МАТЕМАТИКА

ӘОЖ 517.954
МҒТАР 27.31.44
https://doi.org/10.47526/2022-3/2524-0080.01

Б.Б. ОРМАН[1], Б.Х. ТУРМЕТОВ[2]
[1]*Қожа Ахмет Ясауи атындағы қазақ-түрік университетінің магистранты (Қазақстан, Түркістан), E-mail: bakdaulet.orman@ayu.edu.kz*
[2]*физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті (Қазақстан, Түркістан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ҮШІН КЕЙБІР ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа. Бұл жұмыс Пуассон теңдеуі үшін кейбір шеттік есептердің шешімділігін зерттеуге арналған. Шекаралық операторлар бөлшек ретті туындылар арқылы анықталады. Қарастырылатын есептер белгілі Дирихле және Нейман есептерін жалпылайды. Зерттелетін есептер операторлық әдістерді қолдану арқылы шешіледі. Мақалада қарастырылатын есептердің шешімдері анықталады және оладың жалғыздығы дәлелденеді.

Кілт сөздер: Пуассон теңдеуі, интегралдық оператор, дифференциалдық оператор, бөлшек оператор, шеттік есеп, шешімнің бірегейлігі, шешімнің бар болуы.

B.B. Orman[1], B.Kh. Turmetov[2]
[1]*master student of Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan, Turkestan), E-mail: bakdaulet.orman@ayu.edu.kz*
[2]*doctor of physical and mathematical sciences, professor, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University (Kazakhstan,Turkestan), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

On the solvability of some boundary value problems for the Poisson equation

Abstract. This work is devoted to the study of the solvability of some boundary value problems for the Poisson equation. Boundary operators are defined using fractional derivatives. The problems under consideration generalize the well-known Dirichlet and Neumann problems for the Poisson equation. The problems under study are solved by using operator methods. In the article solutions of the considered problems are determined and their uniqueness is proved.

Keywords: Poisson equation, integral operator, differential operator, fractional operator, boundary value problem, uniqueness of a solution, existence of a solution.

Б.Б. Орман[1] , Б.Х. Турметов[2]
[1]*магистрант Международного казахско-турецкого университета имени Ходжа Ахмет Ясави, (Казахстан, Туркестан), E-mail: bakdaulet.orman@ayu.edu.kz*
[2]*доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Казахстан, Туркестан), E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz*

О разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Пуассона

Аннотация. Данная работа посвящена к исследованию разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Пуассона. Граничные операторы определяются при помощи производных дробного порядка. Рассматриваемые задачи обобщают известные задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. Исследуемые задачи решаются применением операторных методов. В статье определяются решения рассматриваемых задач и доказывается их единственность.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, интегральный оператор, дифференциальный оператор, дробный оператор, краевая задача, единственность решения, существования решения.

1. Кіріспе

Бұл жұмыста классикалық Пуассон теңдеуі үшін шекаралық шартында бөлшек ретті дифференциалдық оператор қатысқан шеттік есеп зерттелінеді. Алдымен осы мақалада қолданылатын бөлшек ретті интегралдық және дифференциалдық операторлардың анықтамаларын келтіреміз.

Кез келген $f(x)\in C^1[0,b]$ функция үшін

$$T^{\alpha} f(x) = x^{1-\alpha} f'(x), \alpha > 0$$

түрдегі дифференциалдық операторды қарастырайық. Егер $\alpha \in (0,1)$ болса, онда келесі

$$I^{\alpha} f(x) = \int_0^x f(t) \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$$

интегралдық оператор T^{α} үшін кері оператор болады. Осы оператордың n - дәрежесін ${}^{n}T^{\alpha}$ түрінде белгілейік, яғни ${}^{n}T^{\alpha} = \underbrace{T^{\alpha}\cdot T^{\alpha}\cdot \ldots \cdot T^{\alpha}}_{n}$ болсын.

[1] жұмыста келесі интегралдық және дифференциалдық операторлар қарастырылған

$$J^{\alpha,\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{x^{\beta}-t^{\beta}}{\beta} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t^{1-\beta}}.$$

$$D^{\alpha,\beta} f(x) = {}^{n}T^{\alpha}\left[J^{n-\alpha,\beta} f \right](x) \equiv \frac{{}^{n}T^{\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \left(\frac{x^{\beta}-t^{\beta}}{\beta} \right)^{n-\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t^{1-\beta}}, n-1<\alpha\le n,$$

$${}_{C}D^{\alpha,\beta} f(x) = J^{n-\alpha,\beta}\left[{}^{n}T^{\alpha} f \right](x) \equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \left(\frac{x^{\beta}-t^{\beta}}{\beta} \right)^{n-\alpha-1} {}^{n}T^{\alpha} f(t) \frac{dt}{t^{1-\beta}}, n-1<\alpha\le n.$$

$\alpha = 0$ болған ерекше жағдайда $J^{0,\beta} f(x) = f(x)$ болсын деп есептейік.

Егер $\beta = 1$ болса, онда $J^{\alpha,\beta}$ операторы α - ретті Риман-Лиувилл интегралына сәйкес келеді, ал $D^{\alpha,\beta}$ және ${}_{C}D^{\alpha,\beta}$ операторлары сәйкес түрде α - ретті Риман-Лиувилл және Капуто туындыларымен бірдей болады [2].

Айталық, $\Omega = \left\{ x\in R^n : |x|<1 \right\}$ - бірлік шар, $n\ge 2$, $\partial\Omega = \left\{ x\in R^n : |x|=1 \right\}$ бірлік сфера, $x\in\Omega$, $r=|x|, \theta = \frac{x}{|x|}, \frac{d}{dr} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial x_j}$ және $u=u(x)$ функциясы Ω аймағында анықталған болсын.

