваемое нами уравнение является нелокальным обобщением уравнения теплопроводности включающий дробные значения производной по времени и является некоторым аналогом уравнений субдиффузии.

В дальнейшем для $\alpha\in(m-1,m], m=1,2,...$ мы положим

$$D^{\alpha}y(t)=J^{\alpha}\left[\delta^m y\right]\equiv\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-m-1}\delta^m y(\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

где $\delta=t\dfrac{d}{dt}$ и $\delta^k=\delta\cdot\delta^{k-1},k\geq 1$, J^{α} - оператор интегрирования порядка $\alpha>0$ в смысле Адамара [4,5].

Для значений параметров $\alpha\in(0,1]$ и $\beta>0$ рассмотрим в Q следующее уравнение

$$t^{-\beta}D_t^{\alpha}u(t,x)=a_0\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+a_1\frac{\partial^2 u(t,p-x)}{\partial x^2},(t,x)\in Q, \quad (1)$$

где a_0,a_1 некоторые действительные числа.

Если $\alpha=1,\beta=1$, то $t^{-1}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)u(t,x)=\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$. Поэтому когда $a_0=1,a_1=0$ мы получаем классическое параболическое уравнение, а в случае $\alpha=1,a_j\neq 0,\ j=0,1$ получается нелокальный аналог уравнения параболического типа. Следовательно, в общем случае уравнение (1) является дробным аналогом нелокального параболического уравнения.

В дальнейшем в исследуемых задачах мы находим регулярное решение, а именно функцию $u(t,x)$ из класса $C\left(\bar{Q}\right)$, обладающее свойством $t^{-\beta}D_t^{\alpha}u(t,x),\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\in C\left(Q\right)$ и удовлетворяющее в области Q уравнению (1) в классическом смысле.

Основными задачами данной работы являются:

Задача D. Для уравнения (1) необходимо найти регулярное решение, удовлетворяющее условия

$$u(0,x)=\varphi(x),0\le x\le p\,, \tag{2}$$

$$u(t,0)=u(t,p)=0,0\le t\le T\,, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ - некоторые заданные функции.

Задача N. Для уравнения (1) необходимо найти регулярное решение, для которой $u_x(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$, удовлетворяющее начальному условию (2) и краевым условиям

$$u_x(t,0)=u_x(t,p)=0,0\le t\le T\,. \tag{4}$$

Отметим, что смешанные задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка с производными Капуто, Римана-Лиувилля, Хильфера, а также Джрбашяна-Нерсесяна исследовались в работах [6-9]. Эти задачи для уравнению с производными Адамара в указанных постановках исследуются впервые.

При исследовании задач D и N используются метод разделение переменных. Применяя этот метод, для одномерных дифференциальных уравнений второго порядка с инволюцией мы получаем соответствующие спектральные задачи с условиями Дирихле и Неймана. Доказывается, что собственные функции этих задач совпадают с собственными функциями для классических задач. А соответствующие собственные значения зависят от коэффициентов участвующих в уравнении (1). Кроме того, по временной переменной получаем одномерную задачу типа Коши. Решение этой задачи представляется с помощью специальной функции Роя. Далее, используя полноту систем собственных функций вспомогательных задач, мы получаем явное представление решений исследуемых основных задач.

Методы исследования

Спектральные задачи. В этом разделе мы исследуем некоторые спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией.

Пусть $X_{D,n}(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right),\mu_n=\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2,n\in N$. Известно [10], что $X_n(x)$ является полной ортонормированной системой в пространстве $L_2\left(0,p\right)$ и удовлетворяют условиям следующей спектральной задачи

$$-X''(x)=\mu X(x),0<x<p,X(0)=X(p)=0\,.$$

Так как для $X_{D,n}(x)$ при всех $0 < x < p, n \in N$ справедливы равенства

$$X_{D,n}(p-x) = (-1)^{n+1} X_{D,n}(x),$$

то

$$a_0 X''_{D,n}(x) + a_1 X''_{D,n}(p-x) = -\left(a_0 + a_1(-1)^{n+1}\right)\mu_n X_{D,n}(x).$$