Кез-келген $\alpha \in (0,1]$ және $\beta > 0$ сандары үшін келесі операторларды қарастырамыз

$$J_r^{\alpha,\beta} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r \left(\frac{r^\beta - t^\beta}{\beta} \right)^{\alpha-1} u(t\theta) \frac{dt}{t^{1-\beta}},$$

$$D_r^{\alpha,\beta} u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \right) \int_0^r \left(\frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} u(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}},$$

$$D_{*r}^{\alpha,\beta} u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \left(\frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \left(\tau^{1-\beta} \frac{d}{d\tau} \right) u(\tau\theta) \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}.$$

Алдағы зерттеулерімізде біз $D_r^{\alpha,\beta} u(x)$ және $D_{*r}^{\alpha,\beta} u(x)$ дифференциалдық операторларға қоса келесі

$$B^{\alpha,\beta}[u](x) = r^{\alpha\beta} D_r^{\alpha,\beta}, B_*^{\alpha,\beta}[u](x) = r^{\alpha\beta} D_{*r}^{\alpha,\beta},$$

$$B^{-(\alpha,\beta)} u(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} u\left(\tau^{1/\beta} x\right) d\tau$$

операторлардың қолданыстарын қарастырамыз. Мысал үшін осы операторлардың k– ретті $H_k(x)$ - біртекті гармониялық полиномдарға әсерін көрейік. Егер $H_k(x)$ полиномдар үшін $H_k(\tau x) = \tau^k H_k(x)$ теңдігі орынды екенін ескерсек [3], онда анықтама бойынша

$$B^{-(\alpha,\beta)} H_k(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha\beta} H\left(\tau^{1/\beta} x\right) d\tau = \frac{H_k(x)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\frac{k}{\beta}-\alpha} d\tau =$$

$$= \frac{H_k(x)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1-\alpha\right)}{\beta^\alpha \Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1\right)} H_k(x).$$

Осы сияқты

$$B^{\alpha,\beta}[H_k](x) = r^{\alpha\beta} D^{\alpha,\beta} H_k(x) = r^{\alpha\beta} \frac{H_k(\theta)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \right) \int_0^r \left(\frac{r^\beta - \tau^\beta}{\beta} \right)^{-\alpha} \tau^k \frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}} =$$

$$= r^{\alpha\beta} \beta^{\alpha-1} \frac{H_k(\theta)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^{\frac{k}{\beta}} d\xi \left(r^{1-\beta} \frac{d}{dr} \right) r^{k-\alpha\beta+\beta} =$$

$$= r^{\alpha\beta}\beta^{\alpha-1}\frac{H_k(\theta)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+2-\alpha\right)}(k-\alpha\beta+\beta)r^{k-\alpha\beta} = \beta^{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1-\alpha\right)}H_k(x).$$

Олай болса,

$$B^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}[H_k]\right](x) = B^{-(\alpha,\beta)}\left[B^{\alpha,\beta}[H_k]\right](x) = H_k(x),$$

яғни гармониялық полиномдар класында $B^{-(\alpha,\beta)}$ және $B^{\alpha,\beta}$ өзара кері амалдар екен.

Енді осы жұмыста қарастырылатын негізгі есептердің қойылымын келтіреміз. Ω аймағында келесі есептерді қарастырайық.

1-Есеп. $0<\alpha\le 1, \beta>0$ шарттарды қанағаттандыратын α және β сандары берілсін. Ω аймағында анықталған, тегістігі $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, $D_r^{\alpha,\beta}u(x)\in C(\bar{\Omega})$ болатындай және

$$-\Delta u(x) = f(x), x\in\Omega, \tag{1}$$

$$D_r^{\alpha,\beta}u(x)\Big|_{\partial\Omega} = g(x) \tag{2}$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын анықтау қажет.

2-Есеп. $0<\alpha\le 1, \beta>0$ шарттарды қанағаттандыратын α және β сандары берілсін. Ω аймағында анықталған, тегістігі $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, $D_{*r}^{\alpha,\beta}u(x)\in C(\bar{\Omega})$ болатын, (1) – теңдеуді және

$$D_{*r}^{\alpha,\beta}u(x)\Big|_{\partial\Omega} = g(x). \tag{3}$$

шартты қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын анықтау қажет.

Бұл есептердің тарихына шолу жасайтын болсақ, эллипс тектес теңдеулер үшін шекаралық шартында бөлшек ретті оператор қатысқан шеттік есеп алғашқы рет С.Умаровтың [4] жұмысында зерттелінген. Кейін мұндай есептерге көптеген ғалымдардың назары түсті [5-10]. α және β параметрлердің $\alpha=\beta=1$ мәндерінде бұл есептер классикалық Нейман есебіне пара-пар [11], ал $0<\alpha\le 1$, $\beta=1$ мәндерінде [12,13] жұмыстарда зерттелінген. Біз осы жұмыстарда алынған нәтижелерді ары қарай $\alpha\in(0,1)$, $\beta>0$ мәндеріне сәйкес дамытамыз.

2.Интегро-дифференциалдық операторлардың қасиеттері.

1-Лемма. Егер $0<\alpha,\beta$ және $u(x)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ болса, онда $J_r^{\alpha,\beta}u(x)$ функциясыда $C\left(\bar{\Omega}\right)$ класына тиісті және $J_r^{\alpha,\beta}u(0)=0$ теңдігі орынды болады.

Дәлелдеуі. $J_r^{\alpha,\beta}u(x)$ функциясын $J_r^{\alpha,\beta}$ операторының анықтамасы бойынша келесі

$$\left|J_r^{\alpha,\beta}u(x)\right| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta - t^\beta}{\beta}\right)^{\alpha-1}\left|u(t\theta)\right|\frac{dt}{t^{1-\beta}} \le \|u\|_{C(\bar{\Omega})}J^{\alpha,\beta}[1] = \frac{\beta^{-\alpha}\|u\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(\alpha+1)}r^{\alpha\beta}$$

түрде бағалауға болады. Бұдан $\bar{\Omega}$ аймағының барлық нүктелерінде

$$\max_{\bar{\Omega}}\left|J_r^{\alpha,\beta}u(x)\right| \le \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|_{C(\bar{\Omega})}$$

бағалау орынды.

Олай болса, $J_r^{\alpha,\beta}u(x)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$. Бұған қосымша

$$\left|J_r^{\alpha,\beta}u(0)\right| \le \lim_{r\to 0}\frac{\beta^{-\alpha}\|u\|_{C(\bar{\Omega})}}{\Gamma(\alpha+1)}r^{\alpha\beta} = \lim_{x\to 0}J_r^{\alpha,\beta}u(x) = 0 .$$

Сонда, $\left|J_r^{\alpha,\beta}u(0)\right| = 0 \Leftrightarrow J_r^{\alpha,\beta}u(0) = 0$. сонымен 1-Лемма дәлелденді.

1-Салдары. Егер $0<\alpha,\beta$ және $u(x)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ болса, онда $B^{-(\alpha,\beta)}u(x)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$.