Если обозначим $\lambda_{D,n} = \left(a_0 + a_1(-1)^{n+1}\right)\mu_n, n \in N$, то для системы $X_{D,n}(x)$ имеем

$$a_0 X''_{D,n}(x) + a_1 X''_{D,n}(p-x) = -\lambda_{D,n} X_{D,n}(x).$$

Таким образом, система $X_{D,n}(x)$ являются собственными функциями, а $\lambda_{D,n}$ соответствующими собственными значениями спектральной задачи

$$a_0 X''(x) + a_1 X''(-x) = -\lambda X(x), 0 < x < p, \tag{5}$$

$$X(0) = X(p) = 0. \tag{6}$$

Так как $X_n(x)$ является полной системой, то задача (5) -(6) других собственных функций не имеет.

Аналогично рассмотрим функции $X_{N,k}(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi x}{p}, k = 0,1,...$. Так как

$$X'_{N,k}(x) = -\frac{k\pi}{p}\sin\frac{k\pi x}{p},$$

то очевидно, что $X'_{N,k}(0) = X'_{N,k}(p) = 0$. Кроме того,

$$X''_{N,k}(x) = -\left(\frac{k\pi x}{p}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi x}{p} \equiv -\left(\frac{k\pi x}{p}\right)^2 X_{N,k}(x).$$

и

$$X_{N,k}(p-x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi(p-x)}{p} = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{k\pi x}{p} = (-1)^k X_{N,k}(x).$$

Таким образом, элементы системы $\left\{X_{N,k}(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$ являются собственными функциями, а $\lambda_{N,k} = \left(a_0 + (-1)^k a_1\right)\left(\frac{k\pi x}{p}\right)^2$ соответствующими собственными значениями спектральной задачи

$$a_0 X''(x) + a_1 X''(-x) = -\lambda X(x), 0 < x < p,\ X'(0) = X'(p) = 0.$$

Система $\left\{X_{N,k}(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$ является полной и ортонормированной в пространстве $L_2\left(0, p\right)$. Для $a_0 + a_1(-1)^{n+1}$ справедливы равенства

$$a_0 + a_1(-1)^{n+1} = \begin{cases} a_0 + a_1, n = 2m-1 \\ a_0 - a_1, n = 2m \end{cases}.$$

Введем обозначение $\varepsilon_1 = a_0 + a_1, \varepsilon_2 = a_0 - a_1$. В дальнейшем будем считать их положительными числами, т.е. $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Исследование основных задач

Исследуем задачу D. Если $u(t,x)$ является решением задачи D, то по определению $u(t,x) \in C\left(\bar{Q}\right)$ и, следовательно, $u(t,x) \in L_2\left(Q\right)$. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ функция $u(t,x)$ является элементом пространства $L_2\left(0, p\right)$. Следовательно, функцию $u(t,x)$ можно представить в виде ряда по системе $X_{D,k}(x)$, а именно

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_{D,k}(x), \tag{7}$$

где $u_k(t)$ коэффициенты, которые необходимо определить. Функцию $\varphi(x)$ разлагаем в ряд Фурье по ортогональной системе $X_{D,k}(x)$, т.е. представим в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{D,k}(x),$$

где φ_k коэффициенты Фурье, которые можно определить равенствами

$$\varphi_k = \int_0^p \varphi(x) X_{D,k}(x) dx, k \geq 1.$$

Искомую функцию $u(t,x)$ из равенства (7) подставляем в уравнении (1) и имеем

$$0 = t^{-\beta} D_t^{\alpha} u(t,x) - a_0 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial^2 u(t, p-x)}{\partial x^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\beta} D_t^{\alpha} u_k(t) X_{D,k}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \left[a_0 X''_{D,k}(x) + a_1 X''_{D,k}(p-x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[t^{-\beta} D_t^{\alpha} u_k(t) + \lambda_{D,k} u_k(t)\right] X_{D,k}(x).$$

Тогда в силу полноты системы $X_{D,k}(x)$ для всех значения $k = 1, 2, \ldots$, получаем

$$t^{-\beta} D_t^{\alpha} u_k(t) + \lambda_{D,k} u_k(t) = 0, 0 < t < T.$$

Далее, из условия (2) задачи D имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{D,k}(x) = \varphi(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) X_{D,k}(x).$$

Следовательно, значения $u_k(0)$ определяются равенствами $u_k(0) = \varphi_k$. Таким образом, для неизвестных коэффициентов $u_k(t)$ получаем следующую систему задач Коши

$$t^{-\beta} D_t^{\alpha} u_k(t) + \lambda_{D,k} u_k(t) = 0, 0 < t < T, u_k(0) = \varphi_k. \tag{8}$$

Используя утверждение Леммы 4 из работы [11] находим, что единственное решение задачи (8) представляется в виде

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\lambda_{D,k}\right)^i}{(i!)^{\alpha} \beta^{i\alpha}} t^{i\beta} \equiv \varphi_k R_{\alpha}\left(-\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta}\right),$$

где $R_{\alpha}(-z)$ называется функцией Роя (см. например, [12]).

Отсюда для решения задачи D получаем следующее представление

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k R_{\alpha}\left(-\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta}\right) X_{D,k}(x). \tag{9}$$

По построению функция $u(t,x)$ из равенства (9) формально удовлетворяет всем условиям задачи D. Остается исследовать необходимые нам гладкость функции $u(t,x)$. В работе [12] для функции $R_{\alpha}(-z)$ получена следующая оценка

$$R_{\alpha}\left(-z\right) \le \frac{1}{1+z}, z \ge 0, 0 < \alpha < 1.$$

В нашем случае данная оценки имеет вид

$$\left| R_{\alpha}\left(-\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta}\right) \right| \le \frac{1}{1 + \left| \frac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta} \right|}. \tag{10}$$

В частности, для всех $t \ge 0$ верно неравенство

$$\left| R_{\alpha}\left(-\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta}\right) \right| \le 1.$$

Так как $\left|X_{D,k}(x)\right| \le \sqrt{\dfrac{2}{p}} \equiv M$, то для функции $u(t,x)$, точнее для суммы ряда (9) имеет место неравенство

$$\left|u(t,x)\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \,. \tag{11}$$

Далее, нам необходимо оценить коэффициенты φ_k. Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям: $\varphi(x) \in C^2[0,p]$ и $\varphi(0) = \varphi(p) = 0$, то отсюда легко следует равенство

$$\varphi_k = \int_0^p \varphi(x) X_{D,k}(x)dx = -\left(\frac{p}{n\pi}\right)^2 \int_0^p \varphi''(x) X_{D,k}(x)dx \,.$$

Значит, оценивая сверху этот интеграл, получаем

$$\left|\varphi_k\right| \le \frac{M}{k^2} \,.$$

Тогда используя неравенство (11), имеем

$$\left|u(t,x)\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \le M\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \,.$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса сумма ряда (9) принадлежит классу $C\left(\bar{Q}\right)$, т.е. $u(t,x) \in C\left(\bar{Q}\right)$. Исследуем гладкость функции $t^{-\beta} D_t^{\alpha} u(t,x)$. Если $0 \le x \le p, t \ge \delta > 0$, то для ряда представляющий функцию $t^{-\beta} D_t^{\alpha} u(t,x)$ следующее равенство

$$t^{-\beta} D_t^{\alpha} u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k t^{-\beta} D_t^{\alpha} R_{\alpha}\left(-\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta}\right) X_{D,k}(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \lambda_{D,k} R_{\alpha}\left(-\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta}\right) X_{D,k}(x) \,.$$

Отсюда используя оценку (10), имеем

$$\left|t^{-\beta} D_t^{\alpha} u(t,x)\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \lambda_{D,k} \frac{1}{1+\left|\dfrac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta}\right|} \le M\beta^{\alpha}\delta^{-\beta}\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| < \infty \,.$$

Следовательно, для любого $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k t^{-\beta} D_t^{\alpha} R_{\alpha}\left(-\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^{\alpha}} t^{\beta}\right) X_{D,k}(x)$$

сходится равномерно в области $0 \le x \le p, t \ge \delta > 0$ и его сумма представляет непрерывную функцию. Значит, $t^{-\beta} D_t^{\alpha} u(t,x) \in C(Q)$. Аналогично доказывается включение $u_{xx}(t,x) \in C(Q)$.

Сформулируем основное утверждение относительно задачи D.