2-Лемма. Егер $0<\alpha<1, \beta>0$ және $u(x)$ Ω аймағында тегіс функция болса, онда келесі

$$B^{-(\alpha,\beta)}\left[B^{\alpha,\beta}[u]\right](x) = B^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}[u]\right](x) = u(x), x\in\Omega \tag{3}$$

теңдіктер орынды.

Дәледеуі. $B^{-(\alpha,\beta)}$ және $B^{(\alpha,\beta)}$ операторларының анықтамаларына сәйкес

$$B^{-(\alpha,\beta)}\left[B^{\alpha,\beta}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta - t^\beta}{\beta}\right)^{\alpha-1}t^{-\alpha\beta}B^{\alpha,\beta}[u](t\theta)\frac{dt}{t^{1-\beta}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta - t^\beta}{\beta}\right)^{\alpha-1}\frac{d}{dt}\int_0^t\left(\frac{t^\beta - \tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}u(\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}dt =$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}r^{1-\beta}\frac{d}{dr}\int_0^r\left(r^\beta - t^\beta\right)^\alpha\frac{d}{dt}J_t^{1-\alpha,\beta}[u](t\theta)dt =$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}r^{1-\beta}\frac{d}{dr}\left[\left(r^\beta - t^\beta\right)^\alpha J_t^{1-\alpha,\beta}[u](t\theta)\Big|_{t=0}^{t=r} + \int_0^r\alpha\left(r^\beta - t^\beta\right)^{\alpha-1}J_t^{1-\alpha,\beta}[u](t\theta)\frac{dt}{t^{1-\beta}}\right] =$$

$$= r^{1-\beta}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta - t^\beta}{\beta}\right)^{\alpha-1}J_t^{1-\alpha,\beta}[u](t\theta)\frac{dt}{t^{1-\beta}}\right] = r^{1-\beta}\frac{d}{dr}J_t^{\alpha,\beta}\left[J_t^{1-\alpha,\beta}[u]\right](x) =$$

$$= r^{1-\beta}\frac{d}{dr}J_t^{1,\beta}\left[u\right](x) = r^{1-\beta}\frac{d}{dr}\int_0^r u(t\theta)\frac{dt}{t^{1-\beta}} = u(x) .$$

Екінші жақтан

$$B^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}[u]\right](x)=r^{\alpha\beta+1-\beta}\frac{d}{dr}J^{1-\alpha,\beta}J^{\alpha,\beta}[r^{-\alpha\beta}u]\left(x\right)=r^{\alpha\beta+1-\beta}\frac{d}{dr}J^{1,\beta}[r^{-\alpha\beta}u]\left(x\right)=$$

$$r^{\alpha\beta+1-\beta}r^{\beta-1-\alpha\beta}u(x)=u(x).$$

2-Леммада дәлелденді.

3-Лемма. Егер $0<\alpha<1,\beta>0$ және $u(x)$ Ω аймағында тегіс функция болса, онда келесі

$$B_*^{\alpha,\beta}[u](x)=B^{\alpha,\beta}[u](x)-\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(0),x\in\Omega. \tag{4}$$

$$B_*^{\alpha,\beta}[u](0)=0. \tag{5}$$

теңдіктер орынды.

Дәлелдеуі. Айталық $0<\alpha\le 1$ және $\beta>0$ болсын. $B_*^{\alpha,\beta}$ операторының анықтамасын қолданатын болсақ, онда

$$B_*^{\alpha,\beta}[u](x)=\frac{r^{\alpha\beta}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^{\beta}-\tau^{\beta}}{\beta}\right)^{-\alpha}\left(\tau^{1-\beta}\frac{d}{d\tau}\right)u(\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}=$$

$$=\frac{r^{\alpha\beta}}{\Gamma(2-\alpha)}r^{1-\beta}\frac{d}{dr}\int_0^r\left(\frac{r^{\beta}-\tau^{\beta}}{\beta}\right)^{1-\alpha}\frac{d}{d\tau}u(\tau\theta)d\tau=$$

$$=\frac{r^{\alpha\beta+1-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{r^{\beta}-\tau^{\beta}}{\beta}\right)^{1-\alpha}u(\tau\theta)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=r}+(1-\alpha)\int_0^r\left(\frac{r^{\beta}-\tau^{\beta}}{\beta}\right)^{-\alpha}u(\tau\theta)d\tau\right]=$$

$$=\frac{r^{\alpha\beta+1-\beta}\beta(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{r^{\beta(1-\alpha)-1}}{\beta^{1-\alpha}}u(0)+\frac{r^{\alpha\beta+1-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int_0^r\left(\frac{r^{\beta}-\tau^{\beta}}{\beta}\right)^{-\alpha}u(\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}=B^{\alpha,\beta}u(x)-\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(0).$$

Бұл есептелердің нәтижесінде (4) – теңдіктің орындалуына көз жеткіземіз. Ары қарай , $B^{\alpha,\beta}[u](x)$ функция өрнектелетін интегералда айнымалды $\tau=r\xi^{1/\xi}$ түрінде алмастырсақ, онда

$$B^{\alpha,\beta}[u](x)=\frac{r^{\alpha\beta-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)}r\frac{d}{dr}\int_0^r\left(\frac{r^{\beta}-\tau^{\beta}}{\beta}\right)^{-\alpha}u(\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}=$$

$$=\frac{r^{\alpha\beta-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)}r\frac{d}{dr}\left(\frac{r^{-\alpha\beta}}{\beta^{-\alpha}}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)\frac{r\xi^{\frac{1}{\beta}-1}d\xi}{\beta\left(r\xi^{\frac{1}{\beta}}\right)^{1-\beta}}\right)=\frac{\beta^{\alpha-1}r^{\alpha\beta-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)}r\frac{d}{dr}\left(r^{(1-\alpha)\beta}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi\right)$$

$$=\frac{\beta^{\alpha-1}r^{-(1-\alpha)\beta}}{\Gamma(1-\alpha)}\left((1-\alpha)\beta r^{(1-\alpha)\beta}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi+r^{(1-\alpha)\beta}r\frac{d}{dr}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi\right)=$$

$$=\left(r\frac{d}{dr}+(1-\alpha)\beta\right)\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi$$

нәтиже орынды болады. Егер $u(x)$ тегіс функция деп есептесек, онда

$$\lim_{x\to 0}\left(r\frac{d}{dr}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi\right)=0.$$

Сонымен қатар,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\alpha)\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi=\frac{(1-\alpha)\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(0)\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}d\xi=$$

$$=\frac{(1-\alpha)\beta^{\alpha}u(0)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(0).$$

Соңғы нәтижелерден

$$B_*^{\alpha,\beta}[u](0)=\lim_{x\to 0}B_*^{\alpha,\beta}[u](x)=\lim_{x\to 0}B^{\alpha,\beta}[u](x)-\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(0)=0,$$

теңдік келіп шығады, яғни (5)-теңдікте орынды екен. Лемма дәлелденді.