Теорема 1. Пусть $0<\alpha\le 1, \beta>0, a_0\pm a_1>0$, $\varphi(x)\in C^2\left(\overline{Q}\right)$ и выполняются условия $\varphi(0)=\varphi(p)=0$. Тогда решение задачи D существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^p \varphi(\tau)X_{D,k}(\tau)d\tau\right)R_\alpha\left(-\frac{\lambda_{D,k}}{\beta^\alpha}t^\beta\right)X_{D,k}(x).$$

Для полного доказательства теоремы нам остается показать единственность решения. Предположим, что функция $u(t,x)$ является решением однородной задачи D. Рассмотрим функцию $u_k(t)=\left(u(t,x),X_{D,k}(x)\right)$. Применим к этой функции оператор $t^{-\beta}D_t^\alpha$ и учитывая уравнения (1), а далее интегрированием по частям, имеем

$$t^{-\beta}D_t^\alpha u_k(t)=\left(t^{-\beta}D_t^\alpha u(t,x),X_{D,k}(x)\right)=\left(a_0u_{xx}(t,x)+a_1u_{xx}(t,p-x),X_{D,k}(x)\right)=$$

$$=a_0\left(u_{xx}(t,x),X_{D,k}(x)\right)+a_1\left(u_{xx}(t,p-x),X_{D,k}(x)\right)=\left(a_0+(-1)^{k+1}a_1\right)\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2\left(u(t,x),X_{D,k}(x)\right)=$$

$$=-\lambda_{D,k}\left(u(t,x),X_{D,k}(x)\right)=-\lambda_{D,k}u_k(t).$$

Кроме того, $u_k(0)=\left(u(0,x),X_{D,k}(x)\right)=0$. Таким образом, для функции $u_k(t)=\left(u,X_{D,k}\right)$ мы получили однородную задачу (8). Единственным решением этой задачи является функция $u_k(t)=0$. Значит, $\left(u(t,x),X_{D,k}(x)\right)=0$, т.е. функция $u(t,x)$ ортогональна всем элементам системы $X_{D,k}(x)$. Далее, в силу полноты системы $X_{D,k}(x)$, получаем $u(t,x)\equiv 0$. Теорема доказана.

Задача N исследуется аналогичным образом.

Приведем без доказательства основное утверждение относительно задачи N. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $0<\alpha\le 1, \beta>0, a_0\pm a_1>0$, $\varphi(x)\in C^2\left(\overline{Q}\right)$ и выполняются условия $\varphi'(0)=\varphi'(p)=0$. Тогда решение задачи N существует, единственно и представляется в виде

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^p \varphi(\tau)X_{N,k}(\tau)d\tau\right)R_\alpha\left(-\frac{\lambda_{N,k}}{\beta^\alpha}t^\beta\right)X_{N,k}(x).$$

Заключение.

В данной работе мы исследовали начально-краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений дробного порядка. В качестве краевых условий мы рассмотрели условия Дирихле и Неймана. Применяя метод Фурье, мы получили соответствующую спектральную задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией. Используя полноту систем собственных функций вспомогательных задач нам удалось построить явный вид решений основных задач.

Основной новизной исследуемых задач заключаются в том, что в рассматриваемых нами уравнениях использованы дробные производные в смысле Адамара. В случае целого значения производной, как и операторы Римана-Лиувилля и Капуто этот оператор совпадает с обычным оператором дифференцирования целого порядка. Но, в отличие операторов Римана-Лиувилля и Капуто, ядро данного оператора определяется логарифмической функцией и поэтому порядок роста этой функции отличается от порядка степенной функции. Таким образом, мы можем утверждать, что рассматриваемые нами уравнения определяют новые классы уравнений субдиффузии. Соответственно, решения рассматриваемых задач будут обладать новыми качественными свойствами. Например, при больших значениях времени порядок убывания решений рассматриваемых задач отличаются от порядка убывания решений для классического уравнения теплопроводности. Такие же свойства решений наблюдаются при приближении точек объекта к границе, т.е. к граничным значениям. В данной статье для уравнения (1) мы исследовали задачи с условиями Дирихле и Неймана. В дальнейших исследованиях для уравнения (1) мы предполагаем рассматривать краевые условия типа Самарского-Ионкина, а также изучить нелокальные по времени задачи. Для этих предполагаемых задач соответствующие спектральные задачи еще не изучены.