2 және 3 леммалардан келесі нәтиже келіп шығады.

2-Салдар. Егер $0<\alpha\le 1, \beta>0$ және Ω аймағында жеткілікті тегіс болған $u(x)$ функциясы берілсе, онда

$$B_*^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}[u]\right](x)=u(x)-u(0) \quad (6)$$

теңдік орынды.

4 - Лемма. Айталық $u(x)$ функциясы үшін $\Delta u(x)=f(x), x\in\Omega$ теңдік орындалсын, онда $B^{\alpha,\beta}[u](x)$ функциясы үшін

$$\Delta B^{\alpha,\beta}[u](x)=|x|^{-2}B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f](x), x\in\Omega. \quad (7)$$

теңдік орынды.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша $B^{\alpha,\beta}[u](x)$ функциясы интеграл арқылы өрнектеледі. Осы интегралда айнымалды алмастыру нәтижесінде оны

$$B^{\alpha,\beta}[u](x)=\left(r\frac{d}{dr}+(1-\alpha)\beta\right)\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi,$$

түрінде жазып алуға болады. Кез-келген $v(x)$ тегіс функция үшін мынандай

$$\Delta\left[r\frac{d}{dr}v(x)\right]=\left(r\frac{d}{dr}+2\right)\Delta v(x).$$

теңдік орынды болатынын белгілі. Онда лемма шартында берілген $\Delta u(x)=f(x)$ теңдікті ескерсек $B^{\alpha,\beta}[u](x)$ функциясына алынған соңғы өрнекке Лаплас операторын қолдану нәтижесінде

$$\Delta B^{\alpha,\beta}[u](x)=\left(r\frac{d}{dr}+(1-\alpha)\beta+2\right)\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}\xi^{\frac{2}{\beta}}f\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi$$

теңдікке келеміз.Бұл интегралда айнымалды $\xi=\frac{\tau^\beta}{r^\beta}$ түрінде алмастырсақ , онда $\Delta B^{\alpha,\beta}[u](x)$ функциясы екі интегралдың қосындысы түрінде жазылады

$$\Delta B^{\alpha,\beta}[u](x)=\left(r\frac{d}{dr}+(1-\alpha)\beta+2\right)\frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{-\alpha}\xi^{\frac{2}{\beta}}f\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi=$$

$$=((1-\alpha)\beta+2)\frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\frac{\tau^2f(\tau\theta)d\tau}{\tau^{1-\beta}}+\left(r\frac{d}{dr}\right)\frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\frac{\tau^2f(\tau\theta)d\tau}{\tau^{1-\beta}}.$$

Соңғы интегралды түрлендіріп келесі формада жазып аламыз

$$\left(r\frac{d}{dr}\right)\frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\tau^2f(\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}=((\alpha-1)\beta-2)\frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\tau^2f(\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}+$$

$$+\frac{r^{\alpha\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(r^{1-\alpha}\frac{d}{dr}\right)\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\tau^2f(\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}.$$

Онда

$$\Delta B^{\alpha,\beta}[u](x)=((1-\alpha)\beta+2)\frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\tau^2f(\tau\theta)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}+$$

$$+\left((\alpha-1)\beta-2\right)\frac{r^{(\alpha-1)\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\frac{\tau^2 f\left(\tau\theta\right)d\tau}{\tau^{1-\beta}}+\frac{r^{\alpha\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(r^{1-\alpha}\frac{d}{dr}\right)\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\frac{\tau^2 f\left(\tau\theta\right)d\tau}{\tau^{1-\beta}}=$$

$$=\frac{r^{\alpha\beta-2}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(r^{1-\alpha}\frac{d}{dr}\right)\int_0^r\left(\frac{r^\beta-\tau^\beta}{\beta}\right)^{-\alpha}\tau^2 f\left(\tau\theta\right)\frac{d\tau}{\tau^{1-\beta}}=r^{\alpha\beta-2}D^{\alpha,\beta}[r^2 f](x)=r^{-2}B^{\alpha,\beta}[r^2 f](x).$$

Сонымен (7) – теңдік орынды екендігіне көз жеткіздік. Лемма дәлелденді.

3-Салдар. Егер $u(x)$ функциясы Ω аймағында Лаплас теңдеуінің шешімі болса, онда $B^{\alpha,\beta}[u](x)$ функциясыда сол аймақта Лаплас теңдеуінің шешімі болады.

1-Ескерту. $|x|^{-2}\,B^{\alpha,\beta}[|x|^2\, f](x)$ функциясы үшін

$$|x|^{-2}\,B^{\alpha,\beta}[|x|^2\, f](x)=\left(r\frac{d}{dr}+2+(1-\alpha)\beta\right)f_{\alpha,\beta}(x) \tag{8}$$

формулада орынды. Мұнда $f_{\alpha,\beta}(x)=|x|^{(\alpha-1)\beta-2}\,J_r^{1-\alpha,\beta}\left[|x|^2\, f\right](x)$. Соңғы теңдікте $\alpha=1$ болса, онда $f_{1,\beta}(x)=f(x)$.

(7) – формула сияқты нәтижені $B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)$ функциясына дәлелдеуге болады. Осындай нәтижені келтіреміз.

5 - Лемма. Егер $v(x)$ функциясы үшін $\Delta v(x)=F(x), x\in\Omega$ теңдік орындалса, онда

$$\Delta B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)=|x|^{-2}\,B^{-(\alpha,\beta)}\left[|x|^2\,F\right](x), x\in\Omega. \tag{9}$$

Дәлелдеуі. α параметрі $\alpha\in(0,1)$ аралықтан болсын. $\Delta B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)$ функциясы өрнектелетін интегралда айнымалды $\tau=r\xi^{1/\xi}$ түрінде алмастыру нәтижесінде келесі теңдіктерге ие боламыз:

$$\Delta B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left(\frac{r^\beta-t^\beta}{\beta}\right)^{\alpha-1}\frac{t^{-\alpha\beta}u\left(t\theta\right)dt}{t^{1-\beta}}=\frac{r^{\beta(\alpha-1)}}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(1-\xi\right)^{-\alpha}\frac{r^{-\alpha\beta}\xi^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)r\xi^{\frac{1}{\beta}-1}d\xi}{\beta\left(r\xi^{\frac{1}{\beta}}\right)^{1-\beta}}=$$

$$=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(1-\xi\right)^{\alpha-1}\xi^{-\alpha}u\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi.$$

Олай болса

$$\Delta B^{-(\alpha,\beta)}[u](x)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(1-\xi\right)^{\alpha-1}\xi^{\frac{2}{\beta}-\alpha}F\left(\xi^{\frac{1}{\beta}}x\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left(1-\frac{\tau^{\beta}}{r^{\beta}}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\tau^{\beta}}{r^{\beta}}\right)^{\frac{2}{\beta}-\alpha}F\left(\left(\frac{\tau^{\beta}}{r^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}}x\right)\frac{\beta\tau^{\beta-1}}{r^{\beta}}d\tau=$$

$$=\frac{r^{\beta(1-\alpha)-2+\alpha\beta-\beta}}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left(r^{\beta}-\tau^{\beta}\right)^{\alpha-1}\frac{\tau^{2-\alpha\beta}F\left(\tau\theta\right)d\tau}{\tau^{1-\beta}}=\frac{r^{-2}}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\int_0^r\left(r^{\beta}-\tau^{\beta}\right)^{\alpha-1}\frac{\tau^{2-\alpha\beta}F\left(\tau\theta\right)d\tau}{\tau^{1-\beta}}=$$

$$=r^{-2}B^{-(\alpha,\beta)}\left[r^2F\right](x).$$

Сонымен 5-Лемма дәлелденді.

Келесі леммада біз $B^{-(\alpha,\beta)}$ операторының Гельдер класындағы әсерін анықтаймыз.

6-Лемма. Айталық $0<\alpha<1,\beta>0,0<\lambda<1$ және $f(x)\in C^{\lambda+p}\left(\bar{\Omega}\right), p=0,1,...$ болсын. Онда $B^{-(\alpha,\beta)}f(x)\in C^{\lambda+p}\left(\bar{\Omega}\right)$.

Дәлелдеуі. $\bar{\Omega}$ аймағында жататын, кез-келген x,y нүктелерді таңдап алайық. $B^{-(\alpha,\beta)}f(x)$ функциясын $h(x)=B^{-(\alpha,\beta)}f(x)$ деп белгілейік. Онда

$$\left|h(x)-h(y)\right|\le\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(1-\tau\right)^{\alpha-1}\tau^{-\alpha}\left|u\left(\tau^{1/\beta}x\right)-u\left(\tau^{1/\beta}y\right)\right|d\tau\le$$

$$\frac{C\,|\,x-y\,|^{\lambda}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(1-\tau\right)^{\alpha-1}\tau^{\lambda/\beta-\alpha}d\tau\le C\,|\,x-y\,|^{\lambda}.$$

Бұл жерде және кейінгі есептеулерде C символымен мәндері өзгеріп отыратын тұрақтыны белгілейміз.

Егер $i=(i_1,...,i_n)$ - мультииндекс және $\partial_x^i=\frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1}...\partial x_n^{in}}$ болса, онда ұзындығы $|\,i\,|\le p$ болған кез-келген i және $x,y\in\bar{\Omega}$ нүктелер үшін

$$\left|\partial_x^ih(x)-\partial_x^ih(y)\right|\le\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(1-\tau\right)^{\alpha-1}\tau^{|i|/\beta-\alpha}\,|\,\partial_z^iu(z_x)-\partial_z^iu(z_y)\,|\,ds\le C\,|\,x-y\,|^{\lambda}$$

теңсіздіктер орынды болады. Бұл жерде $\partial_z^i=\frac{\partial^{|i|}}{\partial z_1^{i_1}...\partial z_n^{in}}, z_x=\tau^{1/\beta}x, z_y=\tau^{1/\beta}y$.

Олай болса, $h(x)$ функциясы және $|\,i\,|\le p$ шартты қанағаттандыратын барлық i мультииндекстерге сәйкес келетін $\partial^ih(x)$ функциялары $C^{\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)$ класына тиісті болады. Сол себептен $B^{-(\alpha,\beta)}f(x)\in C^{\lambda+p}\left(\bar{\Omega}\right)$. Лемма дәлелденді.

Келесі лемма осы сияқты дәлелденеді.

7-Лемма. Егер $0<\alpha<1,\beta>0,0<\lambda<1$ және $f(x)\in C^{\lambda+p}\left(\bar{\Omega}\right), p=1,2,...$ болса, онда $B^{\alpha,\beta}f(x)\in C^{\lambda+p-1}\left(\bar{\Omega}\right)$.

4-Салдары. Егер $0<\alpha<1, \beta>0, 0<\lambda<1$ және $f(x)\in C^{\lambda+p}\left(\bar{\Omega}\right), p=1,2,...$болса, онда $|x|^{-2} B^{\alpha,\beta}\left[|x|^2 f\right](x)\in C^{\lambda+p-1}\left(\bar{\Omega}\right)$.

3. Негізгі есептерді зерттеу.

Бұл бөлімде біз 1 және 2- есептерге қатысты негізгі нәтижелерді баяндаймыз. Алдымен шешімнің жалғыз болуы туралы теореманы келтірейік.

1-Теорема. Егер 1 және 2- есептердің шешімдері бар болса, онда

1) 1- есептің шешімі жалғыз болады;

2) 2- есептің шешімі жалғыз емес. Егер $u_1(x)$ және $u_2(x)$ функциялары есептің кез-келген екі шешімі болса, онда $u_1(x)-u_2(x)=C$ болады.