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант № AP09259074).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Evans LC. Partial differential equations. Vol. 19, Graduate studies in mathematics. Providence(RI): American Mathematical Society; 1998. 668 p.

2. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.Лекции по математической физике. Серия: Классический университетский учебник. -- М.: Московский Университет; Издание 2-е, испр. и доп., 2004 г. 416 с.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие. - 6-е изд., испр. и доп. - М.: Изд-во МГУ, 1999.

4.Kilbas A.A., Srivastava H.M, Trujillo J.J.Theory and applications of fractional differential equations.Elsevier, Amsterdam 2006.

5.Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives. Advances in Difference Equations. – 2012. – No.142. – P.1 – 8.

6.Al-Salti N, Kirane M., Torebek B.T. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. – 2019. – Vol. 48, No.3. – P. 669 – 681.

7.Berdyshev A.S. , Kadirkulov B.J. On a nonlocal problem for a fourth-order parabolic equation with the fractional Dzhrbashyan–Nersesyan operator//Differential Equations. – 2016.– V. 52,No.1. – P. 121–127.

8.Kubica A., Yamamoto M. Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coefficients. Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2018.– V. 21. – P. 276–311.

9.Luchko Y., Yamamoto M. General time-fractional diffusion equation: some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems // Fractional Calculus and Applied Analysis. .– 2016.– V. 19, № 3, – P. 676 – 695.

10. Naimark M.A. Linear Differential Operators Part II, Ungar, New York, 1968 .

11.Turmetov B. Kh., Kadirkulov B. J. On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, No.1. – P. 249 – 262.

12.Boudabsa L., Simon Th. Some properties of the Kilbas–Saigo function // Mathematics. – 2021. – Vol.9,No.3. – P.1 – 24.

13. Le Roy E. Valeurs asymptotiques de certaines series procedant suivant les puissances

enteres et positives d'une variable reelle// Darboux Bull. – 1899. – Vol.24. – P.245–268.

REFERENCES

1. Evans LC. Partial differential equations. Vol. 19, Graduate studies in mathematics. Providence(RI): American Mathematical Society; 1998. 668 p.

2. Sveshnikov A.G., Bogoliubov A.N., Kravtcov V.V. Lektcii po matematicheskoi fizike [Lectures on mathematical physics]. Seria: Klassicheskii universitetskii uchebnik. -- M.: Moskovskii Universitet; Izdanie 2-e, ispr. i dop., 2004 г. 416 p.

3. Tihonov A.N., Samarskii A.A. Uravnenia matematicheskoi fiziki: uchebnoe posobie. [Equations of mathematical physics: Textbook]. - 6-e izd., ispr. i dop. - M.: Izd-vo MGU, 1999.

4.Kilbas A.A., Srivastava H.M, Trujillo J.J.Theory and applications of fractional differential equations.Elsevier, Amsterdam 2006.

5.Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives. Advances in Difference Equations. – 2012. – No.142. – P.1 – 8.

6.Al-Salti N, Kirane M., Torebek B.T. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. – 2019. – Vol. 48, No.3. – P. 669 – 681.

7.Berdyshev A.S. , Kadirkulov B.J. On a nonlocal problem for a fourth-order parabolic equation with the fractional Dzhrbashyan–Nersesyan operator//Differential Equations. – 2016.– V. 52,No.1. – P. 121–127.

8.Kubica A., Yamamoto M. Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coefficients. Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2018.– V. 21. – P. 276–311.

9.Luchko Y., Yamamoto M. General time-fractional diffusion equation: some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems // Fractional Calculus and Applied Analysis. .– 2016.– V. 19, № 3, – P. 676 – 695.

10. Naimark M.A. Linear Differential Operators Part II, Ungar, New York, 1968 .

11.Turmetov B. Kh., Kadirkulov B. J. On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, No.1. – P. 249 – 262.

12.Boudabsa L., Simon Th. Some properties of the Kilbas–Saigo function // Mathematics. – 2021. – Vol.9,No.3. – P.1 – 24.

13. Le Roy E. Valeurs asymptotiques de certaines series procedant suivant les puissances enteres et positives d'une variable reelle// Darboux Bull. – 1899. – Vol.24. – P.245–268.