Дәлелдеуі. $u(x)$ функциясы бір текті шарттармен берілген 1- есептің шешімі болсын делік. Осы жағдайда $u(x)\equiv 0, x\in\bar{\Omega}$ болатынын дәлелдейік. $u(x)$ функциясына $B^{\alpha,\beta}$ операторын қолданайықта, нәтижені $v(x)=B^{\alpha,\beta}u(x)$ түрінде белгілейік. Егер соңғы теңдікке Лаплас операторын әсер еттірсек, онда $\Delta v(x)=|x|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|x|^2 \Delta u](x)=0$ болады. Демек, $v(x)$ функциясы Ω аймағында Лаплас теңдеуінің шешімі, яғни гармониялық функция. Болжауымыз бойынша $u(x)$ функциясы (1) және (2) шарттардың бір текті жағдайын қанағаттандырады. Онда $v(x)\big|_{\partial\Omega}=B^{\alpha,\beta}u(x)\big|_{\partial\Omega}=0$ шартыда орындалады. Олай болса, $v(x)$ функциясы келесі $\Delta v(x)=0, x\in\Omega, v(x)\big|_{\partial\Omega}=0$ Дирихле есебінің шешімі болғаны. Ал Дирихле есебінің шешімі жалғыз екендігін ескерсек, онда $v(x)\equiv 0, x\in\bar{\Omega}$. Басқаша айтқанда $B^{\alpha,\beta}u(x)\equiv 0, x\in\bar{\Omega}$. Бұл теңдіктің екі жағына $B^{-(\alpha,\beta)}$ операторын қолдансақ, $u(x)\equiv 0, x\in\bar{\Omega}$ теңдігі келіп шығады. Сонымен, 1- есептің шешімі жалғыз болады.

Айталық, $u_1(x)$ және $u_2(x)$ функциялары 2-есептің кез-келген екі шешімі болсын. Егер олардың айырымын $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ түрінде белгілесек, онда $u(x)$ үшін 1- есептегі сияқты есептеулердің нәтижесінде $B_*^{\alpha,\beta}u(x)\equiv 0, x\in\bar{\Omega}$ түріндегі теңдікке келеміз. Бұл теңдікке $B^{-(\alpha,\beta)}$ операторын қолдансақ, онда (6) формуладан

$$B^{-(\alpha,\beta)}B_*^{\alpha,\beta}u(x)\equiv 0 \Rightarrow u(x)-u(0)\equiv 0 \Rightarrow u(x)\equiv Const \Leftrightarrow u_1(x)-u_2(x)=C .$$

Теорема дәлелденді.

Ары қарай 1- есеп шешімінің бар болу мәселесін зерттейміз. Есептің шешімі бар болсын деп ұйғарайық. Егер $v(x)=B^{\alpha,\beta}u(x)$ деп белгілесек, онда (7) – формуладан $v(x)$ функциясы үшін келесі Дирихле есебін аламыз

$$-\Delta v(x)=F(x), x\in\Omega, v(x)\big|_{\partial\Omega}=g(x) . \tag{10}$$

Мұнда $F(x)=|x|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f](x)$.

Егер $F(x)$ және $g(x)$ жеткілікті тегіс функциялар үшін (10)-шеттік есептің шешімі әр қашанда бар, бірегей және ол (қараңыз, [14], 35 бет)

$$v(x)=\int_{\Omega} G(x,y)F(y)dy-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu}g(y)dS_y , \tag{11}$$

формуламен анықталады. Мұндағы $G(x,y)$ (10)-есептің Грин функциясы.

$v(x)=B^{\alpha,\beta}u(x)$ теңдігіне $B^{-(\alpha,\beta)}$ операторын қолдана отырып, (3) – формуланың бірінші теңдігінен $u(x)$ функцияны бір мәнді түрде $u(x)=B^{-(\alpha,\beta)}v(x)$ формула арқылы анықтаймыз. Егер $v(x)$ функциясы 10-есептің шешімі болса, онда $u(x)=B^{-(\alpha,\beta)}v(x)$ формуламен анықталған $u(x)$ 1- есептің (1) және (2) шарттарын қанағаттандырады. Шынында да, осы функцияға Лаплас операторын қолдансақ, онда (9)- теңдіктен

$$-\Delta u(x)=-\Delta B^{-(\alpha,\beta)}v(x)=|x|^{-2}\,B^{-(\alpha,\beta)}\left[|x|^2\,F\right](x)=$$

$$=|x|^{-2}\,B^{-(\alpha,\beta)}\left[|x|^2\,F\right](x)=|x|^{-2}\,B^{-(\alpha,\beta)}\left[|x|^2|x|^{-2}\,B^{\alpha,\beta}[|x|^2\,f\,]\right](x)=$$

$$=|x|^{-2}\,B^{-(\alpha,\beta)}\left[B^{\alpha,\beta}[|x|^2\,f\,]\right](x)=|x|^{-2}|x|^2\,f(x)=f(x)\,.$$

Демек, (1)-теңдеу орындалады. (2)-шарттыңда орындалуын тексерейік:

$$D_r^{\alpha,\beta}u(x)\Big|_{\partial\Omega}=B^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}v(x)\right]\Big|_{\partial\Omega}=v(x)\Big|_{\partial\Omega}=g(x)\,.$$

Сонымен біз $u(x)=B^{-(\alpha,\beta)}v(x)$ функциясы 1- есептің (1) және (2) шарттарын формал түрде қанағаттандыратынын көрсеттік. Енді осы функцияның тегістік дәрежесін зерттейік. Егер $f(x)\in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega}), 0<\lambda<1$ болса, онда $F(x)=|x|^{-2}\,B^{\alpha,\beta}[|x|^2\,f\,](x)$ функция $C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ кеңістігіне тиісті болады. Онда, $g(x)\in C^{\lambda+2}\left(\partial\Omega\right)$ үшін (10)-есебінің шешімі $C^{\lambda+2}\left(\bar{\Omega}\right)$ класқа тиісті (қараңыз, [15]). Олай болса, 7-лемманың нәтижесі бойынша есеп шешімі, яғни $u(x)=B^{-(\alpha,\beta)}v(x)$ функциясы $C^{\lambda+2}\left(\bar{\Omega}\right)$ класқа тиісті.

Сонымен біз келесі нәтижені алдық.

2-Теорема. Келесі $0<\alpha<1, \beta>0$, $f(x)\in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega}), g(x)\in C^{\lambda+2}(\partial\Omega), 0<\lambda<1$ шарттар орындалсын. Онда 1- есептің шешімі бар, жалғыз, $C^{\lambda+2}\left(\bar{\Omega}\right)$ Гельдер класына тиісті және

$$u(x)=B^{-(\alpha,\beta)}v(x)\,,$$

түрінде өрнектеледі. Бұл жерде $v(x)$ функциясы (10)-есептің $F(x)=|x|^{-2}\,B^{\alpha,\beta}[|x|^2\,f\,](x)$ функциясына сәйкес келетін шешімі.

2- есеп үшін келесі нәже орынды.

3-Теорема. Келесі $0<\alpha<1, \beta>0$, $f(x)\in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega}), g(x)\in C^{\lambda+2}(\partial\Omega), 0<\lambda<1$ шарттар орындалсын. Онда 2- есептің шешімі бар болуы үшін

$$\int\limits_{\Omega}f_{\alpha,\beta}(y)dy+(1-\alpha)\beta\int\limits_{\Omega}f_{\alpha,\beta}(y)dy+\int\limits_{\partial\Omega}g(y)dS_y=0\,, \tag{12}$$

теңдіктің орындалуы қажетті және жеткілікті, мұндағы $f_{\alpha,\beta}(x)$ функциясы

$$f_{\alpha,\beta}(x) = |x|^{(\alpha-1)\beta-2} J_r^{1-\alpha,\beta}\left[|x|^2 f\right](x) \qquad (13)$$

формуламен анықталады.

Егер есептің шешімі бар болса, онда бұл шешім $C^{\lambda+2}\left(\bar{\Omega}\right)$ класына тиісті болады және

$$u(x) = C + B^{-(\alpha,\beta)}v(x)$$

түрінде өрнектеледі. Бұл жерде $v(x)$ функциясы (10)-есептің $F(x) = |x|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f](x)$ функциясына сәйкес келетін және қосымша $v(0) = 0$ шартты қанағаттандыратын шешімі.

Дәлелдеуі. $u(x)$ функциясы 2- есептің шешімі болсын. Осы шешімге сәйкес келетін $v(x) = B_*^{\alpha,\beta}u(x)$ функцияны қарастырайық. Егер (4) және (7) теңдіктерді есепке алсақ, онда $v(x) = B_*^{\alpha,\beta}u(x)$ функция үшін

$$\Delta B_*^{\alpha,\beta}[u](x) = \Delta B^{\alpha,\beta}[u](x) - \Delta\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}u(0)\right) = |x|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f](x) \equiv F(x),$$

теңдеуді және $v(x)\big|_{\partial\Omega} = B_*^{\alpha,\beta}u(x)\big|_{\partial\Omega} = D_r^{\alpha,\beta}u(x)\big|_{\partial\Omega} = g(x)$ шеттік шартты аламыз. Сонымен $v(x)$ функциясы (10)-есептің шарттарын қанағаттандыратынын байқаймыз. Бұған қосымша, (4)-шарттан $v(0) = 0$ теңдікте келіп шығады. Егер $f(x) \in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ және $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ болса, онда (10)- есептің шешімі бар және ол (11)-формуламен анықталады. Осы функция үшін $v(0) = 0$ шарты қашан орындалатынын анықтайық. Егер $n \geq 3$ болса (10)- есептің Грин функциясы келесі

$$G(x,y) = \frac{1}{\omega_n(n-2)}\left[|x-y|^{2-n} - \left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{2-n}\right],$$

түрде анықталады. Сондай-ақ, осы функцияның $\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}$ нормал бағыттағы туындысы үшін

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} = -\frac{1}{\omega_n}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$$

теңдігі орынды. Бұл жерде ω_n - бірлік сфера ауданы.

Ары қарай, (11)-теңдіктен

$$v(0) = \frac{1}{\omega_n(n-2)}\int_\Omega\left[|y|^{2-n} - 1\right]|y|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|y|^2 f](y)dy + \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega} g(y)dS_y$$

нәтижеге ие боламыз. Егер

$$g_{\alpha,\beta}(y) = \frac{1}{(n-2)}\left[|y|^{2-n} - 1\right]|y|^{-2} B^{\alpha,\beta}[|y|^2 f](y)$$

деп белгілесек, онда $v(0)=0$ шарт орындалуы үшін қажетті және жеткілікті шарт келесі теңдікпен беріледі

$$\int_{\Omega} g_{a,\beta}(y)dy+\int_{\partial\Omega} g(y)dS_y=0 \tag{14}$$

[16] жұмыста $g(x)=\left(r\frac{d}{dr}+2\right)g_1(x)$ түрінде берілген функция үшін

$$\frac{1}{(n-2)}\int_{\Omega}\left[|x|^{2-n}-1\right]g(x)dx=\frac{1}{(n-2)}\int_{\Omega}\left[|x|^{2-n}-1\right]\left(r\frac{d}{dr}+2\right)g_1(x)dx=\int_{\Omega} g_1(x)dx$$

теңдік дәлелденген. Онда (8) – теңдікті ескерсек

$$\int_{\Omega} g_{a,\beta}(y)dy=\int_{\Omega} f_{\alpha,\beta}(y)dy+(1-\alpha)\beta\int_{\Omega} f_{\alpha,\beta}(y)dy$$

нәтиже келіп шығады. Олай болса, (14)-формуламен берілген шартты (12) –теңдік түрінде жазып алуға болады. Сонымен, 2-есептің шешімі бар болса (12) –шарт орындалуы қажетті екен. Осы шарт 2-есептің шешімі бар болуы үшін жеткілікте екендігін көрсетейік. Шынында да, егер $f(x)\in C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ болса, онда $F(x)=|x|^{-2}B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f](x)$ функциясы $C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ класына тиісті болады. Сонымен қатар $g(x)\in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ үшін (10)-есептің шешімі бар және (12)-шарт орындалғанда $v(0)=0$ теңдікте орындалады. Осы функция арқылы құрылған $u(x)=C+B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)$ функцияны қарастырсақ, ол үшін

$$-\Delta u(x)=-\Delta\left[C\right]-\Delta B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)=|x|^{-2}B^{-(\alpha,\beta)}[|x|^2\left(-\Delta\right)v](x)=$$

$$|x|^{-2}B^{-(\alpha,\beta)}\left[B^{\alpha,\beta}[|x|^2 f]\right](x)=f(x)$$

теңдік орынды. Бұған қосымша

$$D_{*r}^{\alpha,\beta}u(x)\Big|_{\partial\Omega}=B_*^{\alpha,\beta}u(x)\Big|_{\partial\Omega}=B_*^{\alpha,\beta}\left[C+B^{-(\alpha,\beta)}v(x)\right]\Big|_{\partial\Omega}=B_*^{\alpha,\beta}\left[C\right]+B_*^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}v(x)\right]\Big|_{\partial\Omega}=$$

$$=B_*^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}v(x)\right]\Big|_{\partial\Omega}$$

шеттік шартта орындалады. Соңғы өрнек үшін

$$B_*^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}v(x)\right]=B^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}v(x)\right]-\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}B^{-(\alpha,\beta)}[v](0).$$

Егер $v(0)=0$ шарт орындалса, онда $B^{-(\alpha,\beta)}[v](0)=0$ болады. Бұдан

$$D_{*r}^{\alpha,\beta}u(x)\Big|_{\partial\Omega}=B^{\alpha,\beta}\left[B^{-(\alpha,\beta)}v(x)\right]\Big|_{\partial\Omega}=v(x)\Big|_{\partial\Omega}=g(x).$$

Сонымен, $u(x) = C + B^{-(\alpha,\beta)}[v](x)$ функциясы 2-есептің екі шартында қанағаттандырады екен. Бұл функцияның тегістігі 1-есептегі сияқты тексеріледі. Теорема дәлелденді.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетінің № AP09259137 грантымен қолдау тапты.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D. On a new class of fractional operators // Advances in Difference Equations. –2017. –Vol. 2017, No.247. – P.1-16.

2.Kilbas A, Srivastava H.M, Trujillo J.J: Theory and Application of Fractional Differential Equations. –Amsterdam: Elsevier, 2006. – 512 p.

3.Карачик В.В. Метод нормированных систем функций. –Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 452 с.

4. Umarov S.R. Some boundary value problems for elliptic equations with a boundary operator of fractional order//Doklady Mathematics. – 1994. – Vol.48, No.3. – P.655 – 658.

5.Ashurov R.R. Fayziev Yu.E. On some boundary value problems for equations with boundary operators of fractional order // International Journal of Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 34,No.2. – P. 283-295.

6.Vasil'eva N.V., Krasnoshchek, N.V. On the local solvability of the two-dimensional Hele-Shaw problem with fractional derivative with respect to time//Siberian Advances in Mathematics. – 2015. – Vol.25. – P.276 – 296.

7.Vasylyeva N. Local solvability of a linear system with a fractional derivative in time in a boundary condition// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2015. – Vol.18. – P. 982–1005.

8. Kirane M , Torebek B.T . On a nonlocal problem for the Laplace equation in the unit ball with fractional boundary conditions //Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2016. – Vol.39, No.5. – P.1121 – 1128.

9.Krasnoschok M., Vasylyeva N. On a nonclassical fractional boundary-value problem for the Laplace operator// Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol.257, No.6. – C.1814 – 1839.

10. Turmetov B., Nazarova V. On a generalization of the Neumann problem for the Laplace equation//Mathematische Nachrichten. – 2020. – Vol.293, No.1. – C.169 – 177.

11. Бицадзе А.В. К задаче Неймана для гармонических функций//Докл. АН СССР. – 1990. – Т.311,№1. – С.11 – 13.

12. Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения //Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т.32, № 8. – С.1089 – 1092.

13. Turmetov B.K. On smoothness of a solution to a boundary value problem with fractional order boundary operator//Siberian Advances in Mathematics. – 2005. – Vol.15, No.2. – C.115 – 125.

14.Evans L. C. Partial Differential Equations.American Mathematical Soc., – 2010. – 749 p.

15.Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. – Berlin:Springer-Verlag GmbH, 2001. – 518 p.

16.Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order// Boundary value problems. – 2013. No. 93. – P.1 – 15.

REFERENCES

1. Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D. On a new class of fractional operators // Advances in Difference Equations. –2017. –Vol. 2017, No.247. – P.1-16.

2.Kilbas A, Srivastava H.M, Trujillo J.J: Theory and Application of Fractional Differential Equations. –Amsterdam: Elsevier, 2006. – 512 p.

3.Karachik V.V Metod normirovannyh system funkcii [Method of normalized systems of functions]– Chrliabinsk: Izdatel'skii centr IUUrGU, 2014. – 452 p.

4. Umarov S.R. Some boundary value problems for elliptic equations with a boundary operator of fractional order//Doklady Mathematics. – 1994. – Vol.48, No.3. – P.655 – 658.

5.Ashurov R.R. Fayziev Yu.E. On some boundary value problems for equations with boundary operators of fractional order // International Journal of Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 34,No.2. – P. 283-295.

6.Vasil'eva N.V., Krasnoshchek, N.V. On the local solvability of the two-dimensional Hele-Shaw problem with fractional derivative with respect to time//Siberian Advances in Mathematics. – 2015. – Vol.25. – P.276 – 296.

7.Vasylyeva N. Local solvability of a linear system with a fractional derivative in time in a boundary condition// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2015. – Vol.18. – P. 982–1005.

8. Kirane M , Torebek B.T . On a nonlocal problem for the Laplace equation in the unit ball with fractional boundary conditions //Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2016. – Vol.39, No.5. – P.1121 – 1128.

9.Krasnoschok M., Vasylyeva N. On a nonclassical fractional boundary-value problem for the Laplace operator// Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol.257, No.6. – C.1814 – 1839.

10. Turmetov B., Nazarova V. On a generalization of the Neumann problem for the Laplace equation//Mathematische Nachrichten. – 2020. – Vol.293, No.1. – C.169 – 177.

11. Bicadze A.V. K zadache Neimana dlia gormonicheskih funkcii [On the Neumann problem for harmonic functions] //Docl. AN SSSR. – 1990. – T.311,№1. – C.11 – 13.

12. Turmetov B.H Ob odnoi kraevoi zadache dlia gormonicheskogo uravnenia [On a boundary value problem for a harmonic equation] //Differencialnye uravnenia. – 1996. – T.32, № 8. – C.1089 – 1092.

13. Turmetov B.K. On smoothness of a solution to a boundary value problem with fractional order boundary operator//Siberian Advances in Mathematics. – 2005. – Vol.15, No.2. – C.115 – 125.

14.Evans L. C. Partial Differential Equations.American Mathematical Soc., – 2010. – 749 p.

15.Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. – Berlin:Springer-Verlag GmbH, 2001. – 518 p.

16.Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order// Boundary value problems. – 2013. No. 93. – P.1 – 15.